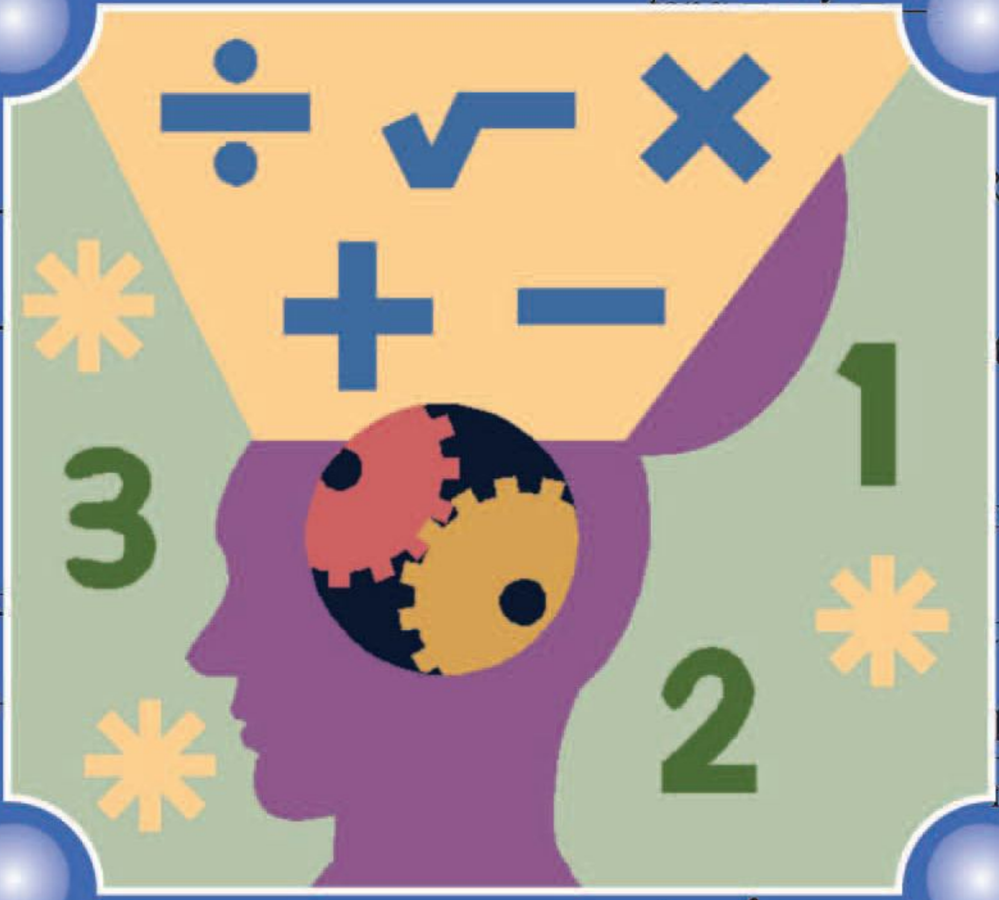
ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ, ગાંધીનગર

ગણિત
વિભાગ-૧



JEE ની તૈયારી માટે માર્ગદર્શક પ્રશ્ન સંપૂટ (M.C.Q.)

કિંમત રૂ.૧૦૦/-

સચિવ
ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ
સેક્ટર-૧૦ બી, જૂના સચિવાલય પાસે, ગાંધીનગર-૩૮૨ ૦૧૦

આ પુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉ.મા. શિક્ષણ બોર્ડ, ગાંધીનગરને હસ્તક છે. આ પુસ્તકનો કોઈપણ ભાગ કોઈપણ રુપમાં સચિવશ્રી, ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉ.મા. શિક્ષણ બોર્ડ, ગાંધીનગરની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉ.મા. શિક્ષણ બોર્ડ
ગાંધીનગર

પ્રશ્નબેંક - ગણિત

કિંમત : ` 100.00

પ્રકાશક
સચિવ, ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉ.મા. શિક્ષણ બોર્ડ,
સેક્ટર-૧૦બી, ગાંધીનગર

યોગદાન

1. ડૉ. હસમુખ અઢિયા (I.A.S)	અગ્ર સચિવશ્રી શિક્ષણ વિભાગ, ગાંધીનગર
2. શ્રી આર. આર.વરસાણી (I.A.S)	અધ્યક્ષશ્રી, ગુ.મા. અને ઉ.મા.શિ.બોર્ડ, ગાંધીનગર
3. શ્રી એચ. કે. પટેલ (G.A.S)	નાયબ અધ્યક્ષશ્રી ગુ.મા. અને ઉ.મા.શિ.બોર્ડ, ગાંધીનગર
4. શ્રી એમ. આઈ. જોશી (G.E.S)	સચિવશ્રી ગુ.મા. અને ઉ.મા.શિ.બોર્ડ, ગાંધીનગર

સંકલન

1. શ્રી બી. કે. પટેલ	ખાસ ફરજ પરના અધિકારી ગુ.મા. અને ઉ.મા.શિ.બોર્ડ, ગાંધીનગર
2. શ્રી ડી. એ. વણકર (નિવૃત્ત)	મદદનીશ સચિવશ્રી ગુ.મા. અને ઉ.મા.શિ.બોર્ડ, ગાંધીનગર

તજજ્ઞ શિક્ષકો

1. શ્રી પરિમલ બી. પૂરોહિત (કન્વીનર)	સેન્ટ ઝેવીયર્સ હાઈસ્કુલ, સુરત
2. શ્રી રમેશચંદ્ર વી. વૈષ્ણવ (કન્વીનર)	સરદાર પટેલ અને સ્વામી વિવેકાનંદ હાઈસ્કુલ, મણિનગર, અમદાવાદ
3. શ્રી કાન્તીલાલ એન. પ્રજાપતિ	એસ. એફ.એ કોન્વેન્ટ હાઈસ્કુલ, નવસારી
4. શ્રી વિજયકુમાર એચ. ધાંધલ્યા	આર.પી.ટી.પી હાઈસ્કુલ વલ્લભ વિદ્યાનગર, આણંદ
5. ડૉ. મનોજ આર. જવાણી	ડી. એન હાઈસ્કુલ, આણંદ
6. શ્રી રમેશચંદ્ર ડી. મોઢા	સ્વામી વિવેકાનંદ વિદ્યાવિહાર, સે-૧૨, ગાંધીનગર
7. શ્રી ભરતભાઈ એચ. પટેલ	આશ સેકન્ડરી સ્કૂલ, વિજાપુર, જિ. મહેસાણા
8. શ્રી પોપટભાઈ પી. પટેલ	સી.એન. વિદ્યાલય, આંબાવાડી, અમદાવાદ
9. શ્રી ગૌતમભાઈ જે. પટેલ	એમ. કે. હાયર સેકન્ડરી, લો ગાર્ડન, અમદાવાદ
10. શ્રી એમ. એસ. પિલ્લાઈ	બેસ્ટ હાઈસ્કુલ, મણિનગર, અમદાવાદ
11. શ્રી રીતેશ વાય. શાહ	મુક્તજીવન હાઈસ્કુલ, ઈસનપુર, અમદાવાદ
12. શ્રી અશોકભાઈ વી. પંડ્યા	વિદ્યાનગર હાઈસ્કુલ, ઉસ્માનપુરા, અમદાવાદ
13. શ્રી આર. કે. પટેલ	શ્રી એમ. બી. કર્ણાવતી હાઈસ્કુલ, પાલનપુર જિ. બનાસકાંઠા
14. શ્રી પી.બી. પટેલ	શ્રી કે.સી. કોઠારી હાઈસ્કુલ, સૂરત
15. શ્રી મહેશભાઈ બી. પટેલ	સી.યુ.શાહ હાયર સેકન્ડરી સ્કૂલ, આશ્રમરોડ, અમદાવાદ
16. શ્રી જયંતિભાઈ ડી. ખૂંટ	શ્રી આર. કે ઘરશાળા વિનયમંદિર, ભાવનગર
17. શ્રી નવરોજભાઈ બી. ગાંગાણી	ઝવેરચંદ મેઘાણી હાઈસ્કુલ, બગસરા જિ. અમરેલી
18. શ્રી માવજીભાઈ એમ. સુદાણા	શ્રી સરદાર પટેલ વિદ્યામંદિર (ભવડી) રાજકોટ
19. શ્રી પંકજભાઈ એસ. દવે	સી.યુ.શાહ હાયર સેકન્ડરી સ્કુલ, આશ્રમરોડ, અમદાવાદ
20. શ્રી જંયતિભાઈ જે. પટેલ	શેઠ સી.એમ. હાઈસ્કુલ, સેકટર-૧૩, ગાંધીનગર
21. શ્રી જયવદન ડી. પંડ્યા	ડી. એન. હાઈસ્કુલ, આણંદ
22. શ્રી મિતેશ સી. શાહ	એચ. એન્ડ. ડી પારેખ હાઈસ્કુલ, ખેડા
23. શ્રી રોબિનકુમાર એ. પરમાર	કસ્તુરબા કન્યા વિદ્યાલય, આણંદ
24. શ્રી શરદ બી. બકોત્રા	સેન્ટઝેવીયર્સ હાઈસ્કુલ, આદિપુર, કચ્છ

પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ-12 પછીના ઈજનેરી અને મેડીકલ અભ્યાસક્રમોમાં પ્રવેશ આપવા માટે અત્યાર સુધી વિવિધ પ્રવેશ પરીક્ષાઓ વિદ્યાર્થીઓને આપવી પડતી હતી. વિદ્યાર્થીઓ પક્ષે પરીક્ષાઓનો બોજો વધતો હતો. વિદ્યાર્થીઓની આ મુશ્કેલીનું નિવારણ કરવા માટે ચાલુ વરસથી ભારત સરકારના માનવસંસાધન વિકાસ મંત્રાલય દ્વારા સમગ્ર દેશને આવરી લેતી પરીક્ષા પદ્ધતિ દાખલ કરી છે. ઈજનેરી અભ્યાસક્રમોમાં પ્રવેશ માટે CBSE દ્વારા JEE (Main) અને JEE (Advanced) પરીક્ષાઓ યોજવામાં આવશે. ગુજરાત સરકારે પણ નવી પદ્ધતિને સમર્થન આપેલ છે. અને CBSE દ્વારા યોજાનારી પરીક્ષાઓને અનુસરવાનું નક્કી કર્યું છે.

સૂચિત JEE (Main) અને JEE (Advanced) પરીક્ષાને લગતી જરૂરી માહિતી CBSE ની વેબસાઈટ www.cbse.nic.in ઉપર ઉપલબ્ધ છે. અને વાલીઓ આ વેબસાઈટ ખોલીને અદ્યતન માહિતી-માર્ગદર્શન મેળવી તે પ્રમાણે સૂચિત પરીક્ષા માટે તૈયારી કરે તેવો અનુરોધ છે. સૂચિત પરીક્ષાનો અભ્યાસક્રમ, પરીક્ષામાં પ્રવેશ માટેની પદ્ધતિ, પરીક્ષાનાં કેન્દ્રો/સ્થળો/શહેરો વગેરેની વિસ્તૃત માહિતી સદરહુ વેબસાઈટ ઉપર ઉપલબ્ધ છે. તેનો કાળજીપૂર્વક અભ્યાસ કરી લેવો જરૂરી છે. બોર્ડ દ્વારા JEE (Main) 2013 ની માહિતી પુસ્તિકા ગુજરાતી ભાષામાં સૌ વિદ્યાર્થીઓ અને લાભાર્થીઓ માટે પ્રસિદ્ધ કરી તેની એક એક નકલ રાજ્યની તમામ શાળાઓમાં મોકલી આપવામાં આવી છે. તેનો પણ પૂરતો લાભ લેવા અનુરોધ છે. આમ છતાં CBSE ની ઉક્ત વેબસાઈટ અવારનવાર જોવા અને અદ્યતન માહિતી-માર્ગદર્શન મેળવવું અત્યંત આવશ્યક છે. JEE અને NEET ની પરીક્ષા માટે ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ, ગાંધીનગર દ્વારા વિદ્યાર્થીઓ અને વાલીઓની માગણીઓ ધ્યાનમાં રાખીને ઉપયોગી થાય તે માટે રાજ્યના વિજ્ઞાન-પ્રવાહના તજજ્ઞ શિક્ષકો દ્વારા આ એક પ્રશ્નસંપુટ તૈયાર કરવાનો નમ્ર પ્રયાસ કરવામાં આવ્યો છે. આ પ્રશ્નસંપુટમાં હેતુલક્ષી પ્રશ્નો (MCQ પ્રકારના) વિદ્યાર્થીઓને ઉત્તમ માર્ગદર્શન પૂરું પાડશે અને JEE તથા NEET ની પરીક્ષાઓ માટે સહાયરૂપ બનશે તેવી આશા છે.

વિશેષમાં જણાવવાનું કે આ 'પ્રશ્નસંપુટ' વિદ્યાર્થીઓના માર્ગદર્શન માટે જ છે, તેમાં આપવામાં આવેલા પ્રશ્નોમાંથી પરીક્ષામાં પૂછાશે તેવું માની લેવાની જરૂર નથી. આ પ્રશ્નસંપુટ JEE અને NEET પરીક્ષા માટે વિદ્યાર્થીઓના માત્ર માર્ગદર્શન અને મહાવરા માટે જ છે. આશા છે કે આ પ્રશ્નસંપુટ JEE અને NEET ની પરીક્ષા માટે વિદ્યાર્થીઓને ઉપયોગી અને માર્ગદર્શક બની રહેશે. ક્ષતિ રહિત પ્રશ્ન સંપુટ બને તે માટે પૂરતી કાળજી લેવા પ્રયત્ન કરવામાં આવ્યો છે, તેમ છતાં કોઈ ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તો તે માટે પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલ માહિતીને ધ્યાને લેવા વિનંતી છે. આ પ્રશ્નસંપુટ અંગેના વિદ્યાર્થીઓ, વાલીઓ તથા શિક્ષકોનાં રચનાત્મક સૂચનો આવકાર્ય છે.

તા. 02/01/2013 **એમ.આઈ.જોશી** **આર. વરસાણી (IAS)**

સચિવ અધ્યક્ષ

અનુક્રમણિકા

Unit:- I	ગણ સિદ્ધાંત સંબંધ અને વિધેય	1
Unit:- II	સંકર સંખ્યા	40
	દ્વિઘાત સમીકરણ	81
Unit:- III	શ્રેણિકો અને નિશ્ચાયક	131
Unit:- IV	ક્રમચય અને સંચય	193
Unit:- V	ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત	226
Unit:-VI	દ્વિપદી પ્રમેય	242
Unit:-VII	શ્રેણી અને શ્રેઢી	269
Unit:-VIII	લક્ષ અને સાતત્ય	314
	વિકલન	364
Unit:-IX	અનિયત અને નિયત સંકલન	397

†i`ÏÜ :- 1

ÄÜ±Ü ŸôÜÁÄÜÜ`Ü ôÜÈÜÄÜ † ÃÜ ŸîÜÁÜÑÜ

અગત્યના મુદા

1. **ગણ :** ગણ એ ગણિતમાં આવતા અવ્યાખ્યાયિત પદો પૈકીનું એક પદ છે.

→ ગણ એ A,B,C,X,Y,Z...... વગેરે દ્વારા દર્શાવાય છે.

→ ગણ ને અમુક વસ્તુઓના સુવ્યાખ્યાયિત સમૂહ તરીકે સ્વીકારીશું

→ જો x એ કોઈ ગણ A નો સભ્ય (અથવા ઘટક) હોય, તો $x \in A$ (વંચાય : (xbelongs to A) લખીશું

ગણ દર્શાવવાની રીતો :

→ **યાદીની રીત :** આ રીતમાં ગણના ઘટકોની નિશ્ચિત યાદી બનાવાય છે. બે ઘટકોને તેમની વચ્ચે અલ્પવિરામ મૂકી જુદા પાડવામાં આવે છે.

→ **ગુણધર્મની રીત :** આ રીતમાં ગણના ઘટકો x ના કોઈ લાક્ષણિક ગુણધર્મ P(x) દ્વારા ગણની રજૂઆત કરવામાં આવે છે. આમ , $\{x / P(x) = x$ નો ગુણધર્મ$\}$ લખાય. અને આપેલ ગુણધર્મ P(x) ધરાવતા તમામ x નો ગણ તેમ વંચાય

→ **ગણના પ્રકાર**

(1) એકાકીગણ (Singleton set) : ફક્ત એક જ ઘટક ધરાવતા ગણને એકાકી ગણ કહે છે.

(2) ખાલી ગણઃ (Empty set) : જે ગણ એક પણ ઘટક ન ધરાવતો હોય તેને ખાલી ગણ કહે છે.

(3) સાર્વત્રિકગણ : ઘણી વખત આપણે એક કરતાં વધારે ગણની વાત કરતા હોઈએ ત્યારે આ તમામ ગણના ઘટકો કોઈ એક નિશ્ચિત ગણના સભ્યો હોય છે. આ ગણને નિશ્ચિત સાર્વત્રિક ગણ કહે છે. અને તેને U વડે દર્શાવાય છે.

(4) ઉપગણ : જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B નો ઘટક હોય તો ગણ A ને ગણ B નો ઉપગણ કહે છે. સંકેતમાં $A \subset B$ લખાય

→ A એ B નો ઉપગણ હોય B ને A નો અધિગણ કહે છે જેને $B \supset A$ વડે દર્શાવાય છે.

(5) ઘાત ગણ : કોઈ ગણ A માટે, A ના તમામ ઉપગણોથી બનતા ગણને A નો ઘાતગણ કહેવાય છે. અને તેને P(A) થી દર્શાવાય છે.

(6) સમાન ગણો : જો ગણ A તથા B ના તમામ ઘટકો તેના તેજ હોય, તો A તથા B ને સમાન ગણ કહે છે. આમ $\forall x,\ x \in A$ તો $x \in B$ અને $\forall x,\ x \in B$ તો $x \in A$ હોય તો $A = B$ આમ, જો $A \subset B$ તથા $B \subset A$ તો $A = B$.

(7) શાંત ગણ : જે ગણની સભ્ય સંખ્યા નિશ્ચિત હોય તેને શાંતગણ કહે છે.

(8) અનંત ગણ : જે ગણની સભ્ય સંખ્યા નિશ્ચિત ના હોય તેને અનંત ગણ કહે છે.

ગણક્રિયાઓ :

(1) યોગક્રિયા : ધારોકે $A, B \in P(U)$ A અથવા B માં આવેલા તમામ ઘટકોને સમાવતા ગણને A અને B નો યોગ ગણ કહેવાય અને તેને $A \cup B$ થી દર્શાવાય છે બે ગણોનો યોગ ગણ મેળવવાની ક્રિયાને યોગ ક્રિયા કહે છે.

આમ $A \cup B = \{x / x \in A$ અથવા $x \in B\}$

(2) છેદ ક્રિયા : જો $A, B \in P(U)$ તો A તથા B બંનેમાં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B નો છેદગણ કહેવાય છે. જેને સંકેતમાં $A \cap B$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, છેદગણ મેળવવાની ક્રિયાને છેદ ક્રિયા કહેવાય આમ, $A \cap B = \{x / x \in A$ અને $x \in B\}$

યોગ ક્રિયાના કેટલાક મહત્વના પરીણામો

1. $A \cup B \in P(U)$
2. $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$
3. $A \cup A = A$
4. જો $A \subset B$ અને $C \subset D$ તો $(A \cup B) \subset (B \cup D)$
5. $A \cup B = B \cup A$ ક્રમનો નિયમ
6. (AUB) U $C = AU$ (BUC) જૂથનો નિયમ
7. $A \cup \varnothing = A$
8. $A \cup U = U$

છેદ ક્રિયાના કેટલાક મહત્વના પરીણામો.

i. $A \cap B \in P(U)$

ii. $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$

iii. $A \cap B = A$

iv. જો $A \subset B, C \subset D$ તો $(A \cap B) \subset (B \cap D)$

v. $A \cap B = B \cap A$ ક્રમનો નિયમ

vi. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ જૂથનો નિયમ

vii. $A \cap \varnothing = \varnothing$

viii. $A \cap U = A$

વિભાજનના નિયમો :

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

અલગ ગણ : જો બે અરિક્ત ગણ A અને Bનો છેદ ગણ ખાલી ગણ, હોય તો તેમને અલગ ગણ કહે છે.

જો A અને B અલગ ગણ હોય તો $A \cap B = \varnothing$

પૂરક ક્રિયા : ગણ $A \in P(U)$ માટે A માં ન હોય તેવા U ના બધા જ ઘટકોના ગણને A નો પૂરક ગણ કહેવાય છે. અને તેને A' થી દર્શાવાય છે. કોઈ ગણનો પૂરક ગણ શોધવાની ક્રિયાને પૂરકક્રિયા કહેવાય છે.

અહીં $A' = \{X / X \in \cup$ અને $X \notin A\}$

તફાવત ગણ : $A, B \in P(U)$ તો A માં હોય તથા B માં ન હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B નો તફાવત ગણ કહે છે. તેને સંકેતમાં A-B થી દર્શાવ્યા છે. બે ગણનો તફાવત ગણ મેળવવાની ક્રિયાને તફાવત ક્રિયા કહે છે.

સંમિત તફાવત ગણ : $A, B \in P(U)$ **A** માં હોય અથવા B માં હોય પરંતુ $A \cap B$માં ન હોય તેવા ઘટકોથી બનતા ગણને A તથા B નો સંમિત તફાવત ગણ કહે છે. તથા તેના માટેનો સંકેત $A \Delta B$ છે.

ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર : જો A અને B અરિક્ત ગણ હોય, તો જ્યાં $x \in A$ તથા $y \in B$ હોવી તેવી તમામ ક્રમયુક્ત જોડીઓ (x, y) ના ગણને A તથા B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર કહે છે તથા A અને B ના કાર્તેઝિય ગુણાકાર માટેનો સંકેત $A \times B$ છે. (વાંચો : A cross B)

આમ $A \times B = \{ (x, y)\ x \in A,\ y \in B\}$

→ $A = \varnothing$ અથવા $B = \varnothing$ તો $A \times B = \varnothing$ લેવાય છે.

$A \times A$ ને આપણે A^2 દ્વારા દર્શાવીશું.

અગત્યના પરિણામો :

(1). જો $A \subset B$ તો $A \cup B = B$ અને $A \cap B = A$

(2). $A \cap A' = \varnothing,\ A \cup A' = \cup,\ \varnothing' = \cup,\ \cup' = \varnothing,$

$(A')' = A$

(3). $A - B = A \cap B'$ અને $B\text{-}A = A' \cap B$

(4). $A - B \subset A$ અને $B\text{-}A \subset B$

(5). $A' = \cup - A$

(6). જો $A \subseteq B$ તો $B' \subseteq A'$

(7). $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (A - B) \cup (B - A)$

સાન્તગણના ઘટકોની સંખ્યા : સાન્તગણ A ના ઘટકોની સંખ્યા નો સંકેત $n(A)$ છે.

અગત્યના પરિણામો :

(1). $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ જો A અને B અલગ ગણો હોય તો

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$ જ્યાં A,B,C અલગ ગણો છે.

(2). $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

(3). $n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)$

(4). $n(A'\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

(5). $n(A\cup B)=n(A\cap B')+n(A'\cap B)+n(A\cap B)$

(6). $n(A\times B)=n(B\times A)=n(A)\cdot n(B)$

(7). $n(A\times B\times C)=n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)$

(8). $n(A\times A)=(n(A))^2$.

સંબંધ.

સંબંધ : ગણો A અને B માટે $A\times B$ ના કોઈપણ ઉપગણને A થી B નો સંબંધ કહે છે.

જો S એ ગણ A પરના સંબંધ હોય એટલેકે $S\subset(A\times A)$ અને $(x,y)\in S$ તો આપણે કહીએ છીએકે x એ y સાથે S દ્વારા સબંધ ધરાવે છે. તથા આને સંકેતમાં xSy દ્વારા દર્શાવાય છે.

(i). કેટલાક જુદા જુદા પ્રકારના સંબંધ

(1). ખાલી અથવા રિક્ત સંબંધ : ગણ A પરના એક પણ ઘટક ન ધરાવતા સંબંધને ખાલી સંબંધ કહે છે. $\varnothing\subset A\times A$, સંબંધ $\varnothing$ ને ખાલી સંબંધ કહે છે.

(2). સાર્વત્રિક સંબંધ : જો ગણ A પરનો સંબંધ $A\times A$ હોય, તો તેને સાર્વત્રિક સંબંધ કહે છે.

(3). સ્વવાચક સંબંધ : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને aSa, $\forall a\in A$ એટલે કે $(a,a)\in S$, $\forall a\in A$ તો S એ સ્વાવાચક સંબંધ છે તેમ કહેવાય

(4). સંમિત સંબંધ : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને ${}_aS_b={}_bS_a$ એટલે કે $(a,b)\in S\Rightarrow(b,a)\in S,\forall a,b,\in A$ તો S એ સંમિત સંબંધ છે તેમ કહેવાય

(5). પરંપરિત સંબંધ : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને ${}_aS_b$ તથા ${}_bS_c={}_aS_c$ $\forall a,b,c\in A$ એટલેકે

$(a,b)\in S$ તથા $(b,c)\in S\Rightarrow(a,c)\in S$

$\forall a,b,c\in A$ તો S એ પરંપરિત સંબંધ છે તેમ કહેવાય

સામ્ય સંબંધ : જો ગણ A પરનો સંબંધ S એ સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત હોય તો S ને ગણ A પરનો સામ્ય સંબંધ કહે છે.

જો S સામ્ય સંબંધ હોય તથા $(x,y)\in S$ તો $x\sim y$ લખાવામાં આવે છે.

વિસંમિત સંબંધ : જો S એ ગણ A પર કોઈ સંબંધ હોય અને જો $(a,b)\in S$ અને $(b,a)\in S$

$\forall a,b \in A \Rightarrow a = b$ તો S એ વિસંમિત સંબંધ છે.

સામ્યવર્ગો : ધારોકે S એ ગણ A પરનો સામ્ય સંબંધ છે. અને $a \in A$ તો S ના ઉપગણ $\{x \in A /_x S_a\}$ ને a ને સમાવતો સામ્યવર્ગ કહે છે.

યાદ રાખો :

→ જો A માં m અને B માં n ઘટકો હોય તો $A \times B$ માં mn ક્રમયુક્ત જોડ મળશે

$\therefore$ $A \times B$ ના કુલ 2^{mn} ઉપગણો મળે

$\therefore$ A થી B ના કુલ 2^{mn} સંબંધ મળે

→ $R = \{(a,a) : a \in A\}$ ને ગણ A પરનો તદેવ સંબંધ કહે છે.

→ અરિક્ત ગણ પરનો તદેવ સંબંધ હમેશાં સામ્ય સંબંધ હોય જ

→ આરિક્ત ગણ પરનો સાર્વત્રિક સંબંધ સામ્ય સંબંધ થાય જ

→ આરિક્ત ગણ પરનો તદેવ સંબંધ હંમેશા વિસંમિત સંબંધ થાય જ

વિધેય

વિધેય : ધારોકે A અને B બે અરિક્ત ગણ છે અને $f \subset (A \times B)$ અને $f \neq 0$ પ્રત્યેક $x \in A$ ને સંગત અનન્ય ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in f$ હોય તો $f : A \to B$ ને વિધેય કહેવાય છે. A અને f નો પ્રદેશ અને B ને f નો સહપ્રદેશ કહેવાય છે.

વિધેય $f : A \to B$ ના પ્રદેશ અને વિસ્તારને અનુક્રમે D_f અને R_f થી દર્શાવાય છે.

સમાન વિધેયો : જો બે વિધેયના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને આલેખ (ક્રમયુક્ત જોડના ગણ) અથવા સૂત્ર (જો હોય તો) સમાન હોય તો તેમને સમાન વિધેય કહે છે.

વિધેય $f : A \to B$ માટે f(x) ને x આગળ f નું મૂલ્ય અથવા f દ્વારામળતું x નું પ્રતિબિંબ કહેવાય છે. અને x ને f(x) નું પૂર્વપ્રતિબિંબ કહેવાય છે.

કેટલાક વિશિષ્ટ વિધેયો :

(1) તદેવ વિધેય : જો A કોઈ અરિક્ત ગણ હોય તો $f : A \to B$ f(x) = x $\forall$ $x \in A$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય A ઉપરનું તદેવ વિધેય કહેવાય

→ ગણ A પરનું તદેવ વિધેય I_A વડે દર્શાવાય

(2) અચળ વિધેય : જે વિધેયનો વિસ્તાર એકાકી ગણ હોય તેને અચળ વિધેય કહે છે.

વિધેય $f : A \to B$ હોય અને c એ B નો કોઈ નિશ્ચિત ઘટક હોય તથા પ્રત્યેક $x \in A$ માટે f(x) = C તો $f : A \to B$ ને અચળ વિધેય કહે છે.

(3) માનાંક વિધેય : $f : R \to R$ f(x) = |x| થી વ્યખ્યાયિત થતા વિધેયને માનાંક વિધેય કહે છે.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(4) ચિન્હ વિધેય : વિધેય $f: R \to R$ જ્યાં

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{જો} \quad x>0\\ 0 & \text{જો} \quad x=0\\ -1 & \text{જો} \quad x<0\end{cases}$$ તે ચિન્હ વિધેય કહેવાય છે.

(5) બહુપદી વિધેય : વિધેય $g: R \to R$ જ્યાં

$g(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ ને n ઘાતનું બહુપદી વિધેય કહેવાય છે

(6) સંમેય વિધેય : $g(x)\neq 0$ હોય તેવા પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત બહુપદી વિધેયો f તથા g માટે $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય છે.

(7) મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય : જો [x] એ x થી અધિક નહીં તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે તો $f: R\to R, f(x)=[x]$ ને મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય કહે છે.

→ આ વિધેયને Floor Function (ફ્લોર વિધેય) પણ કહે છે.

(8) ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય : $g: R\to R,\ g(x)=\lceil x\rceil$

$\lceil x\rceil$ એ x કરતાં નાનો નહી તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક છે. આ વિધેયને સિલિંગ વિધેય કહે છે.

એક-એક વિધેય : જો $f: A\to B$ વિધેય હોય અને

$\forall x_1, x_2, \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ હોય તો $f: A\to B$ ને એક-એક વિધેય કહે છે.

અનેક-એક વિધેય : $f: A\to B$ વિધેય છે જો કોઈક $x_1, x_2, \in A$ માટે $x_1\neq x_2$ અને $f(x_1)=f(x_2)$ થાય તો $f: A\to B$ ને અનેક -એક વિધેય કહે છે.

વ્યાપ્ત વિધેય : જો વિધેય $f: A\to B$ નો વિસ્તાર તથા તેનો સહપ્રદેશ B સમાન ગણ હોય તો f ને વ્યાપ્ત વિધેય કહે છે.

જો $R_f = f(A) = B$ તો f વ્યાપ્ત હોય

સંયોજિત વિધેય : $f: A\to B$ અને $g: B\to C$ બે વિધેયો છે. તેમનું સંયોજીત વિધેય $gof: A\to C$ $gof(x)=g(f(x))$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

જો $f: A\to B$ અને $g: C\to D$ વિધેયો હોય અને R_f C D_g તો $fog: A\to D$ gof(x) = g (f(x)) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

પ્રતિવિધેય : જો $f: A\to B$ વિધેય હોય તથા $g: B\to A$ મળે કે જેથી $gof = I_A$ અને $gof = I_B$ બને તો $g: B\to A$ ને $f: A\to B$ નું પ્રતિવિધેય કહે છે. અને તેને સંકેતમાં f^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

કેટલાક અગત્યના પરિણામો :

→ જો $f: A\to B$ નું પ્રતિવિધેય $g: B\to A$ મળે તો $f: A\to B$ એક -એક અને વ્યાપ્ત થાય.

→ જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો $f: A\to B$ નું પ્રતિવિધેય $f^{-1}: B\to A$ મળે

→ જો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો અને તોજ તેનું પ્રતિ વિધેય $f^{-1} : B \to A$ મળે

→ જો $f : A \to B$ અને $g : B \to A$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોયતો અને $gof : A \to C$ પણ એક એક અને વ્યાપ્ત થાય તથા $(gof)^{-1} = f^{-1}\ og^{-1}$

ત્રિકોણમિતિય પ્રતિવિધેયો માટે :

	વિધેય	પ્રદેશ	વિસ્તાર
(i)	$f(x) = \sin^{-1} x$	$[-1,1]$	$\left[-\pi/2, \frac{\pi}{2}\right]$
(ii)	$f(x) = \cos^{-1} x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
(iii)	$f(x) = \tan^{-1} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
(iv)	$f(x) = \cot^{-1} x$	R	$(0,\pi)$
(v)	$f(x) = \sec^{-1} x$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
(vi)	$f(x) = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$\left[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2\right]$

વિધેયના પ્રદેશના પરીણામો.

(1) $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$

(2) $D(fg) = D(f) \cap D(g)$

(3) $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D/g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

(4) $D\left(\sqrt{f}\right) = D(f) \cap \{x : f(x) \geq 0\}$

(5) $D(fog) = D(g)$ જ્યાં $(fog)(x) = f(g(x))$

પ્રશ્નબેંક

1. જો $aN = \{ ax / x \in N \}$ અને $bN \cap cN = dN$ જ્યાં $b, c \in N$ તથા b અને c સાપેક્ષ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હોય તો

(a) $d = bc$ (b) $c = bd$ (c) $b = cd$ (d) $a = bd$

2. બે શાંત ગણો અનુક્રમે m અને n ઘટકો ધરાવે છે. વળી પહેલા ગણના ઉપગણોની સંખ્યા એ બીજાગણના ઉપગણોની સંખ્યા કરતા 112 વધારે છે. તો m અને n ની કિંમત અનુક્રમે .... છે.

(a) 5, 2 (b) 4, 7 (c) 7, 4 (d) 2, 5

3. એક સર્વે પ્રમાણે 70% ભારતીય કેરી પસંદ કરે છે અને 82% સફરજન પસંદ કરે છે. જો x% ભારતીય કેરી અને સફરજન બંને પસંદ કરતા હોય તો

(a) $x = 52$ (b) $52 \le x \le 70$ (c) $x = 70$ (d) $70 \le x \le 82$

4. જો $X \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ હોય તો નીચેનામાંથી શું સાચુ છે ?

(a) નાનામા નાનો ગણ $X = \{1, 2, 5, 6\}$ (b) નાનામા નાનો ગણ $X = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

(c) નાનામા નાનો ગણ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ (d) મોટામા મોટો ગણ $X = \{1, 2, 3, 4,\}$

5. જો A અને B ગણો ના 43 ઘટકો સામાન્ય હોય તો $A \times B$ અને $B \times A$ ગણના .... ઘટકો સામાન્ય હોય.

(a) 43^2 (b) 2^{43} (c) 43^{43} (d) એકપણ નહી

6. જો $X = \{(x, y, z) / x, y, z \in N, x + y + z = 10, x < y < z\}$ અને

$Y = \{(x, y, z) / x, y, z \in N, y = |x - z|\}$ તો $X \cap Y =$ .... છે.

(a) $\{(2, 3, 5)\}$ (b) $\{(1, 4, 5)\}$

(c) $\{(5, 1, 4)\}$ (d) $\{(2, 3, 5), (1, 4, 5)\}$

7. એક કસબામાં 30% કુટુંબો પાસે સ્કુટર છે અને 40% પાસે કાર છે. જ્યારે 50% કુટુંબો પાસે કાર કે સ્કૂટર બેમાંથી કશું નથી જ્યારે 2000 કુટુંબો પાસે સ્કુટર અને કાર બંને છે. આ માહિતીને આધારે નીચેના વિધાનો આપેલા છે.

(1) 20% કુટુંબો પાસે કાર અને સ્કૂટર છે.

(2) 35% કુટુંબો પાસે કાર અથવા સ્કૂટર છે.

(3) કસબામાં 10000 કુટુંબો રહે છે.

ઉપરમાંથી કયુ વિધાન સત્ય છે?

(a) 2 અને 3 (b) 1, 2 અને 3 (c) 1 અને 2 (d) 1 અને 3

8. જો $A = \{\theta : \tan\theta + \sec\theta = \sqrt{2}\sec\theta\}$ અને $B = \{\theta : \sec\theta - \tan\theta = \sqrt{2}\tan\theta\}$ બે ગણો હોય તો

(a) $A = B$ (b) $A \ne B$ (c) $A \subset B$ (d) $B \subset A$

9. ધારોકે A_i (i = 1,2,3.....60) ગણો છે અને દરેક માં 12 સભ્યો છે અને Bi (i = 1, 2, ...n) એ n ગણો છે જે દરેક 4 સભ્યો ધરાવે છે. જો $\bigcup_{i=1}^{60} Ai = \bigcup_{j=1}^{n} Bj = C$ અને C નો દરેક સભ્ય બરાબર 20 A_i માં અને બરાબર 18 B_j માં આવેલો છે. તો n= ....

(a) 162 (b) 36 (c) 60 (d) 120

10. જો A ખાલી ગણ હોય તો n[P[P[P(A)]]] = ...

(a) 6 (b) 16 (c) 2 (d) 4

11. A અને B ગણ માટે n (A-B) = 8 + 2x, n (B-A) = 6x અને $n(A \cap B) = x$ છે. જો n(A) = n(B) હોય તો $n(A \cap B) =$ ....

(a) 26 (b) 50 (c) 24 (d) એકપણ નહી

12. જો $A = \{(a, b) / b = 2a - 5\}$ માટે $(m, 5)$ અને $(6, n)$ એ ગણ A ના સભ્ય હોય તો અનુક્રમે m અને n .... છે.

(a) 5, 7 (b) 7, 5 (c) 2, 3 (d) 5, 3

13. અહીં સ્થંભ A અને સ્થંભ B ત્રણ-ત્રણ ગણ આપેલા છે.

A		B	
(1)	$\{L, A, T\}$	(A)	$\{x / x \in Z, x^2 < 5\}$
(2)	$\{x \in z, / x^3 - x = 0\}$	(B)	{x એ LATA શબ્દનો અક્ષર}
(3)	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	(C)	$\left\{\sin o^\circ, \sin\frac{3\pi}{2}, \tan\frac{5\pi}{4}\right\}$

નીચે પૈકી કઈ જોડ યોગ્ય છે ?

(a) 1-(A), 2-(B), 3-(C) (b) 1-(B), 2-(A), 3-(C)

(c) 1-(B), 2-(C), 3-(A) (d) 1-(A), 2-(C), 3-(B)

14. જો $S_1 = \{1, 2, 3...20\}$, $S_2 = \{a, b, c, d\}$ $S_3 = \{b, d, e, f\}$ તો $(S_1 \times S_2) \cup (S_1 \times S_3)$ ના ઘટકોની સંખ્યા = ...

(a) 100 (b) 120 (c) 140 (d) 40

15. બે ગણો A અને B માટે $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ નું સરળ સ્વરૂપ ....

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A' \cap B'$ (d) $A \cap B'$

16. એક કોલેજમાં 400 વિદ્યાર્થી છે. તેમાંથી દરેક વિદ્યાર્થી 5 વર્તમાનપત્ર વાંચે છે અને દરેક વર્તમાન પત્ર 80 વિદ્યાર્થી વાંચે છે. તો વર્તમાનપત્રની સંખ્યા .... છે.

(a) 25 (b) વધારેમાં વધારે 20

(c) વધારેમાં વધારે 25 (d) ઓછામાં ઓછી 25

17. જો $A = \{ x / x^2 = 1 \}$ અને $B = \{ x / x^4 = 1 \}$ તો $A \Delta B =$ ________ $(x \in C)$

(a) $\{ -1, 1, i, -i \}$ (b) $\{ -1, 1 \}$ (c) $\{ i, -i \}$ (d) $\{ -1, 1, i \}$

18. જો $A = \{ (x, y) / |x-3| < 1, |y-3| < 1\ x, y \in R \}$ અને

$B = \{ (x, y) / 4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 \le 0,\ x, y \in R \}$

તો નીચેનામાંથી શું સાચુ છે ?

(a) A એ B નો ઉચીત ઉપગણ છે. (b) B એ A નો ઉચીત ઉપગણ છે.

(c) $A = B$ (d) $A' = B$

19. જો $A = \{ n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3, n \in N \}$ અને $B = \{ 9n, n \in N \}$

(a) $A \subset B$ (b) $B \subset A$ (c) $A = B$ (d) $A' = B$

20. જો $U = \{1, 2, 3\}$ અને $A = \{1, 2\}$ તો $[P(A)]' =$............

(a) $\{ \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1, 2\}, \phi \}$ (b) $\{ \{3\}, \{2,3\} \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

(c) $\{ \{3\}, \{2,3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \phi \}$ (d) $\{ \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\} \}$

21. જો $n(A) = 6$ અને $n(B) = 4$ તો $n(A-B)$ની ઓછામાં ઓછી કિંમત = ...

(a) 2 (b) 7 (c) 6 (d) 4

22. જો $A = \{ x \in R / f(x) = 0 \}$ અને $B = \{ x \in R / g(x) = 0 \}$ તો $A \cap B =$ ....

(a) ϕ (b) $\{ x \in R / f(x) = 0 \}$

(c) $\{ x \in R / f(x) + g(x) = 0 \}$ (d) $\{ x \in R / f^2(x) + g^2(x) = 0 \}$

23. જો $n(A) = 3, n(B) = 5$ અને $n(A \cap B) = 2$ તો $n[(A \times B) \cap (B \times A)] =$ ....

(a) 5 (b) 3 (c) 4 (d) 6

24. જો A અને B બે ગણો માટે $B - (B - A) =$..............

(a) $(A - B) - B$ (b) $A - (A - B)$ (c) A (d) B

25. જો $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 25\}$ અને $B = \{(x, y) / x^2 + 9y^2 = 144\}$ તો $A \cap B$ માં કેટલા સભ્યો હશે ?

(a) બે (b) એક (c) ત્રણ (d) ચાર

26. જો $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ $B = \{2, 4, \ldots 18\}$ અને N એ સાર્વત્રિક ગણ હોય તો $A' \cup (A \cup (B \cap B')) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(a) A (b) B (c) $A \cup B$ (d) N

27. જો U એ સાર્વત્રિક ગણ હોય અને $A \cup B \cup C = U$ હોય તો

$[(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A)]' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(a) $A \cup B \cup C$ (b) $A \cap B \cap C$

(c) $A \cup (B \cap C)$ (d) $A \cap (B \cup C)$

28. ગણ $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C'$ બરાબર

(a) $B \cap C'$ (b) $B \cup C'$ (c) $A \cap C$ (d) $A \cup C$

29. જો $A = \{(x, y) : y = e^x \; x \in R\}$ $B = \{(x, y) : y = e^{-x}, x \in R\}$ હોય તો

(a) $A \cap B = \phi$ (b) $A \cap B \neq \phi$

(c) $A \cup B = R$ (d) $A \cup B = A$

30. જો $U = [1, 5]$ અને $A = \{x / x \in N, x^2 - 6x + 5 = 0\}$ માટે $A' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(a) $\{1, 5\}$ (b) $(1, 5)$ (c) $[1, 5]$ (d) $[-1, -5]$

31. જો n સભ્યો ધરાવતા સાન્તગણ A પરનો સ્વવાચક સંબંધ R m ક્રમયુક્ત જોડ ધરાવે છે તો

(a) $m \geq n$ (b) $m \leq n$ (c) $m = n$ (d) એકપણ નહી

32. પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણ N પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(1 + x, 1 + x^2) / x \leq 5, x \in N\}$ માટે નીચેનામાંથી શું ખોટું છે ?

(a) $R = \{(2, 2), (3, 5), (4, 10), (5, 17), (6, 25)\}$

(b) R નો પ્રદેશ $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

(c) R નો વિસ્તાર $= \{2, 5, 10, 17, 26\}$

(d) (b) અને (c) સાચા છે.

33. સંખ્યાઓ પર $\leq$ સંબંધ નીચેના ગુણધર્મો ધરાવે છે.

(1) $a \leq a \;\; \forall \; a \in R$ (સ્વવાચકતા)

(2) જો $a \leq b$ અને $b \leq a$ તો $a = b \; \forall \; a, b, \in R$ (અસંમિતતા)

(3) જો $a \le b$ અને $b \le c$ તો $a \le c \ \forall \ a, b \in R$ (પરંપરિતતા)

આમાનો કયો ગુણધર્મ P(A) પરનો સંબંધ $\subset$ ધરાવે છે ?

(a) (i) અને (ii) (b) (i) અને (iii)

(c) (ii) અને (iii) (d) (i), (ii) અને (iii)

34. જો સંબંધ R એ પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ I પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયીત છે $(x, y) \in R$ તો અને તો જ $x^2 + y^2 = 9$ નીચેનામાંથી કયું ખોટું છે.?

(a) $R = \{(0, 3), (0, -3), (3, 0), (-3, 0)\}$ (b) R નો પ્રદેશ $= \{-3, 0, 3\}$

(c) R નો વિસ્તાર $= \{-3, 0, 3\}$ (d) એક પણ નહી

35. R એ વાસ્તવિક સંખ્યારેખા છે. $R \times R$ ના નીચેના ઉપયોગ માટે

$S = \{(x, y) : y = x + 1$ અને $0 < x < 2\}$

$T = \{(x, y) : x - y$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.$\}$

નીચેનામાંથી શું સાચું છે ?

(a) T એ R નો સામ્ય સંબંધ છે પરંતુ S નથી.

(b) S અથવા T એ R પરનો સામ્ય સંબંધ નથી.

(c) S અને T બંને R પરના સામ્ય સંબંધ છે.

(d) S એ R પરનો સામ્ય સંબંધ છે પરંતુ T નથી.

36. જો A એ 8 થી નાની યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે અને B એ 7 થી નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ હોય તો A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા = ...

(a) 2^9 (b) 9^2 (c) 3^2 (d) $2^9 - 1$

37. W એ અંગ્રેજી શબ્દકોષેનો શબ્દ દર્શાવે છે R પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ.

$R = \{(x, y) \in W \times W$ x અને y માં ઓછામાં ઓછો એક અક્ષર સામાન્ય હોય } તો R એ

(a) સ્વવાચક નથી, સંમિત અને પરંપરિત છે.

(b) સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત નથી.

(c) સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત નથી.

(d) સ્વવાચક, સંમિત નથી અને પરંપરિત છે.

38. જો ગણ A={a, b, c} પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R = {(a,b), (b,c)} છે. તો R માં ઓછામાં ઓછી કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ ઉમેરવી જોઈએ કે જેથી R સામ્ય સંબંધ બને.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

39. પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ N માટે $N \times N$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $(a, b)\ R\ (c, d) \Rightarrow a + d = b + c$ હોય તો R એ ફક્ત _____ છે.

(a) સ્વવાચક (b) સંમિત (c) પરંપરિત (d) સામ્ય સંબંધ

40. નીચેનામાંથી કયો સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે ?

(a) $a R_1 b \Leftrightarrow |a| = |b|$ (b) $a R_2 b \Leftrightarrow a \ge b$

(c) $a R_3 b \Leftrightarrow a$ એ b વડે વિભાજ્ય છે. (d) $a R_4 b \Leftrightarrow a < b$

41. $\{(x, y) / x, y \in I, x^2 + y^2 \le 4\}$ એ I પરનો સંબંધ હોય તો R નો પ્રદેશ

(a) $\{0, 1, 2\}$ (b) $\{-2, -1, 0\}$ (c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (d) $\{-2, -1\}$

42. m એ n નો ગુણક હોય એ પ્રકારનો પૂર્ણાંક m નો પૂર્ણાંક n સાથેનો સંબંધ ....

(a) સ્વવાચક અને સંમિત (b) સ્વવાચક અને પરંપરિત

(c) સંમિત અને પરંપરિત (d) સામ્ય સંબંધ

43. z પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલામાંથી કયો સંબંધ સામ્ય સંબંધ નથી ?

(a) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x \ge y$ (b) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x = y$

(c) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x - y$ એ 3નો ગુણક હોય (d) જો $|x - y|$ યુગ્મ તો $(x, y) \in S$

44. R પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે. $(x, y) \in S \Leftrightarrow x \cdot y \ge 0$ તો S એ ....

(a) સામ્ય સંબંધ છે. (b) ફક્ત સ્વવાચક

(c) ફક્ત સંમિત (d) ફક્ત પરંપરિત

45. ગણ $A = \{1,2,3\}$ પરના $(1,2)$ ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા .... હોય.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 8

46. $A = [-1, 1], B = [0, 1], C = [-1, 0]$

$S_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in A\}$

$S_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in B\}$

$S_3 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in C\}$

$S_4 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1, x \in B, y \in C\}$ તો.......

(a) S_1 વિધેયનો આલેખ નથી. (b) S_2 વિધેયનો આલેખ નથી.

(c) S_3 વિધેયનો આલેખ નથી. (d) S_4 વિધેયનો આલેખ નથી.

47. $m, n \in N$ માટે n/m એટલે કે n એ m નો અવયવ છે તો સંબંધ / એ........છે.

(a) સ્વવાચક અને સંમિત (b) પરંપરિત અને સંમિત

(c) સ્વવાચક, પરંપરિત, સંમિત (d) સ્વવાચ, પરંપરિત અને સંમિત નથી.

48. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ પરનો સંબંધ R નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. $R = \{(x, y) / |x^2 - y^2| < 16\}$ તો R =..........

(a) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 3)\}$ (b) $\{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (2, 4)\}$

(c) $\{(3, 3), (4, 3), (5, 4), (3, 4)\}$ (d) એકપણ નહિ

49. ગણ N પરનો વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(x, y)/x+2y=8\}$ નો પ્રદેશ =...........

(a) $\{2, 4, 8\}$ (b) $\{2, 4, 6, 8\}$ (c) $\{2, 4, 6\}$ (d) $\{1, 2, 3, 4\}$

50. જો $f:(-1,1) \to B$ નું વિધેય હોય અને $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ત્યારે જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો B= .... માં છે.

(a) $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (c) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (d) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

51. જો બહુપદીય વિધેય f(x) એ $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ નું સમાધાન કરે અને f(3) = 28 હોય તો $f(4) =$ ....

(a) 65 (b) 17 (c) 63 (d) 15

52. $f(x) = \frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7}$ નો વિસ્તાર = ...

(a) $[5, 9]$ (b) $(5, 9]$

(c) $(-\infty, 5] \cup [9, \infty)$ (d) $(-\infty, 5) \cup (9, \infty)$

53. વાસ્તવિક વિધેય f(x) એ સમીકરણ $f(x-y) = f(x)f(y) - f(3-x)f(3+y)$ નું સમાધાન કરતું હોય અને $f(0) = 1$ હોય તો $f(6-x) =$ ....

(a) f(x) (b) f(3) (c) f(3) + f(3-x) (d) -f(x)

54. જો $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ હોય તો $(f0\,f0\,f.....f)_{૧૭\ વખત}(x) =$ ....

(a) $\frac{x}{x-1}$ (b) x (c) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^{17}$ (d) $\frac{17x}{x-1}$

55. જો [x] એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય હોય તો

$\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{1000}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{2}{1000}\right] + ... + \left[\frac{1}{5} + \frac{999}{1000}\right]$ ની કિંમત =.........

(a) 199 (b) 201 (c) 202 (d) 200

56. જો $f(2x + 3y, 2x - 3y) = 24xy$ તો $f(x, y) =$ ....

(a) 2xy (b) $2(x^2 - y^2)$ (c) $x^2 - y^2$ (d) એકપણ નહી

57. જો $f : R \to R$ એ $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$ નું સમાધાન કરતું હોય અને $f(1) = \frac{3}{2}$ હોય તો $\sum_{r=1}^{n} f(r) = \dots\dots\dots$

(a) $\frac{3}{2}n(n+1)$ (b) $\frac{3(n+1)}{2}$ (c) $\frac{3n(n+1)}{4}$ (d) $\frac{3n}{4}$

58. જો $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & (x+1) \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & x(x-1)(x+1) \end{vmatrix}$ હોય તો

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) = \dots\dots\dots$

(a) 5 (b) 8 (c) 0 (d) 10

59. જો વિધેય $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ એ $f(x) = 2^{x(x-1)}$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો $f^{-1}(x) = \dots\dots\dots$

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\log_2 x}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4\log_2 x}\right)$ (d) $2^{\frac{1}{x(x-1)}}$

60. જો $f(x) = \frac{x - [x]}{1 + x - [x]}$ જ્યાં [x] એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે. તો f નો વિસ્તાર એ $= \dots\dots\dots$

(a) $[0, 1]$ (b) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ (c) $[0, 1)$ (d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

61. જો $f(x) = \sec x + \tan x, g(x) = \frac{\tan x}{1 - \sec(x)}$

વિધાન-1 g એ અયુગ્મ વિધેય છે.

વિધાન-2 f એ અયુગ્મ કે યુગ્મ વિધેય નથી.

(a) વિધાન-1 સાચુ છે (b) વિધાન-2 સાચુ છે

(c) વિધાન 1 અને 2 બંને સાચા છે. (d) વિધાન 1 અને 2 બંને ખોટા છે.

62. વિધેય $f(x) = \frac{\sqrt{-\log_{0.3}(x-1)}}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}$

(a) (2, 4) (b) $(-2, 4)$ (c) [2, 4) (d) [−2,4)

63. જો $f(x)=\frac{x\sin\alpha}{x+1}$ $x\neq -1, f\neq I, f(x)\neq 0$ અને $f(f(x))=x$ હોય તો Sin α ની કિંમત = ...

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 1 (d) -1

64. જો બે વિધેયો $f:R\rightarrow R, g:, R\rightarrow R$ માટે $f(x)=2x-3, g(x)=x^3+5$ હોય તો $(fog)^{-1}(x)=$

(a) $\left(\frac{x+7}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (b) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (c) $\left(\frac{x-2}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ (d) $\left(\frac{x-7}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

65. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|\cos x|+\cos x}}$ નો પ્રદેશ = ...

(a) $\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}, \frac{(4n+1)\pi}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}, \frac{(4n-1)\pi}{2}\right)$

(c) $(n\pi, (n+1)\pi)$ (d) $[-2n\pi, 2n\pi]$

66. જો $f(x)=\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ અને $g\left(\frac{5}{4}\right)=1$ તો $gof(x)=$............

(a) 1 (b) 2 (c) -2 (d) -1

67. જો $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ તો $f(f(\cos 2\theta))=$ ....

(a) $\tan 2\theta$ (b) $\sec 2\theta$ (c) $\cos 2\theta$ (d) $\cot 2\theta$

68. જો વિધેય $f(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$ આપેલ હોય તો $f(x+y)+f(x-y)=$ ....

(a) $f(x)+f(y)$ (b) $f(x)f(y)$ (c) $\frac{f(x)}{f(y)}$ (d) $\frac{1}{2}f(x)f(y)$

69. વિધેય $f(x)={}_{(5-x)}P_{(x-1)}$ નો વિસ્તાર = ...

(a) $\{1, 2\}$ (b) $\{1, 2, 3\}$ (c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (d) $\{1\}$

70. જો $f:R\rightarrow S$ $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય અને વ્યાપ્ત હોય તો S એ .... અંતરાલ છે.

(a) [0, 3] (b) [-1, 1] (c) [0, 1] (d) [-1, 3]

71. $f(x)=\frac{3}{4-x^2}+\log_{10}(x^3-x)$ વડે વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશ.......... છે.

(a) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ (b) $(-1, 0) \cup (1, 0)$

(c) $(-2, 2)$ (d) $(1, 2)\cup(2, \infty)$

72. $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 10^{-5}$ શક્ય થવા માટે........

(a) $-10^{-5} < x + 1 < 10^{-4}$ (b) $-(100001)^{-1} < x < (99999)^{-1}$

(c) $\frac{1}{10000} < x < 1$ (d) $(99999)^{-1} < x < (100001)^{-1}$

73. જો વિધેય $f : R \to R$ એ સમીકરણ

$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ દરેક $xy \in R$ અને $f(1) > 0$, નુ સમાધાન કરતું હોય તો

(a) $f(x) = x + \frac{1}{2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

(c) $f(x) = x + 1$ (d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

74. વિધેય $f(x) = \sqrt{\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{6 + 35x - 6x^2}}$ એ $[-1, 6]$ અંતરાલ હોય તો તેનો પ્રદેશ = ...

(a) $\left[-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ (b) $\left[\frac{5\pi}{3}, 6\right]$

(c) $\left[-\frac{1}{5}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 6\right]$ (d) $\left(\frac{-1}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 6\right)$

75. જો બે સાન્ત ગણો અનુક્રમે m અને n ઘટકો ધરાવતા હોય. પહેલા ગણના કુલ ઉપગણો એ બીજા ગણના કુલ ઉપગણો કરતાં 48 વધારે હોય અને $f = I_N$ તો $f(m+n)$ = ...

(a) 9 (b) 10 (c) 48 (d) 15

76. $f(x) = \cos^{-1}\left(\log_3 \frac{x}{4}\right)$ નો પ્રદેશ = ...

(a) $[4, 12]$ (b) $[0, 3]$ (c) $\left[\frac{4}{3}, 4\right]$ (d) $\left[\frac{4}{3}, 12\right]$

77. $f(x) = \log_{\frac{x-3}{x+4}} 5$ અને $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$ બંને વ્યાખ્યાયિત ના હોય તેવા x નો ગણ = ...

(a) $[-4,3]$ (b) $[-4,4]$ (c) $[0, 3]$ (d) $[0, 4]$

78. જો $f : R \rightarrow R$ એ $f(x) = x^4 + 2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય તો $f^{-1}(83)$ અને $f^{-1}(-2)$ ની કિંમત અનુક્રમે .... છે.

(a) $\phi, \{3, -3\}$ (b) $\{3, -3\}, \phi$

(c) $\{4, -4\}, \phi$ (d) $\{4, -4\}, \{2, -2\}$

79. વિધેય $f(x) = {}^{21-x}C_{3x-1} + {}_{(25-3x)}P_{(5x-3)}$ નો પ્રદેશ = ...

(a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\{2, 3\}$ (c) $\{2, 3, 4\}$ (d) $\{2, 3, 4, 5\}$

80. જો $x = \{a, b, c, d\}$ તો એવું એક-એક વિધેય $f : X \rightarrow X$ મેળવો કે જેથી $f(a) = a, f(b) \neq b$ $f(d) \neq d$

(i) $\{(a, a), (b, c), (c, d), (d, b)\}$ (iii) $\{(a, a), (b, d), (c, d), (d, c)\}$

(ii) $\{(a, a), (b, d), (c, c), (d, b)\}$

(a) ફક્ત (i) સાચુ (b) (i) અને (ii) સાચા (c) (i), (ii), (iii) સાચા (d) ફક્ત (iii) સાચુ છે.

81. જો $f(x) = \cos(\log x)$ હોય તો $f(x) \cdot f(y) - \dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{x}{y}\right) + f(xy)\right]$ ની કિંમત = ...

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 3

82. સમીકરણ $a^x + a^y = a$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિધેય f(x) નો પ્રદેશ .... છે.

(a) $0 \leq x \leq 2$ (b) $0 \leq x \leq 1$ (c) $-\infty \leq x \leq 0$ (d) $-\infty < x < 1$

83. વિધેય $f(x) = \max\{2 - x, 2 + x, 4\}; x \in R$ .... છે.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \geq 2 \\ 4 & -2 < x < 2 \\ 2+x & x \leq -2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 2-x & -2 < x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \\ 2+x & x \leq -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq -2 \\ 4 & x \geq 2 \\ 2+x & -2 < x < 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq -2 \\ 4 & -2 < x < 2 \\ 2+x & x \geq 2 \end{cases}$

84. $\frac{7^x - 7^{-x}}{7^x + 7^{-x}}$ નું પ્રતિવિધેય = ...

(a) $\frac{1}{2}\log_7 \frac{1+x}{1-x}$ (b) $\log_7 \frac{1-x}{1+x}$

(c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{1+x}$ (d) $\frac{1}{2}\log_e \frac{1+x}{1-x}$

85. જો $f(x) = \tan\sqrt{m}\,x$ જ્યાં $m = [P] = P$ અથવા P થી નાના પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક અને f નુ મુખ્ય આવર્તમાન π હોય તો P = ...

(a) $2 \le p \le 3$ (b) $1 \le p \le 2$ (c) $1 \le p < 2$ (d) $3 \le p \le 4$

86. વિધેય $f(x) = 3\sin\left[\sqrt{\frac{\pi^2}{9} - x^2}\right]$ ની કિંમત ધારણ કરતો સૌથી મોટો અંતરાલ (વિસ્તાર) ....

(a) $\left[0, 3\sqrt{3}\right]$ (b) $\left[\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ (c) $\left[0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ (d) $\left[\frac{-3\sqrt{3}}{2}, 0\right]$

87. $f(x) = \log_5\left[\log_6\left[\log_8 x\right]\right]$ નો પ્રદેશ

(a) $x > 4$ (b) $x > 8$ (c) $x < 8$ (d) $x < 4$

88. જો $g(x) = 1 + x - [x]$ અને $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

હોય તો દરેક x માટે f(g(x)) = ...

(a) x (b) 1 (c) f(x) (d) g(x)

89. વિધેય $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$ નો પ્રદેશ ....

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $(-\infty, 0)$ (d) $(-\infty, \infty) - \{0\}$

90. જો $f(x) = 2x$ અને g એ તદેવ વિધેય હોય તો

(a) $fog(x) = g(x)$ (b) $(g+g)(x) = g(x)$

(c) $(fog)(x) = (g+g)(x)$ (d) $(fog)(x) = (f+f)(x)$

91. જો વિધેય $f(x)=\frac{1}{2}-\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right):(-1<x<1)$ અને $g(x)=\sqrt{3+4x-4x^2}$ તો gof નો પ્રદેશ ....

(a) $(-1,1)$ (b) $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (c) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ (d) $\left[-\frac{1}{2},-1\right]$

92. $f(x)=6^x+3^x+6^{-x}+3^{-x}+2$ નો વિસ્તાર........ નો ઉપગણ છે.

(a) $(-\infty,-2)$ (b) $(-2,3)$ (c) $(6,\infty)$ (d) $[6,\infty)$

93. જો f એ $2f(x)+f(1-x)=x^2, x\in R$ નુ સમાધાન કરે તો $f(x)=$.............

(a) $\frac{x^2+2x-1}{6}$ (b) $\frac{x^2+4x-1}{3}$ (c) $\frac{x^2+2x-1}{3}$ (d) $\frac{x^2-3x+1}{6}$

94. જો વિધેય f એ સમીકરણ $3f(x)+2f\left(\frac{x+59}{x-1}\right)=10x+30$, $x\neq 1$ નું સમાધાન કરે તો $f(7)=$ ....

(a) 8 (b) 4 (c) -8 (d) 11

95. જો [x] એ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય હોય અને $\{x\}=x-[x]$ તો $f(x)=[x]+\sum_{r=1}^{100}\frac{\{x+r\}}{100}=$ ....

(a) 4x (b) 2x (c) $4[x]+100\{x\}$ (d) x

96. $g:R\to R$ $g(x)=3+\sqrt[3]{x}$ અને $f(g(x))=2-\sqrt[3]{x}+x$ તો $f(x)=$................

(a) x^3-x^2+x-5 (b) $x^3-9x^2+26x+22$

(c) $x^3+9x^2-26x+5$ (d) x^3+x^2-x+5

97. નીચેના પૈકી કયા સંબંધો એક-એક વિધેય છે ?

(a) $R_1=\{(x,y)/x^2+y^2=1, x, y\in R\}$ (b) $R_2=\{(x,y)/y=e^{x^2}, x, y\in R\}$

(c) $R_3=\{(x,y)/y=x^2-3x+3, x, y\in R\}$ (d) એકપણ નહી

98. $f:R\to R$ $f(x)=x^2+1$ તો $f^{-1}(-2)\cup f^{-1}(17)=$..........

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{\pm 1,\pm 4\}$ (c) $\{4\}$ (d) $\{1, 4\}$

99. $f(x)=\sin^{-1}\left\{4-(x-7)^3\right\}^{\frac{1}{5}}$ તો $f^{-1}(x)=$................

(a) $\{7-\sin^5 x\}^{\frac{1}{3}}$ (b) $7+\{4-\sin^5 x\}^{\frac{1}{3}}$

(c) $7+(4+\sin^5 x)^{\frac{1}{3}}$ (d) $(7+\sin^5 x)^{\frac{1}{3}}$

100. વિભાગ A માં વિધેય અને વિભાગ B માં તેના પ્રતિવિધેય આપેલ છે.

નીચેનામાંથી શું સાચુ છે. ?

	A		B
(1)	$f(x) = 1 - 2^{-x}$	(A)	$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
(2)	$f(x) = \sin(\tan^{-1} x)$	(B)	$f^{-1}(x) = -\log_2 (1-x)$
(3)	$f(x) = 2x + 3$	(C)	$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

નીચેનામાંથી શું સાચુ છે. ?

(a) (1)A (2)B (3)C

(b) (1)B (2)C (3)A

(c) (1)B (2)A (3)C

(d) (1)C (2)B (3)A

એકમ - 2

દ્વિઘાત સમીકરણ

અગત્યના મુદ્દા

* વ્યાપક દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ છે.

  જ્યાં $(a \neq 0)$, a, b, c $\in R$

* દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ

  $$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

* વિવેચક ને Δ અથવા D વડે દર્શાવાય છે.

  જ્યાં $\Delta = b^2 - 4ac$

* બિજોના પ્રકાર

  (i) જો $\Delta > 0$ તથા પૂર્ણવર્ગ હોય તો બીજ સંમેય અને ભિન્ન હોય.

  (ii) જો $\Delta > 0$ પણ પૂર્ણવર્ગ ન હોય તો બીજ ભિન્ન અને અસંમેય હોય.

  (iii) જો $\Delta = 0$ તો બીજ વાસ્તવિક અને સમાન હોય.

  (iv) જો $\Delta < 0$, તો બંને બીજ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ હોય.

* બીજોનો સરવાળો અને ગુણાકાર

  જો α અને β બિજો હોય તો

  $$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

* α અને β બીજવાળુ દ્વિઘાત સમીકરણ

  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

સામાન્ય બીજ :

ધારો કે $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ બે ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણ છે. $(a_1, a_2 \neq 0)$

(i) જો એક બીજ સામાન્ય હોય તો $(c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$

(ii) જો બંને બીજો સામાન્ય હોય તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

સીમાંત કિંમત :

(i) જો $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ તો $x \in (\alpha, \beta)$

(ii) જો $(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$ તો $x \in [\alpha, \beta]$

(iii) જો $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ તો $x \notin (\alpha, \beta)$

(iv) જો $(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0$ તો $x \notin [\alpha, \beta]$

બીજોનું સ્વરૂપ :

$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0)$ $a, b, c \in R$ માટે

(i) જો $a + b + c = 0$ તો તેનું એક બીજ 1 હોય.

(ii) જો a અને c અસમચિહ્ન હોય તો બીજ પરસ્પર વિરોધી હોય.

(iii) જો $\alpha = -\beta$ તો $b = 0, ac > 0$

(iv) જો $\alpha = \frac{1}{\beta}$ તો અને તો જ $c = a$

(v) જો $ax^2 + bx + c = 0$ એક બીજ સંકર સંખ્યા $p + iq$ હોય તો બીજુ બીજ $p - iq$ તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા જ હોય.

(vi) જો $ax^2 + bx + c = 0$ a, b અને c સંમેય હોય તથા એક બીજ $p + \sqrt{q}$, હોય તો બીજુ બીજ $p - \sqrt{q}$ જ હોય. જયાં q પૂર્ણવર્ગ નથી.

ત્રિઘાત સમીકરણ :

જો α, β, γ એ ત્રિઘાત સમીકરણ

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \; (a \neq 0)$ નાં બીજો હોય તો,

(i) $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

(ii) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

(iii) $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

α, β, γ બીજવાળુ ત્રિઘાત સમીકરણ

$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\, x - \alpha\beta\gamma = 0$

દ્વિઘાત બહુપદીનાં મહત્તમ અને ન્યુનતમ મૂલ્યો

$P(x) = ax^2 + bx + c \; (a \neq 0)$ આપેલ બહુપદી છે.

(i) જો $a > 0$, તો $p(x)$નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ $\frac{4ac - b^2}{4a}$ મળે.

(ii) જો $a < 0$, તો $p(x)$નું મહત્તમ મૂલ્ય $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ $\frac{4ac - b^2}{4a}$ મળે.

પ્રશ્ન બેન્ક

1. જો સમીકરણ $2x^2+5x-k=0$ નો વિવેચક 81 હોય તો k = ________

(a) 5 (b) 7 (c) -7 (d) 2

2. સમીકરણ $\sqrt{5}x^2-3\sqrt{3}x-2\sqrt{5}=o$ નો વિવેચક ________ છે.

(a) 67 (b) 76 (c) -67 (d) -76

3. k ની કઈ કિંમત માટે સમીકરણ $k\,x^2+1 = k\,x + 3\,x - 11\,x^2$ ના બીજો વાસ્તવિક અને સમાન છે.

(a) {-11,-3} (b) {5,7} (c) {5,-7} (d) {-5,-7}

4. સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજોનો સરવાળો તેમના વ્યસ્તના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય તો bc^2, ca^2, ab^2 ________ શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) સમગુણોત્તર (c) સ્વરિત (d) એકપણ નહી

5. જો સમીકરણ $x^2 - m(2x-8) - 15=0$ ના બીજો સમાન હોય તો m = ____

(a) 3,-5 (b) -3,5 (c) 3,5 (d) -3,-5

6. સમીકરણ (x+1) (x+2) (x+3) (x+4) = 120 નો ઉકેલ ગણ ________ છે.

(a) $\left\{-6,1\frac{-5\pm\sqrt{39i}}{2}\right\}$ (b) $\left\{6,-1\frac{-5\pm\sqrt{39i}}{2}\right\}$

(c) $\left\{-6,-1\frac{-5\pm\sqrt{39i}}{2}\right\}$ (d) $\left\{6,1\frac{-5\pm\sqrt{39i}}{2}\right\}$

7. સમીકરણ $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 5x + 1 = o$ નો ઉકેલ ગણ ________ છે.

(a) $\left\{3\pm2\sqrt{2},\frac{-1\pm\sqrt{3i}}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{3\pm2\sqrt{2}}{2},-1\pm\sqrt{3i}\right\}$

(c) $\left\{-3\pm2\sqrt{2},\frac{1\pm\sqrt{3i}}{2}\right\}$ (d) $\left\{\frac{-3\pm2\sqrt{2}}{2},1\pm\sqrt{3i}\right\}$

8. સમીકરણ $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(a\neq b)$ નો ઉકેલ ગણ ______ છે.

(a) {a-b, O} (b) $\left\{\frac{a}{b},o\right\}$ (c) {a+b, o} (d) {ab, o}

9. જો α & β સમીકરણ $x^2+13x+8 = 0$ ના બીજો હોય તો $\alpha^4+\beta^4$=______

(a) 23281 (b) 23218 (c) 23128 (d) 23182

10. જો બીજોના વર્ગોનો સરવાળો 40 અને તેમના ઘનનો સરવાળો 208 હોય તથા સહગુણકો સંમેય હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ ________ છે.

(a) $x^2+4x+12=0$ (b) $x^2-4x-12=0$ (c) $x^2-4x+12=0$ (d) $x^2+4x-12=0$

11. જો સમીકરણ $2x^2 + 16x + 3k = 0$ ના બીજો 4:5 પ્રમાણમાં છે. તો k=____

(a) $\frac{2560}{243}$ (b) $\frac{243}{2560}$ (c) $\frac{-2560}{243}$ (d) $\frac{-243}{2560}$

12. જો α અને β સમીકરણ $x^2-x+1 = 0$ ના બીજો હોય તો $\alpha^{2009} + \beta^{2009} =$ ______

(a) -1 (b) 1 (c) -2 (d) 2

13. જો સમીકરણ $ax^2-6x+c+9=0$ ($a, c \in R, a \neq 0$) નું એકબીજ $3-5i$ હોય તો a=___ c=____

(a) 1,25 (b) -1,25 (c) 1,-25 (d) -1,-25

14. જો સમીકરણ $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ના બીજો સમાન હોય તો a, b, c ____ શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) સમગુણોત્તર (c) સ્વરિત (d) એકપણ નહી

15. જો સમીકરણ $bx^2+cx + a=0$ ના બીજો કાલ્પનિક હોય તો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે પદાવલિ $3b^2x^2 + 6bc\,x + 2c^2$ ____

(a) $< 4ab$ (b) $> -4ab$ (c) $< -4ab$ (d) $> 4ab$

16. જો α & β સમીકરણ $4x^2 + 3x + 7=0$ ના બીજો હોય તો $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=$ ________

(a) $\frac{-27}{64}$ (b) $\frac{225}{343}$ (c) $\frac{63}{16}$ (d) $\frac{63}{64}$

17. જો સમીકરણ $4x^2-6x+p=0$ નું એકબીજ $q+2i$ હોય જ્યાં $p,q \in R$ તો p+q =_____

(a) 10 (b) 19 (c) -24 (d) -32

18. જો દ્વિઘાત સમીકરણ $(2k+3)x^2 + 2(k+3)x + (k+5) = 0$ $\left(k \in R, k \neq \frac{-3}{2}\right)$ ના બીજો સમાન હોય તો K =_____

(a) 1,6 (b) -1,-6 (c) -1,6 (d) 1, -6

19. $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ અને $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$ ના બીજોવાળુ દ્વિઘાત સમીકરણ ________ છે.

(a) $28x^2 - 20x + 1 = 0$ (b) $20x^2 - 28x + 1 = 0$

(c) $x^2 - 20x + 28 = 0$ (d) $x^2 - 28x + 20 = 0$

20. જો સમીકરણ $a^2x^2+ bx + c = 0$ ના બીજોનો વર્ગો એ સમીકરણ $a^2+x^2+b^2x + c^2= 0$ ના બીજો હોય તો, a,b,c ________ શ્રેણીમાં છે. ($a,b,c, \in R - \{0\}$)

(a) સમગુણોત્તર (b) સ્વરિત (c) સમાંતર (d) એકપણ નહી

21. સમીકરણ $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$ નો ઉકેલગણ _____

(a) $\left\{-1,\frac{-1}{3},-3\right\}$ (b) $\left\{1,\frac{1}{3},3\right\}$ (c) $\left\{-1,\frac{1}{3},3\right\}$ (d) $\left\{1,\frac{-1}{3},3\right\}$

22. જો સમીકરણ $x^2-px+q=0$ ના બીજોનો તફાવત 1 હોય તો ______

(a) $p^2+4q^2=(1+2q)^2$ (b) $q^2+4p^2=(1+2q)^2$

(c) $p^2-4q^2=(1+2q)^2$ (d) $q^2+4p^2=(1-2q)^2$

23. જો સમીકરણ $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{k}$ ના બીજોનો સરવાળો શૂન્ય હોય તો તેના બીજોનો ગુણાકાર ___________ છે.

(a) $\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$ (b) $\frac{-1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

(c) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (d) એકપણ નહી

24. સમીકરણ $\ell x^2+mx+n+0$, $\ell\neq o$ માટે જો α અને β બીજો હોય તથા $m^3+\ell^2 n+\ell n^2=3\ell mn$ તો

(a) $\alpha=\beta^2$ (b) $\alpha^3=\beta$ (c) $\alpha+\beta=\alpha\beta$ (d) $\alpha\beta=1$

25. જો $b^2=ac$, તથા સમીકરણ $ax^2+2bx+c=0$ અને $dx^2+2ex+f=0$ ના બીજો સામાન્ય હોય તો $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{b}$, $\frac{f}{c}$ _______ શ્રેણીમાં હોય.

(a) સમાંતર (b) સમગુણોત્તર (c) સ્વરિત (d) એકપણ નહી

26. a, b, $\in R$, $a\neq b$ સમીકરણ $(a-b)x^2+5(a+b)x-2(a-b)=0$ ના બીજો _______

(a) વાસ્તવિક અને ભિન્ન (b) સંકર સંખ્યા

(c) વાસ્તવિક અને સમાન (d) એકપણ નહી

27. સમીકરણ $x=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12.......upto\infty}}}$ નો ઉકેલ ગણ _______

(a) 4 (b) -4 (c) 3 (d) -3

28. સમીકરણ $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x^2-3}+\left(5-2\sqrt{6}\right)^{x^2-3}=10$ નો ઉકેલ ગણ ________

(a) $\left\{\pm2,\pm\sqrt{2}\right\}$ (b) $\left\{\pm3,\pm\sqrt{3}\right\}$ (c) $\left\{\pm5,\pm\sqrt{5}\right\}$ (d) $\left\{\pm6,\pm\sqrt{6}\right\}$

29. જેમના બીજો સમીકરણ $5x^2-3x+3 = 0$ ના બીજો કરતાં 3 ગણા હોય તો તેવું દ્વિઘાત સમીકરણની રચના કરો.

(a) $5x^2 - 9x + 27 = 0$ (b) $5x^2 + 9x + 27 = 0$

(c) $5x^2 - 9x - 27 = 0$ (d) $5x^2 + 9x - 27=0$

30. સમીકરણ $2x^2 + 16x + 3k = 0$ ના બીજોના વર્ગોનો સરવાળો 10 હોય તો k = ______

(a) 12 (b) 15 (c) 18 (d) 21

31. સમીકરણ $x^2+k^2 = (2k+2)\,x$, $k \in R$ના બીજો કાલ્પનિક હોય તો __________

(a) $k = \frac{-1}{2}$ (b) $k > \frac{-1}{2}$ (c) $k < \frac{-1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2} < k < o$

32. જો સમીકરણ $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ ના બંને બીજો -2 કરતાં મોટા અને 4 કરતાં નાના હોય તો m ની કિંમત .... અંતરાલમાં મળે.

(a) $m > 3$ (b) $-1 < m < 3$ (c) $1 < m < 4$ (d) $-2 < m < o$

33. જો $o < x < \pi$ અને $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$ તો tanx ________

(a) $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ (b) $-\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ (c) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ (d) $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

34. જો સમીકરણ $x^2 + ax + 1 = 0$ ના બીજોનો તફાવત $\sqrt{5}$ કરતાં નાનો હોય તો a ની કિમતનો શક્ય અંતરાલ __________

(a) (-3, 3) (b) $(-3, \infty)$ (c) $(3, \infty)$ (d) $(-\infty, -3)$

35. સમીકરણ $x^2 - 6x + a = 0$ અને $x^2 - cx + 6 = 0$ નું એક બીજ સામાન્ય હોય તથા પ્રથમ અને બીજા સમીકરણના બીજા બીજનો ગુણોત્તર 4:3 ના પ્રમાણમાં હોય તો સામાન્ય બીજ __________ છે.

(a) 1 (b) 4 (c) 3 (d) 2

36. હાર્દિક અને શિવાંગ દ્વિઘાત સમીકરણ ઉકેલે છે. હાર્દિક અચળ પદ લખવામાં ભૂલ કરે છે. અને (4,3) ઉકેલ મેળવીને પૂરો કરે છે. જ્યારે શિવાંગ x નો સહગુણક લખવામાં ભૂલ કરે છે. અને ઉકેલ (3,2) મેળવે તો તે સમીકરણનોના સાચા ઉકેલો __________ છે.

(a) -4, 3 (b) 6, 1 (c) 4, 3 (d) -6, -1

37. જો ΔABC માં $m\angle C = \frac{\pi}{2}$ જો $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$ અને $\tan\left(\frac{B}{2}\right)$ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq o$ ના બીજો હોય તો __________

(a) b=a+c (b) b=c (c) c=a+b (d) a=b+c

38. બે સંખ્યાનો સમાંતર મધ્યક 9 અને ગુણોત્તર મધ્યક 4 તો તે સંખ્યા જેના બીજ હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ _____ છે.

(a) $x^2 + 18x + 16 = 0$ (b) $x^2 - 18x + 16 = 0$

(c) $x^2 + 18x - 16 = 0$ (d) $x^2 - 18x - 16 = 0$

39. જો સમીકરણ $x^2 + px + 12 = 0$ નું એકબીજ 4 છે જ્યારે સમીકરણ $x^2 + px + 1 = 0$ ના બીજો સમાન હોય તો q = _________

(a) $\frac{49}{4}$ (b) 12 (c) 3 (d) 4

40. સમીકરણ $x^2 - 3|x| - 10 = 0$ ના બીજોનો સરવાળો _______ છે.

(a) 3 (b) -3 (c) -10 (d) 0

41. સમીકરણ $x^2 - 5x + 4 = 0$ ના બીજોનો સમાંતર મધ્યક અને ધન સમગુણોત્તર મધ્યક જેમના બીજો હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ ________

(a) $x^2 + 9x + 5 = 0$ (b) $2x^2 + 9x + 10=0$

(c) $2x^2 - 9x + 10=0$ (d) $2x^2 - 9x - 10=0$

42. $(x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2$ ની x આગળ ન્યુનત્તમ કિંમત ________

(a) $\frac{a+b+c}{3}$ (b) $-\frac{a+b+c}{3}$ (c) $\sqrt{abc}$ (d) $a^2 + b^2 + c^2$

43. સમીકરણ $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) -16\left(x+\frac{1}{x}\right) + 26 = 0$ નું સમાધાન કરતી x વાસ્તવીક કિંમતોની સંખ્યા ________ છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

44. સમીકરણ $\sqrt{\frac{x}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \frac{3}{2}$ નું સમાધાન કરતી માત્ર x ની કિંમત ________ છે.

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{-8}{3}$ (c) -4 (d) 4

45. $|x-5|^2 - |x-5| - 6 = 0$ ના બધા બીજોનો સરવાળો _______ છે.

(a) 10 (b) 6 (c) 0 (d) એકપણ નહી

46. જો $\alpha + \beta = 5$, $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ અને $\beta^2 = 5\beta - 3$ તો $\frac{\alpha}{\beta}$ and $\frac{\beta}{\alpha}$ બીજોવાળું દ્વિઘાત સમીકરણ _____

(a) $3x^2 - 19x + 3 = 0$ (b) $x^2 + 5x - 3 = 0$

(c) $x^2 - 5x + 3=0$ (d) $3x^2 - 25x + 3 = 0$

47. જો $2a + 3b + 6c = 0$ તો સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું ઓછામાં ઓછું એકબીજ ______ અંતરાલમાં આવેલું છે.

(a) (2,3) (b) (1, 2) (c) (0, 1) (d) (1, 3)

48. સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ ના બીજો બે ક્રમિક પૂર્ણાંકો હોય તો $b^2 - 4c$ = __________

(a) -2 (b) -3 (c) 3 (d) 1

49. સમીકરણ $2\ Sin^2 x + 5\ Sin\ x - 3 = 0$ નું સમાધાન કરતી $[0, 3\pi]$ અંતરાલમાં આવતી x ની કિંમતોની સંખ્યા ....છે.

(a) 6 (b) 1 (c) 2 (d) 4

50. સમીકરણ $x^2 - (a-2)\ x - a - 1 = 0$ માટે બીજોના વર્ગોનો સરવાળો ન્યુનતમ થાય તેવી a ની કિંમત શોધો.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

51. જો α, β સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજો હોય તો $(\alpha a + b)^{-2} + (\beta a + b)^{-2} =$ __________

(a) $\frac{b^2 - 4ac}{a^2c^2}$ (b) $\frac{b^2 - ac}{a^2c^2}$ (c) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$ (d) $\frac{b^2 + 2ac}{a^2c^2}$

52. જો tanA અને tanB $x^2 - px + q = 0$ ના બીજો હોય તો $\cos^2 (A+B) =$ ________

(a) $\frac{(1-q)^2}{p^2 + (1-q)^2}$ (b) $\frac{p^2}{p^2 + (1-q)^2}$

(c) $\frac{(1-q)^2}{p^2 + q^2}$ (d) $\frac{p^2}{p^2 + q^2}$

53. સમીકરણ $27^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 2.8^{\frac{1}{x}}$ ના વાસ્તવિક બીજોની સંખ્યા __________

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0

54. જો $8x^2 - 3x + 27 = 0$ ના બે બીજો α, β હોય તો $\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} =$ __________

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{2}$ (c) 4 (d) $\frac{1}{4}$

55. પ્રત્યેક $x \in R$, માટે પદાવલિ $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 7}$ ની કિંમત _______ માં છે.

(a) [2, 3] (b) [0, 1] (c) [1, 2] (d) [0, 2]

56. જો $0 \le x \le \pi$ અને $16^{Sin^2 x} + 16^{Cos^2 x} = 10$ તો $x =$ _______

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

57. જો $f(x) = 2x^3 + mx^2 - 13x + n$ અને $(x-2), (x-3)$, $f(x)$ ના અવયવો હોય તો $(m, n) =$ _______

(a) (-5, -30) (b) (-5, 30) (c) (5, 30) (d) (5, -30)

58. $a^{\log_a (x^2 - 4x + 5)} = 3x - 5$ નો ઉકેલ ગણ ______

(a) {5, -2} (b) {-5, 2} (c) {-5, -2} (d) {5, 2}

59. જો α, β એ $x^2 + px + q = 0$ અને $x^{2n} + p^n x^n + q^n = 0$ ના બીજો છે. અને જો $\frac{\alpha}{\beta}$ એ $x^n + 1 + (x+1)^n = 0$ નું એકબીજ છે. તો n _________ છે.

(a) યુગ્મ પૂર્ણાંક (b) અયુગ્મ પૂર્ણાંક

(c) સંમેય પરંતુ પૂર્ણાંક નથી. (d) આમાનું એકપણ નહી

60. જો સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ ના બીજો α, β તથા $x^2 + rx + s = 0$, ના બીજો γ, δ હોય તો $(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2 + (\beta - \delta)^2$ __________ છે.

(a) $2(p^2 + r^2 - pr + 2q - 2s)$ (b) $2(p^2 + r^2 - pr + 2q + 2s)$

(c) $2(p^2 + r^2 - pr - 2q - 2s)$ (d) $2(p^2 + r^2 + pr - 2q + 2s)$

61. સમીકરણ $(5-x)^4 + (4-x)^4 = (q-2x)^4$ ના __________

(a) બધા બીજો કાલ્પનિક છે. (b) બધા બીજો વાસ્તવિક છે.

(c) બે બીજો કાલ્પનિક અને બે બીજો વાસ્તવિકછે. (d) આમાનું એકપણ નહી

62. જો α, β, સમીકરણ $24x^2 - 8x - 3 = 0$ ના બીજો $S_n = \alpha^n + \beta^n$ હોય તથા $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} S_r =$ ....

(a) $\frac{14}{13}$ (b) $\frac{-14}{13}$ (c) $\frac{7}{13}$ (d) $\frac{-7}{13}$

63. જો $ax + by = 1$, અને $px^2 + qy^2 - 1 = 0$ ને માત્ર એકજ બીજ હોય તો

(a) $\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} = 1$ (b) $x = -\frac{a}{p}$ (c) $x = \frac{b}{q}$ (d) None of these

64. પ્રત્યેક વાસ્તવિક સમીકરણ $\ell \cos 2x + m \sin^2 x + n = 0$ (l, m, n) નું સમાધાન કરતી ત્રિપુટી ની સંખ્યા ....

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) અનંત

65. જો $f(x) = x - [x], x \in R - \{0\}$ જ્યાં $[\ x\ ] = x$ કરતાં મોટો ન હોય તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક તો $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ના ઉકેલોની સંખ્યા .... છે.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) અનંત

66. જો સમીકરણ $x^2 - 5kx + 4e^{4\log k} - 3 = 0$ ના બીજોનો ગુણાકાર 61 તો k = ...

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

67. જો $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ, એ બીજા બીજના n ઘાત જેટલું થાય તો $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n c)^{\frac{1}{n+1}} =$ ....

(a) $-a$ (b) $-b$ (c) $-c$ (d) એકપણ નહિ

68. $\log_{10} a + \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt[a]{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots = b$ તથા $\dfrac{\sum_{n=1}^{b}(2n-1)}{\sum_{n=1}^{b}(3n+1)} = \dfrac{20}{7\log_{10}^{a}}$ તો a = ...

(a) 10^5 (b) 10^4 (c) 10^3 (d) 10^2

69. જો સમીકરણ $x^2 - px + r = 10$ O ની બીજો α, β તથા $x^2 - qx + r = 0$ ના બીજો $\dfrac{\alpha}{2}, \alpha\beta$ છે. તો r = ...

(a) $\frac{2}{9}(p-q)(2q-p)$ (b) $\frac{2}{9}(q-p)(2p-q)$

(c) $\frac{2}{9}(q-2p)(2q-p)$ (d) $\frac{2}{9}(2p-q)(2q-p)$

70. $x \in R$ માટે $3^{72}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$ તો...

(a) $x \in [0, 64]$ (b) $x \in (0, 64)$ (c) $x \in [0, 64]$ (d) એકપણ નહિ

71. જો સમીકરણ $x^2 - 2ax + a^2 + a - 3 = 0$ ના બોજો વાસ્તવીક અને 3 કરતા નાના હોય તો..............

(a) $a < 2$ (b) $2 \le a \le 3$ (c) $3 < a \le 4$ (d) $a > 4$

72. b ની કઈ કિંમત માટે સમીકરણ $x^2 + bx - 1 = 0$ અને $x^2 + x + b = 0$ નું એક બીજ સામાન્ય હોય.

(a) $-\sqrt{2}$ (b) $-i\sqrt{3}$ (c) $i\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{2}$

73. જો a,b,c સંમેય સંખ્યાઓ છે તો સમીકરણ $abc^2x^2 + 3a^2cx + b^2cx - 6a^2 - ab + 2b^2 = 0$ ના બીજો ....

(a) કાલ્પનીક (b) સમાન (c) સંમેય (d) અસંમેય

74. જો a, b, c $\in$ R અને સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ અને $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ બે બીજો સામાન્ય (સમાન) હોય તો

(a) $a = b \ne c$ (b) $a = b = -c$ (c) $a = b = c$ (d) એકપણ નહિ

75. જો સમીકરણો $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ અને $6k(2x^2 + 1) + px + 4x^2 - 2 = 0$ બે બીજો સમાન હોય તો $2r - P$ ની કિંમત ....

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) એકપણ નહિ

76. જો α & β સમીકરણ $x^2 + x + 1 = 0$ ના બીજો હોય તો α^{19} & α^7 બીજોવાળુ સમીકરણ .... છે.

(a) $x^2 - x + 1 = 0$ (b) $x^2 + x + 1 = 0$ (c) $x^2 + x + 3 = 0$ (d) $x^2 - x + 3 = 0$

77. જો $\alpha \& \beta$ સમીકરણ $x^2 + nx - c = 0$ ના બીજો હોય તો b અને c જેના બીજો હોય તેવુ સમીકરણ .... છે.

(a) $x^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)x - \alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$ (b) $x^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)x + \alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$

(c) $x^2 - (\alpha + \beta + \alpha\beta)x - \alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$ (d) $x^2 + 2x - \beta = 0$

78. જો સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજો m : n ગુણોત્તરમાં હોય તો, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} = ...$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) એકપણ નહિ

સૂચનો

1. Ans. (b)

$2x^2 + 5x - k = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 81$

$\therefore\ 25 - 8k = 81 \qquad \therefore\ k = 7$

2. Ans. (a)

$\sqrt{5}\,x^2 - 3\sqrt{3}x - 2\sqrt{5} = 0$

$a = \sqrt{b},\ b = -3\sqrt{3},\ c = -2\sqrt{5}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 27 - 4(\sqrt{5})(-2\sqrt{5}) = 67$

3. Ans. (c)

$kx^2 + 1 = kx + 3x - 11x^2$

$\therefore\ (k + 11)x^2 - (k + 3)\,x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= k^2 + 2k - 35$

બીજો વાસ્તવીક અને સમાન છે. $\quad \Delta \geq 0$

$k^2 + 2k - 35 \geq 6$

$\therefore\ |k + 1| \geq 6$

$\therefore\ -6 \geq k + 1 \geq 6$

$\therefore\ k \leq -7,\ k \geq 5$

$\therefore\ k = -7,\ k = 5 \qquad k \in \{-7, 5\}$

4. Ans. (a)

$ax^2 + bx + c = 0$

ધારોકે α, β સમીકરણના બીજો છે.

$\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a},\ \ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

વળી, $\alpha + \beta = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$

$$\alpha + \beta = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

$$\therefore\ a^2c = \frac{ab^2 + bc^2}{2}$$

$\therefore$ ab^2, a^2c, bc^2 સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

5. Ans. (c)

$$x^2 - m\,(2x - 8) - 15 = 0$$

$$\therefore\ x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$$

બીજો સમાન હોવાથી $\Delta = 0$

$$\therefore\ 4m^2 - 32m + 60 = 0$$

$$\therefore\ m = 5,\ m = 3$$

6. Ans. (a)

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$$

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120$$

ધારોકે $x^2 + 5x = m$

$$(m+4)(m+6) = 120 = 10 \times 12$$

$$m + 4 = 10 \Rightarrow m = 6$$

$$m + 4 = -12 \Rightarrow m = -16$$

$x^2 + 5x = 6,$ $\qquad$ $x^2 + 5x = -16$

$\therefore x^2 + 5x - 6 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 5x + 16 = 0$

$x = -6,\ x = 1$ $\qquad$ $\Delta = -39 < 0$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{39}\ i$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{39}\, i}{2}$$

ઉકેલ ગુણ $\left\{-6, 1, \frac{-5 \pm \sqrt{39}\, i}{2}\right\}$

7. Ans. (a)

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x - 4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

ધારોકે $x + \frac{1}{x} = m$ $\quad\quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2$

$\therefore m^2 - 5m - 6 = 0$ $\quad\quad \therefore m = 6, \ m = -1$

જો $m = 6 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 6$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

જો $m = -1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1$ $\quad\quad$ ઉકેલ ગણ

$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ $\quad\quad \left\{3 \pm 2\sqrt{2}, -1 \frac{\pm \sqrt{3}\, i}{2}\right\}$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

8. Ans. (c)

$$\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ (a \neq b)$$

ધારોકે $\frac{x-a}{x-b} = m$

$$\therefore m + \frac{1}{m} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$\therefore\ abm^2 - (a^2 + b^2)m + ab = 0$

$\therefore\ (bm - a)(am - b) = 0$

$m = a/b, m = b/a$

જો $m = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow x = 0$

જો $m = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x-a}{x-b} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow x = a + b$

ઉકેલ ગણ $\{0, a + b\}$

9. Ans. (a)

$x^2 + 13x + 8 = 0$

$\alpha + \beta = -13,\ \alpha\beta = 8$

$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 23281$

10. Ans. (b)

ધારોકે બે બીજો α, β છે.

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 40,\ \alpha^3 + \beta^3 = 208$ આપેલ છે.

ધારોકે $\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = n$

$\alpha^2 + \beta^2 = 40 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 40$

$\Rightarrow m^2 - 2n = 40$

$\Rightarrow n = \frac{m^2 - 40}{2}$ ...(1)

$\alpha^3 + \beta^3 = 208 \Rightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 208$

$\Rightarrow m(40 - n) = 208$ ...(2)

(i) & (ii) પરથી

$m\left(40 - \frac{m^2 - 40}{2}\right) = 208$

$\therefore m^3 - 120m + 416 = 0$

$(m-4)(m^2+4m-104)=0$

$\therefore m-4=0$

$m=4$

$n=\dfrac{m^2-40}{2}=-12$

$\therefore\ \alpha+\beta=4,\ \ n=-12$

$\therefore$ માંગેલ સમીકરણ $x^2-4x-12=0$

11. Ans. (a)

$2x^2+16x+3k=0$

ધારોકે, α, β સમીના બીજો છે.

$\therefore \alpha+\beta=-8, \qquad \alpha\beta=\dfrac{3K}{2}$

વળી, $\alpha:\beta=4:5$

$\therefore\ \alpha=4m, \beta=5m$

$\therefore \alpha+\beta=-8 \Rightarrow 9m=-8$

$\Rightarrow m=-\dfrac{8}{9}$

$\therefore \alpha=-\dfrac{32}{9} \qquad \beta=\dfrac{-40}{9}$

$\alpha\beta=\dfrac{3K}{2} \Rightarrow K=\dfrac{2560}{243}$

12. Ans. (b)

$x^2-x+1=0$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)k$

$=0$

$\therefore x^3=-1$

α, β બીજો હોય તો $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$

વળી, $x^3+1=0$

$\therefore \alpha^3=-1, \qquad \beta^3=-1$

$$\alpha^{2009} + \beta^{2009} = \frac{\alpha^{2010}}{\alpha} + \frac{\beta^{2010}}{\beta}$$

$$= \frac{(\alpha^3)^{670}}{\alpha} + \frac{(\beta^3)^{670}}{\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{1} = 1$$

13. Ans. (a)

$ax^2 - 6x + c + 9 = 0$

ધારોકે $\alpha = 3 - 5i \quad \beta = 3 + 5i$

$\therefore \alpha + \beta = 6 \quad \alpha\beta = 9 + 25 = 34$

$\therefore \frac{6}{a} = 6, \quad \frac{c + 9}{a} = 34$

$\therefore a = 1, \quad c = 25$

14. Ans. (c)

$a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$

બીજો સમાન છે. $\therefore \Delta = 0$

$b^2(c - a)^2 - 4ac(b - c)(a - b) = 0$

$\therefore [b(a + c) - 2ac]^2 = 0$

$\therefore ab + bc - 2ac = 0$

$\therefore ab - ac = ac - bc$

$\therefore \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

$\therefore \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

a, b, c સ્વરીત શ્રેણીમાં છે.

15. Ans. (b)

$bx^2 + cx + a = 0$

બીજો કાલ્પનીક હોવાથી $\Delta < 0$

$\therefore c^2 - 4ab < 0 \quad \therefore c^2 < 4ab$

$\therefore -c^2 > -4ab$ ...(1)

$3b^2x^2 + 6bcx + 2c^2 = 3(bx + c)^2 - c^2$

$> -c^2$

$> -4ab$

16. Ans. (b)

$4x^2 + 3x + 7 = 0$

$\alpha + \beta = \frac{-3}{4}, \quad \alpha\beta = \frac{7}{4}$

$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$

$= \frac{225}{343}$

17. Ans. (b)

$4x^2 - 6x + p = 0$

$\alpha + \beta = \frac{3}{2} \; \alpha\beta = \frac{p}{4}$

ધારોકે, $\alpha = q + 2i \qquad \beta = q - 2i$

$\alpha + \beta = 2q \Rightarrow 2q = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow q = \frac{3}{4}$

$\alpha\beta = q^2 + 4 \Rightarrow \frac{p}{4} = q^2 + 4$

$\Rightarrow p = \frac{73}{4}$

$\therefore p + q = 19$

18. Ans. (b)

$(2k + 3)x^2 + 2(k + 3)x + (k + 5) = 0$

બીજો સમાન છે. $\therefore \Delta = 0$

$$4(k+3)^2 - 4(2k+3)(k+5) = 0$$

$$\therefore (k+1)(k+6) = 0$$

$$\therefore k = -1, k = -6$$

19. Ans. (a)

$$\alpha = \frac{1}{10-\sqrt{72}} = \frac{10+\sqrt{72}}{28}$$

$$\beta = \frac{1}{10+6\sqrt{2}} = \frac{10-\sqrt{72}}{28}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{5}{7}, \ \alpha\beta = \frac{1}{28}$$

માંગેલ સમીકરણ

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{1}{28} = 0$$

$$\therefore 28x^2 - 20x + 1 = 0$$

20. Ans. (a)

$\therefore$ α, β સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજો છે.

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ધારોકે $\alpha_1 \beta_1$ સમીકરણ $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ ના બીજો છે.

$$\therefore \alpha_1 + \beta_1 = \frac{-b^2}{a^2} \qquad \alpha_1\beta_1 = \frac{c^2}{a^2}$$

વળી, $\alpha_1 = \alpha^2, \ \beta_1 = \beta^2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{-b^2}{a^2}$$

$$\therefore (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta = \frac{-b^2}{a^2}$$

$$\therefore \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore b^2 = ac$$

a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

21. Ans. (a)

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$$

ધારોકે $x + \frac{1}{x} = m$ $\quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2$

$$\therefore 3(m^2 - 2) + 16m + 26 = 0$$

$$\therefore m = -2, m = \frac{-10}{3}$$

$$m = -2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

જો $m = -\frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{-10}{3}$

$$\Rightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(3x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3, x = \frac{-1}{3}$$

ઉકેલ ગણ $\left\{-1, -3, \frac{-1}{3}\right\}$

22. Ans. (a)

$x^2 - px + q = 0$

α, β સમીકરણના બીજો છે.

$\therefore \alpha + \beta = p, \ \alpha\beta = q$

$|\alpha - \beta| = 1$ (આપેલ છે.)

$p^2 - 4q = 1$

$p^2 = 4q + 1$

$\therefore p^2 + 4q^2 = 4q^2 + 4q + 1 \ (2q + 1)^2$

23. Ans. (b)

$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{k}$

$\therefore x^2 + (a + b - 2k)x + ab - (a + b)k = 0$

વળી, $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow a + b - 2k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{a + b}{2}$

$\alpha\beta = ab - (a + b)k$

$= -\frac{a^2 + b^2}{2}$

24. Ans. (a)

$\ell x^2 + mx + n = 0$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-m}{\ell}, \qquad \alpha\beta = \frac{m}{\ell}$

$\therefore m = -\ell(\alpha + \beta), \quad n = \ell\alpha\beta$

વળી, $m^3 + \ell^2 n + \ell n^2 = 3\ell mn$

$\therefore \ell^3(\alpha + \beta)^2 + \ell^2\alpha\beta + \ell^3\alpha^2\beta^2 = -3\ell^2(\alpha + \beta)(\alpha\beta)$

$\therefore (\beta - \alpha)^2(\alpha - \beta^2) = 0$

$\therefore \alpha^2 = \beta$ અથવા $\beta^2 = \alpha$

$\alpha = \beta^2$

25. Ans. (a)

$ax^2 + 2bx + c = 0$ અને $b^2 = ac$

$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore x = \frac{-b}{a}$

વળી $\therefore\ x = \frac{-b}{a}$ એ $dx^2 + 2ex + f = 0$ નુ પણ બીજ છે.

$$\therefore\ d\left(\frac{-b}{a}\right)^2 + 2e\left(\frac{-b}{a}\right) + f = 0$$

$$\therefore\ \frac{2ab}{a} = \frac{db^2}{a^2} + f$$

$$\therefore\ \frac{2ab}{a} = \frac{dac}{a^2} + f$$

$$2eb = dc + af$$

$$\therefore\ \frac{2e}{b} = \frac{d}{a} + \frac{f}{c}$$

$\therefore\ \frac{d}{a}, \frac{e}{b}, \frac{f}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

26. Ans. (a)

$$(a-b)x^2 + 5(a+b)x - 2(a-b) = 0$$

$$\Delta = 25(a+b)^2 + 8(a-b)^2 > 0$$

બીજો વાસ્તવીક અને ભિન્ન છે.

27. Ans. (a)

$$x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \ldots\ldots\ldots\infty}}}$$

$$\therefore\ x = \sqrt{12 + x}$$

$$\therefore\ x^2 - x - 12 = 0$$

$\therefore\ x = 4, x = -3$ પરંતુ $x > 0$

$$\therefore\ x = 4$$

28. Ans. (a)

$$\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{x^2-3} + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{x^2-3} = 10$$

ધારોકે $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{x^2-3} = m$

$$\therefore\ \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{x^2-3} = \frac{1}{m}$$

$$\therefore\ m = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

જો $m = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{x^2-3} = 5 + 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow x^2 - 3 = 1$

$\Rightarrow x^2 = 4 \qquad \therefore x = \pm 2$

જો $m = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 - 3 = -1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

ઉકેલ ગણ $\left\{\pm 2, \pm\sqrt{2}\right\}$

29. Ans. (a)

ધારોકે $\alpha, \beta, 5x^2 - 3x + 3 = 0$ ના બીજો છે.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{3}{5}, \alpha\beta = \frac{3}{5}$

ધારોકે α_1 & β_1 માંગેલ સમીકરણના બીજો છે.

$\alpha_1 = 3\alpha, \beta_1 = 3\beta$ (આપેલ છે.)

$\therefore \alpha_1 + \beta_1 = \frac{9}{5} \qquad \alpha_1\beta_1 = \frac{27}{5}$

માંગેલ સમીકરણ $x - \frac{9}{5}x + \frac{27}{5} = 0$

$\therefore 5x^2 - 9x + 27 = 0$

30. Ans. (c)

$2x^2 + 16x + 3k = 0$

$\alpha + \beta = -8, \alpha\beta = \frac{3k}{2}$

વળી $\alpha^2\beta^2 = 10 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 10$

$\Rightarrow 64 - 3k = 10$

$\Rightarrow k = 18$

31. Ans. (c)

$x^2 + k^2 = (2k + 2)x$

$\therefore x^2 - (2k+2)x + k^2 = 0$

$\therefore \Delta = (2k + 2)^2 - 4k^2 = 4(2k + 1)$

હવે બીજો કાલ્પનીક હોવાથી $\Delta < 0$

$\therefore\ 4(2k+1) < 0 \qquad \therefore\ k < \frac{-1}{2}$

32. Ans. (b)

$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

$\Delta = 4$

$\therefore\ \alpha = m + 1, \beta = m - 1$

આપ્યા મુજબ $\alpha < 4$ & $\beta > -2$

$m + 1 < 4,\ m - 1 > -2 \qquad \therefore\ -1 < m < 3$

33. Ans. (b)

$0 < x < \pi$ અને $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{2}$ જ્યાં $f = \tan\frac{x}{2}$

$\therefore\ 3f^2 - 4f - 1 = 0$

$\Delta = 28$

$f = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$0 < x < \pi \qquad \therefore\ 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \tan\frac{x}{2} > 0$

$\therefore\ \tan\frac{x}{2} \neq \frac{2-\sqrt{7}}{3}$

$\therefore\ \tan\frac{x}{2} = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \qquad \therefore\ \tan x \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$

34. Ans. (a)

$x^2 + ax + 1 = 0$

$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 1$

$|\alpha - \beta| < \sqrt{5}$ આપેલ છે.

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2 < 9$

$a^2 < 9$

$|a| < 3 \quad \therefore\ a \in (-3, 3)$

35. Ans. (d)

ધારોકે $\alpha, \beta, x^2 - 6x + a = 0$ ના બીજો છે.

$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = a$

ધારોકે α_1, β_1 એ $x^2 - cx + 6 = 0$ બીજો છે.

$\alpha_1 \beta_1 = c,\ \alpha_1\ \beta_1 = 6$

વળી, $\alpha = \alpha_1,\ \beta : \beta_1 = 4 : 3$ આપેલ છે. અને $\beta_1\ \beta_1 \in z$

$\therefore\ \beta = 4\,k,\ \beta_1 = 3k, k \neq 0$

$\alpha, \beta, = 6 \Rightarrow \alpha\,(3k) = 6 \qquad \therefore \alpha = \dfrac{2}{k}$

$\alpha\beta = a \Rightarrow \alpha\,(4k) = a \qquad \therefore \alpha = \dfrac{a}{4k}$

$\therefore\ \dfrac{2}{k} = \dfrac{a}{4k} \qquad \therefore\ a = 8$

હવે, $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 8$

$\therefore\quad \alpha = 4, \beta = 2$ અથવા $\alpha = 2, \beta = 4$ માં

જો $\alpha = 4$ તો $4 = \dfrac{2}{k} \qquad \therefore\ k = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \beta = 4\,k = 2$ અને $\therefore\ \beta_1 = 3k = \dfrac{3}{2} \notin z$

$\therefore\ \alpha \neq 4$

જો $\alpha = 2$ તો $2 = \dfrac{2}{k} \qquad \therefore k = 1$

$\beta = 4k = 4 \in z$ અને $\beta_1 = 3k = 3 \in z$

$\therefore\ \alpha = 2$

36. Ans. (b)

હાર્દિક માટે, બીજો (૪,૩)

બીજોનો સરવાળો = બીજોનો ગુણાકાર = 12

$\therefore$ દ્વિઘાત સમીકરણઃ $x^2 - 7x + 12 = 0$

અહીં અચળપદ ખોટુ છે (જે આપેલ છે)

શિવાંગ માટે, બીજો (3, 2)

બીજોને સરવાળો = 5

બીજોને ગુણાકાર = 6

દ્વિઘાત સમીકરણ : $x^2 - 5x + 6 = 0$

અંહી x નો સહગુણક ખોટો છે. (આપ્યા મુજબ)

સાચુ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 7x + 6 = 0$

$\therefore (x-6)(x-1) = 0$

$\therefore x = 6, x = 1$

માંગેલ સાચા બીજો 6, 1 છે.

37. Ans. (c)

ΔABC માં $m\angle C = \frac{a}{2} \quad \therefore A + B = \frac{\pi}{2}$

$\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}$ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજો છે.

બીજોનો સરવાળો $= -\frac{b}{a}$

$\therefore \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} = \frac{-b}{a}$

$\therefore \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{-b}{a}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$\therefore \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} = \frac{-a}{\sqrt{2}b}$ ...(i)

બીજોનો ગુણાકાર $= \frac{c}{a}$

$\therefore \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{c}{a}$

$\therefore \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} = \frac{-c}{\sqrt{2}\,b}$ ...(ii)

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-a}{b\sqrt{2}}+\frac{c}{b\sqrt{2}}$$

$c-a=b$ $\qquad\qquad \therefore\ c=a+b$

38. Ans. (b)

ધારોકે α, β બે સંખ્યાઓ છે.

આપ્યા મુજબ, $\frac{\alpha+\beta}{2}=9$ $\qquad\qquad \therefore\ \alpha+\beta=18$

અને $\sqrt{\alpha\beta}=4$ $\qquad\qquad \therefore\ \alpha\beta=16$

$\therefore$ માંગેલ સમીકરણ જેના બીજો α,β હોય $x^2-18x+16=0$

39. Ans. (a)

$x=4$ સમીકરણ $x^2+px+12=0$ નુ એક બીજ છે.

$\therefore\ 16+4p+12=0$ $\qquad\qquad \therefore\ P=-7$

$x^2+px+q=0$ ના બીજો સમાન છે.

$\therefore\ \Delta=0$

$p^2-4q=0$ $\qquad\qquad \therefore\ q=\frac{49}{4}$

40. Ans. (d)

$x^2-3|x|-10=0$

$|x^2|-3|x|-10=0$

ધારોકે $|x|=y>0$

$\therefore\ y^2-3y-10=0$

$\therefore\ (y-5)(y+2)=0$

$y=5,\ y=-2$ પરંતુ $y\neq-2$

$|x|=5$ $\qquad\qquad \therefore x=\pm5$

$\therefore$ બીજોનો સરવાળો $=5+(-5)=0$

41. Ans. (c)

$x^2-5x+4=0$

ધારોકે α, β બીજો છે.

$\therefore\ \alpha + \beta = 5,\ \alpha\beta = 4$

ધારોકે માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણના બીજો α_1, β_1 છે.

$$\therefore\ \alpha_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}\ \&\ \beta_1 = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$= \frac{5}{2} \qquad\qquad = 2$$

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{9}{2} \qquad \alpha_1\beta_1 = 5$$

માંગેલ સમીકરણ

$2x^2 - 9x + 10 = 0$

42. Ans. (b)

ધારોકે $f(x) = (x + a)^2 + (x + b)^2 + (x + c)^2$

$\therefore\ f(x) = 3x^2 + 2(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2$

x^2 નો સહગુણક $= 3 > 0$

$\therefore\ f(x)$ ની ન્યુનત્તમ કિંમત $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ મળે

$$\therefore\ x = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-(a + b + c)}{3}$$

43. Ans. (b)

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$$

ધારોકે $x + \frac{1}{x} = m \qquad \therefore\ x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2$

$\therefore\ 3m^2 - 16m + 20 = 0$

$$\therefore\ m = 2,\ m = \frac{-10}{3}$$

$$m = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2$$

$\Rightarrow x = 1$

$m = -\frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{-10}{3}$

$\Rightarrow (x+3)(3x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -3, x = \frac{-1}{3}$

વાસ્તવીક બીજોની સંખ્યા $= 3$

44. Ans. (b)

$\sqrt{\frac{x}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2}} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$\therefore \sqrt{\frac{x}{x+2}} = 2 \qquad \therefore x = \frac{-8}{3}$

45. Ans. (a)

$|x-5|^2 - |x-5| - 6 = 0$

ધારોકે $|x-5| = y, \ y > 0$

$\therefore y^2 - y - 6 = 0$

$\therefore y = 3, y = -2$ પરંતુ $y \neq -2$

$\therefore y = 3 \qquad \therefore |x-5| = 3$

$x = 8, x = 2$

બીજોનો સરવાળો $= 8 + 2 = 10$

46. Ans. (a)

$\alpha + \beta = 5, \ \alpha^2 = 5\alpha - 3, \ \beta^2 = 5\beta - 3$

$\alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) - 6$

$\alpha\beta = 3$

ધારોકે $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \ \beta_1 = \frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore \alpha_1 + \beta_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{19}{3}$ & $\alpha_1\beta_1 = 1$

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 - 19x + 3 = 0$

47. Ans. (c)

$ax^2 + bx + c = 0,\ 2a + 3b + 6c = 0$

ધારોકે $f(x) = 2ax^3 + 3bx^2 + 6cx$

$f'(x) = 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$

વળી, $f(0) = 0,\ f(1) = 2a + 3b + bc = 0$

$\therefore$ રોલના પ્રમેય મુજબ કોઈક $x \in (0, 1)$ માટે $f'(x) = 0$

$\therefore\ ax^2 + bx + c = 0$નું ઓછામાં ઓછુ એક બીજ (0,1) માં મળે.

48. Ans. (d)

$x^2 - bx + c = 0$

ધારોકે $\alpha = n,\ \beta = n + 1$

$\therefore\ \alpha + \beta = 2n + 1,\ \alpha\beta = n\ (n + 1)$

$b = 2n + 1 \quad c = n(n+1)$

$n = \dfrac{b-1}{2},\ n^2 + n = c$

$\therefore\ \left(\dfrac{b-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b-1}{2}\right) = c$

$\therefore\ b^2 - 4c = 1$

49. Ans. (d)

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$

$\therefore\ \sin x = -3,\ \sin x = \dfrac{1}{2}$

$\sin x \neq -3$

$\therefore\ \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6},\ x \in [0, 3\pi]$

$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{b},\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6},\ x = 2\pi + \dfrac{\pi}{6},\ x = 3\pi - \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ [0, 3\pi]$માં x ની કિંમતોની સંખ્યા 4 છે.

50. Ans. (b)

$x^2 - (a-1)x - (a+1) = 0$

α અને β બીજો હોય તો

$\alpha + \beta = a - 1,\ \alpha\beta = -(a + 1)$

હવે $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (a - 1)^2 + 5$

$\therefore a = 1$ માટે $\alpha^2 + \beta^2$ ની ન્યુનત્તમ કિંમત મળે.

51. Ans. (c)

$ax^2 + bx + c = 0$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$(\alpha a + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2\ a^2}$$

52. Ans. (a)

$\tan B$ અને $\tan B$ એ $x^2 - px + q = 0$ ના બીજો છે.

$\therefore \tan A + \tan B = P$ અને $\tan A . \tan B = q$

$$\therefore \tan(A + B) = \frac{p}{1-q}$$

હવે $$\cos^2(A + B) = \frac{1 + \cos 2(A + B)}{2}$$

$$= \frac{\left[1 + \dfrac{1 - \tan^2(A + B)}{1 + \tan^2(A + B)}\right]}{2}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{2}{1 + \tan^2(A + B)}\right]}{2}$$

$$= \frac{(1-q)^2}{p^2 + (1 - q)^2}$$

53. Ans. (d)

$$27^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 2.\quad 8^{\frac{1}{x}}$$

$\therefore \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{12}{8}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$

ધારોકે $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = m$

$\therefore m^3 + m - 2 = 0$

$\therefore m^3 - m + 2m - 2 = 0$

$\therefore m(m^2 - 1) + 2(m - 1) = 0$

$\therefore (m - 1)[m(m + 1) + 2] = 0$

$\therefore m^2 + m + 2 = 0$ OR $m - 1 = 0$

$m^2 + m + 2 = 0$ માટે $\Delta < 0$

$\therefore$ વાસ્તવીક બીજ મળતા નથી.

$\therefore m - 1 = 0$ $\qquad \therefore m = 1$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{0}$ $\qquad \therefore \frac{1}{x} = 0$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ વાસ્તવીક બીજોની સંખ્યા = 0 (શૂન્ય)

54. Ans. (d)

$8x^2 - 3x + 27 = 0$

$\alpha + \beta = \frac{3}{8}, \ \alpha\beta = \frac{27}{8}$

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\alpha + \beta}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}}{\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

55. Ans. (b)

ધારોકે $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+7}=m$

$\therefore\ (1-m)x^2+2(1-m)x+1-7m=0$

$\Delta = 4(1-m)^2-4(1-m)(1-7m)$

x વાસ્તવીક સંખ્યા છે. $\therefore\ \Delta \ge 0$

$\therefore\ (1-m)(6m)\ge 0$

$\therefore m(m-1)\le 0$

$\therefore\ 0\le m\le 1,\ m\in[0,1]$

56. Ans. (a)

$0\le x\le \pi \qquad \therefore\ \sin x>0$

$\therefore\ 16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10$

ધારોકે $16^{\sin^2 x}=m$

$\therefore\ m+\dfrac{16}{m}=10$

$\therefore\ m=8$ અથવા $m=2$

$\therefore 16^{\sin^2 x}=8$ અથવા $16^{\sin^2 x}=2$

$\therefore 4\sin^2 x=3$ અથવા $4\sin^2 x=1$

$\therefore \sin^2 x=\dfrac{3}{4}$ અથવા $\sin^2 x=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}$ અથવા $x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$

57. Ans. (b)

$f(x)=2x^3+mx^2-13x+n$

$x-2,\ x-3,$ $f(x)$ ના અવયવો છે.

$\therefore\ f(2)=f(3)=0$

$\therefore\ 16+4m-26+n=0$

અને $54 + 9m - 39 + n = 0$

$$\begin{array}{l} 4m + n - 10 = 0 \\ \therefore \quad 9m + n + 15 = 0 \\ \hline -5m - 25 = 0 \end{array}$$

$m = -5, n = 30$

$\therefore \ (m, n) = (-5, 30)$

58. Ans. (d)

$a^{\log_a (x^2 - 4x - 5)} = 3x - 5 \quad a \in R^+ - \{1\}$

$\therefore \ x^2 - 4x - 5 = 3x - 5$

$\therefore \ x = 5, x = 2$

ઉકેલ ગણ : $\{5, 2\}$

59. Ans. (a)

$x^2 + px + q = 0$ અને $x^{2n} + p^n x^n + q^n = 0$

$\alpha + \beta = -p, \ \alpha\beta = q$

$\alpha^n + \beta^n = -p^n, \ \alpha^n \beta^n = q^n$

હવે, $x^n + 1 + (x+1)^n = 0$

$$\therefore \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)^n = 0$$

$$\therefore \frac{\alpha^n + \beta^n}{\beta^n} + \frac{(\alpha + \beta)^n}{\beta^n} = 0$$

$\therefore \ -p^n + (-p)^n = 0$

$\therefore \ p^n \left[(-1)^n - 1 \right] = 0$

જે n ની કિંમત બેકી માટે શક્ય બને છે.

60. Ans. (c)

$x^2 + px + q = 0$ માટે

$\alpha + \beta = -p, \ \alpha\beta = q$

$x^2 + \gamma x + s = 0$ માટે

$\gamma + \delta = -\gamma, \gamma\delta = 5$

હવે $(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\delta)^2$

$$= 2\left[\, p^2 + r^2 - pr - 2q - 2s \,\right]$$

61. Ans. (c)

$(5-x)^4 + (4-x)^4 = (9-2x)^4$

$\therefore\ m^4 + n^4 = (m+n)^4$ જ્યાં $m = 5-x,\ n = 4-x$

$\therefore\ 2mn\left(2m^2 + 3mn + 2n^2\right) = 0$

$\therefore\ m = 0,\ n = 0,\ 2m^2 + 3mn + 2n^2 = 0$

$m = 0 \Rightarrow x = 5$

$n = 0 \Rightarrow x = 4$

અને $2m^2 + 3mm + 2n^2 = 0 \Rightarrow 7x^2 - 63x + 142 = 0$

$$\Delta < 0$$

$\therefore$ બે બીજો કાલ્પનીક છે.

$\therefore$ બે વાસ્તવીક અને બે કાલ્પનીક છે.

62. Ans. (a)

$24x^2 - 8x - 3 = 0$

$\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}\quad \alpha\beta = -\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ |\alpha|, |\beta| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} Sr = \lim_{n\to\infty} s_1 + s_2 + \ldots\ldots\ldots s_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\alpha+\beta) + \left(\alpha^2+\beta^2\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha + \alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha^n\right) + \left(\beta + \beta^2 + \ldots\ldots\ldots + \beta^n\right)$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta}$$

$$= \frac{14}{13}$$

63. Ans. (a)

$$ax + by = 1 \Rightarrow y = \frac{1-ax}{b}$$

$$px^2 + qy^2 - 1 = 0$$

$$\therefore px^2 + q\left(\frac{1-ax}{b}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\therefore (pb^2 + qa^2)x^2 - 2aqx + q - b^2 = 0$$

બીજ એક જ હોવાથી $\Delta = 0$

$$(-2aq)^2 - 4(pb^2 + qa^2)(q - b^2) = 0$$

$$b^2(a^2q + b^2p - pq) = 0$$

$$a^2q + b^2p = pq$$

$$\therefore \frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} = 1$$

64. Ans. (d)

$$\ell\cos 2x + m\sin^2 x + n = 0$$

$$\therefore (m - 2\ell)\sin^2 x + (\ell + n) = 0$$

$$\therefore m - 2\ell = 0,\ \ell + n = 0$$

$\therefore \ell = \frac{m}{2} = -n = k$ (ધારતા) $k \in R$

$$\ell = k,\ m = 2k,\ n = -k$$

$\therefore$ ત્રય (ℓ, m, n)ની સંખ્યા અનંત છે.

65. Ans. (d)

$$f(x) = x - [x]$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\therefore x - [x] + \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} - 1 = [x] + \left[\frac{1}{x}\right]$$

$\therefore \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = k$ જ્યાં $k = [x] + \left[\dfrac{1}{x}\right]$ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore x^2 - (1 + k)x + 1 = 0$

$x \in R - \{0\}$ હોવાથી $\Delta \geq 0$

$[-(16+k)]^2 - 4(1)(1) \geq 0$

$\therefore (1 + k)^2 \geq 4$

$\therefore |1 + k| \geq 2$

$\therefore -2 \geq 1 + k \geq 2$

$\therefore k \leq -3, \ k \geq 1$

$\therefore$ ઉકેલોની સંખ્યા અનંત છે.

66. Ans. (b)

$x^2 - 5kx + 4e^{4\log k} - 3 = 0$

આપ્યા મુજબ $\alpha\beta = 61 \Rightarrow 4e^{4\log k} \ 3 = 61$

$\Rightarrow 4e^{\log k^4} = 64$

$\Rightarrow k = 2$

67. Ans. (b)

ધારો કે α, β સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજો છે.

$\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}, \ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

વળી, $\alpha = \beta^n$

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \beta^{n+1} = \dfrac{c}{a}$

$\therefore \beta = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \ \alpha = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

$\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$

$\therefore \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} + \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \dfrac{-b}{a}$

$\therefore (ac^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n c)^{\frac{1}{n+1}} = -b$

68. Ans. (a)

$\log_{10} a + \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt[4]{a} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b$

$\therefore \ b = \log_{10} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$= \log_{10} a^{2^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}}$

$\therefore b = 2\log_{10} a$

હવે, $\left[\dfrac{\sum_{n=1}^{b}(2n-1)}{\sum_{n=1}^{b}(3n+1)}\right] = \dfrac{20}{7\log_{10} a}$

$\therefore \dfrac{2.\frac{b}{2}(b+1)-b}{3.\frac{b}{2}(b+1)+b} = \dfrac{20\times 2}{7\log_{10} a}$

$\therefore 7b^2 - 60b - 100 = 0$

$b = 10, b = -\dfrac{10}{7}$

$\log_{10} a = 5, \quad \left(b \neq -\left(\dfrac{-10}{7}\right)\right)$

$\therefore \ a = 10^5$

69. Ans. (d)

$x^2 - px + r = 0$ માટે $\alpha + \beta = p, \ \alpha\beta = r$

$x^2 - qx + r = 0$ માટે $\dfrac{\alpha}{2} + 2\beta = q \quad \alpha\beta = r$

$\left.\begin{array}{l}\alpha + 4\beta = 2q \\ \&\alpha + \beta = p\end{array}\right\}$ સમીકરણને ઉકેલતા

$\alpha = \dfrac{2(2p-q)}{3}, \beta = \dfrac{2q-p}{3}$

હવે $r = \alpha\beta = \dfrac{2(2p-q)}{3}\left(\dfrac{2q-p}{3}\right) = \dfrac{2}{q}(2p-q)(2q-p)$

70. Ans. (c)

$x \in R$ માટે $3^{72} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$

$\therefore 3^{72-x-\sqrt{x}} > 3^{0}$

$\therefore 72 - x - \sqrt{x} > 0$

$\therefore x + \sqrt{x} - 72 < 0$

$\therefore \left(\sqrt{x}+9\right)\left(\sqrt{x}-8\right) < 0$

$x \in R$ તથા $x \geq 0$ માટે અસમતા શક્ય બને

$\therefore \sqrt{x} - 8 < 0 \quad \therefore \sqrt{x} < 8 \qquad x < 64$

$\therefore 0 \leq x < 64 \qquad x \in [0, 64)$

71. Ans. (a)

ધારોકે $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 3 = 0$

સમીકરણ $f(x) = 0$ માટે બીજો વાસ્તવીક અને 3 કરતા નાના છે.

(i) $f(3) > 0$ (ii) $\Delta \geq 0$ (iii) $\alpha + \beta < 6$

(i) $f(3) > 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 > 0$

$\Rightarrow (a-3)(a-2) > 0$

$\therefore a \in R - [2, 3]$ ....(1)

(ii) $\Delta \geq 0 \Rightarrow a \leq 3$ ....(2)

(iii) $\alpha + \beta < 6 \Rightarrow a < 3$ ...(3)

(i), (ii) & (iii) પરથી $a < 2$

72. Ans. (b)

ધારોકે α એ $x^2 + bx - 1 = 0$ અને $x^2 + x + b = 0$ નું સામાન્ય બીજ છે.

$\therefore \alpha^2 + b\alpha - 1 = 0$ અને $\alpha^2 + \alpha + b = 0$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{b^2+1} = \frac{\alpha}{-1-b} = \frac{1}{1-b}$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{b^2+1}{1-b}, \ \alpha = \frac{1+b}{b-1}$$

$$\therefore \left(\frac{1+b}{b-1}\right)^2 = \frac{b^2+1}{1-b} \Rightarrow b^3 + 3b = 0$$

$$\Rightarrow b = -i\sqrt{3}$$

73. Ans. (c)

$abc^2x^2 + (3a^2c + b^2c) + (2b^2 - 6a^2 - ab) = 0$

$a, b, c \in Q$

$\therefore \Delta = c^2\left[3a^2 - b^2 - 4ab\right]^2$ જે પૂર્ણવર્ગ હોવાથી બીજો સંમેય છે.

74. Ans. (c)

$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

$\therefore (x+1)^3 + 1 = 0$

$\therefore (x+2)(x^2+x+1) = 0$

$x = -2, x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, x = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore x = -2, x = w, x = w^2$

સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ & $(x+1)^3 + 1 = 0$ ના બે બીજો સામાન્ય (સમાન) હોવાથી
બંને બીજો વાસ્તવીક અને કાલ્પનીક ન હોય શકે.
$\therefore$ બન્ને બીજો કાલ્પનીક બીજો છે.

બીજોનો સરવાળો $= -\dfrac{b}{a}$ બીજોનો ગુણાકાર $= \dfrac{c}{a}$

$\therefore w + w^2 = \dfrac{b}{a}$, $\qquad w \cdot w^2 = \dfrac{c}{a}$

$\therefore -1 = \dfrac{-b}{a}$ $\qquad w^3 = \dfrac{c}{a} = 1$

$\therefore a = b$ $\qquad c = a$

$\therefore a = b = c$

75. Ans. (a)

$(6k+2)x^2 + rx + 3k - 1 = 0$ ....(1)

$(12k+4)x^2 + px + 6k - 2 = 0$ ....(2)

સમીકરણ (1) & (2) ના બન્ને બીજો સામાન્ય (સમાન) છે.

$\therefore \ \frac{6k+2}{12k+4} = \frac{r}{p} = \frac{3k-1}{6k-2}$

$\therefore \ 2r - p = 0$

76. Ans. (b)

α, β સમીકરણ $x^2 + x + 1 = 0$ ના બીજો છે.

$\therefore \ \alpha = w = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \ \beta = w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

$\alpha + \beta = -1, \ \alpha\beta = 1$

ધારોકે $\alpha_1 = \alpha^{19}, \qquad \beta_1 = \beta^7$

$= (w)^{19} \qquad = (w^2)^7$

$= w \qquad = w^2 \ (\because w^3 = 1)$

$\alpha_1 + \beta_1 = w + w^2 = -1$

$\alpha_1 \beta_1 = w.\, w^2 = w^3 = 1$

માંગેલ સમીકરણ $x^2 + x + 1 = 0$

77. Ans. (b)

α, β સમીકરણ $x^2 + bx - c = 0$ બીજો છે.

$\therefore \ \alpha + \beta = b, \ \alpha\beta = -c$

$\therefore \ b = -(\alpha + \beta), \qquad c = -(\alpha\beta)$

ધારોકે $\alpha_1 = b, \ \beta_1 = c$

$\therefore \ \alpha_1 \beta_1 = b + c = -(\alpha + \beta + \alpha\beta)$

$\alpha_1 \beta_1 = bc = \alpha\beta(\alpha + \beta)$

માંગેલ સમીકરણ

$x^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)x + \alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$

78. Ans. (a)

સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજો m:n ગુણોત્તરમાં છે.

$\therefore \ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \qquad \therefore \ \alpha = mk, \ \beta = nk$

$$\therefore\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \therefore (m + m), \quad k = -\frac{b}{a}\, k = \frac{-b}{a(m+n)}$$

$$\alpha = \frac{-mb}{a(m+n)}, \quad \beta = \frac{-nb}{a\,(m+n)}$$

હવે, $\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{mnb^2}{a^2\,(m+n)^2} = \frac{c}{a}$

$$\therefore \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{ca}{b^2}$$

$$\therefore \left(\frac{m+n}{\sqrt{m}\,\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{ca}}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{m}{n}} \pm \frac{b}{\sqrt{ca}} = 0$$

Hint

1. Ans. (b)

   $\Delta = b^2 - 4ac$

2. Ans. (a)

   $\Delta = b^2 - 4ac$

3. Ans. (c)

   બીજો સમાન અને વાસ્તવીક છે. $\therefore \Delta \geq 0$

4. Ans. (a)

   $ax^2 + bx + c = 0$ માટે α, β બીજો છે.

   $\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

   a_1 b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\therefore b - a = c - b$

5. Ans. (c)

6. Ans. (a)

   ધારોકે $x^2 + 5x = m$

7. Ans. (a)

બંને બાજુ x^2 વડે ભાગતા

ધારોકે $x + \frac{1}{x} = m$

8. Ans. (c)

ધારોકે $\frac{x - a}{x - b} = m$

9. Ans. (a)

10. Ans. (b)

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

11. Ans. (a)

12. Ans. (b)

$\therefore x^2 - x + 1 = 0$

બંને બાજુ $x + 1$ વડે ગુણતા

$\therefore x^3 + 1 = 0$

α, β બીજો છે. $\therefore \alpha^3 = -1, \ \beta^3 = -1$

13. Ans. (a)

14. Ans. (c)

a, b, c સ્વરીત શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

15. Ans. (b)

બીજો કાલ્પનીક છે. $\therefore \Delta < 0$

16. Ans. (b)

17. Ans. (b)

18. Ans. (b)

19. Ans. (a)

$$\alpha = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} = \frac{10 + \sqrt{72}}{28}$$

$$\beta = \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} = \frac{10 - \sqrt{72}}{28}$$

દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

20. Ans. (a)

a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. $\therefore b^2 = ac$

21. Ans. (c)

22. Ans. (a)

23. Ans. (b)

24. Ans. (a)

25. Ans. (a)

26. Ans. (a)

બીજો ભિન્ન વાસ્તવીક છે. $\therefore \Delta > 0$

27. Ans. (a)

28. Ans. (a)

ધારોકે $(5 + 2\sqrt{6})^{x^2-3} = m \therefore (5 - 2\sqrt{6})^{x^2-3} = \frac{1}{m}$

29. Ans. (a)

30. Ans. (c)

31. Ans. (c)

32. Ans. (b)

33. Ans. (b)

$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ જ્યાં $t = \tan\frac{x}{2}$

34. Ans. (a)

35. Ans. (d)

36. Ans. (b)

37. Ans. (c)

38. Ans. (b)

39. Ans. (a)

40. Ans. (d)

41. Ans. (c)

42. Ans. (b)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$a > 0$, ની ન્યુનત્તમ કિંમત $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ મળે.

43. Ans. (c)

44. Ans. (b)

45. Ans. (a)

ધારોકે $|x - 5| = y, y > 0$

46. Ans. (a)

47. Ans. (c)

$ax^2 + bx + c = 0$ & $2a + 3b + 6c = 0$

ધારોકે $f(x) = 2ax^3 + 3bx^2 + 6cx$

$f(x) = 6ax^2 + 6bx + 6c$

$= 6(ax^2 + bx + c)$

$f(0) = 0,\ f(1) = 2a + 3b + 6c = 0$

$\therefore\ f(0) = f(1)$

રોલના પ્રમેય પ્રમાણે $\exists\ x \in (0, 1) \supset f'(x) = 0$

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$

48. Ans. (d)

49. Ans. (d)

$\sin x = \sin\alpha$ નું વ્યાપક ઉકેલ $x = k\pi + (-1)^k\alpha, k \in z$

50. Ans. (b)

51. Ans. (c)

52. Ans. (a)

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$

53. Ans. (d)

ધારોકે $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = m$

54. Ans. (d)

55. Ans. (b)

56. Ans. (a)

ધારોકે $16^{\sin^2 x} = m$

57. Ans. (b)

58. Ans. (d)

$a^{\log_a x} = x$

59. Ans. (a)

$x^2 + px + q = 0$ માટે $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$

અને $x^{2n} + p^n x^n + q^n = 0$ માટે $\alpha^n + \beta^n = P^n, \alpha^n \beta^n = q^n$

60. Ans. (c)

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

61. Ans. (c)

$5 - x = m$ તથા $4 - x = n$ લેતા

62. Ans. (a)

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a}{1-r}, |r|<1$$

63. Ans. (a)

સમીકરણોને એક જ બીજ હોવાથી $\Delta = 0$

64. Ans. (d)

$(m - 2\ell)\sin^2 x + (\ell + n) = 0$

$\therefore m - 2\ell = 0, \ell + n = 0$

$\frac{m}{2} = \ell = -n = (k)$ (ધારતા)

$(\ell, m, n) = (k, 2k, -k), k \in R$

65. Ans. (d)

$[x] + \left[\frac{1}{x}\right] =$ કોઈક પૂર્ણાંક ધારોકે k, બીજો વાસ્તવીક છે માટે $\Delta \geq 0$

66. Ans. (b)

$\alpha\beta = \frac{c}{a}, a^{\log_a x} = x$

67. Ans. (b)

$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \ \alpha\beta^2 = \frac{c}{a}$

ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરવુ

68. Ans. (a)

$\log_{10} A + \log_{10} B = \log_{10} AB$

$\Rightarrow a + ar + ar^2 + ... = \frac{a}{1-r}, |r| < 1$

$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1), \quad \sum_{r=1}^{n} 1 = n$

69. Ans. (d)

બે સુરેખ સમીકરણોને α, β માટે ઉકેલવુ

70. Ans. (c)

$x \geq 0$ કારણકે $72 - x - \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} \in R$

71. Ans. (a)

બીજો વાસ્તવીક અને 3 કરતા નાના હોવાથી

(i) $f(3) > 0$ (ii) $\Delta \geq 0$ (iii) $\alpha + \beta < 3$

72. Ans. (b)

એક બીજ સામાન્ય છે.

$\alpha^2 + b\alpha - 1 = 0$

$\alpha^2 + \alpha + b = 0$

$$\frac{\alpha^2}{\begin{vmatrix} b & -1 \\ 1 & b \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & b \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

73. Ans. (c)

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ અને પૂર્ણ વર્ગ તો બીજો સમેય છે, $a, b, c \in Q$

74. Ans. (c)

$\frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2} = w, \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2} = w^2$

$w + w^2 = -1, \ w^3 = 1$

75. Ans. (a)

$$\left.\begin{aligned} a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ બંનેના બીજો સામાન્ય

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

76. Ans. (b)

$$w = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

બીજોનો સરવાળો $= w + w^2 = -1$

બીજોનો ગુણાકાર $= ww^2 = 1$

માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ

x^2 - (બીજોનો સરવાળો) x + (બીજોનો ગુણાકાર) = 0

77. Ans. (b)

78. Ans. (a)

$$\alpha : \beta = m : n,\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

પ્રથમ બે સમીકરણોને α, β માટે ઉકેલતા અને તે કિંમતો $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ માં મૂકવુ.

જવાબો

1	b	25	a	49	d	73	c
2	a	26	a	50	b	74	c
3	c	27	a	51	c	75	a
4	a	28	a	52	a	76	b
5	c	29	a	53	d	77	b
6	a	30	c	54	d	78	a
7	a	31	c	55	b		
8	c	32	b	56	a		
9	a	33	b	57	b		
10	b	34	a	58	d		
11	a	35	d	59	a		
12	b	36	b	60	c		
13	a	37	c	61	c		
14	c	38	b	62	a		
15	b	39	a	63	a		
16	b	40	d	64	d		
17	b	41	c	65	d		
18	b	42	b	66	b		
19	a	43	c	67	b		
20	a	44	b	68	a		
21	a	45	a	69	d		
22	a	46	a	70	c		
23	b	47	c	71	a		
24	a	48	d	72	b		

●●●

એકમ-3

શ્રેણિકો અને નિશ્ચાયક

અગત્યના મુદ્દા

શ્રેણિક : સંખ્યાઓની કોઈપણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. વ્યાપક સ્વરૂપે $m\times n$ શ્રેણિકમાં m હાર અને n સ્તંભ છે. જ્યાં a_{ij} એ i મી હાર j માં સ્તંભનો ઘટક છે. આપણે શ્રેણિકોને A, B, C,... વડે દર્શાવીએ છીએ.

દા.ત. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ એ 2×2 કક્ષાનો શ્રેણિક છે.

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ એ 2×3 કક્ષાનો શ્રેણિક છે.

તથા $m\times n$ કક્ષાનો શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

શ્રેણિકોનું બીજગણિત

(1) સમાનતા : જો બે શ્રેણિકો $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ સમાન હોય, તો એટલે કે $A=B$ તો

- (i) $a_{ij}=b_{ij} \quad \forall$ i અને j
- (ii) A ની કક્ષા = B ની કક્ષા એટલે કે $m=p$ અને $n=q$

શ્રેણિકોના પ્રકારો

(1) હાર શ્રેણિક : $1\times n$ શ્રેણિક $[a_{11} \;\; a_{12} \; a_{13} \dots a_{1n}]$ ને હાર શ્રેણિક (હાર સદિશ) કહે છે.

(2) સ્તંભ શ્રેણિક : $m\times n$ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ ને સ્તંભ શ્રેણિક (સ્તંભ સદિશ) કહે છે.

(3) ચોરસ શ્રેણિક : $n\times n$ પ્રકારના શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક કહે છે.

(4) વિકર્ણ શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ માં $i\neq j$ માટે $a_{ij}=0$ હોય, તો A ને વિકર્ણ શ્રેણિક કહેવાય.

(5) શૂન્ય શ્રેણિક : જે શ્રેણિકના બધાં જ ઘટકો શૂન્ય હોય તેને શૂન્ય શ્રેણિક કહેવાય. તેને $[O]_{m\times n}$ અથવા $O_{m\times n}$ અથવા O વડે દર્શાવાય છે.

શ્રેણિકોનું બીજગણિત :

(2) બે શ્રેણિકોનો સરવાળો અને તફાવત :

જો A અને B સરખી કક્ષાના શ્રેણિકો હોય એટલે કે

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, તો

$$A + B = C \Rightarrow \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[c_{ij}\right]$$

$$A - B = C \Rightarrow \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[c_{ij}\right]$$

શ્રેણિકના સરવાળાના ગુણધર્મો

જો A, B, C અને O સમાન કક્ષાના શ્રેણિકો હોય, તો

(i) $A + B = B + A$ (ક્રમનો નિયમ)

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (જૂથનો નિયમ)

(iii) $A + O = A = O + A$ (શૂન્ય શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ)

(iv) $(-A) + A = O = A + (-A)$ (વિરોધી શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ)

(3) શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર :

જો $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ અને $k \in R$, તો શ્રેણિક $kA = k\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$ ને શ્રેણિક A નો અદિશ k વડે ગુણાકાર કહે છે.

શ્રેણિકોના સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો :

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}, k, l \in R$

(i) $k(A+B) = kA + kB$

(ii) $(k+l)A = kA + lA$

(iii) $(kl)A = k(lA)$

(iv) $1A = A$

(v) $(-1)A = -A$

(4) શ્રેણિકોના ગુણાકાર :

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ લેતાં, $AB = C$

જ્યાં $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

$= a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$

$= i^{\text{મી}}$ હાર અને $j^{\text{મી}}$ સ્તંભનો અદિશ ગુણાકાર

(i) જો શ્રેણિક A ના સ્તંભની સંખ્યા = શ્રેણિક B ની હારની સંખ્યા તો અને તો જ ગુણાકાર AB વ્યાખ્યાયિત થાય.

(ii) જો A એ $m \times n$ અને B એ $n \times p$ શ્રેણિક હોય તો AB એ $m \times p$ શ્રેણિક થાય.

શ્રેણિકોના ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો :

શ્રેણિકો A, B, C અને O નીચે આપેલ પ્રક્રિયાઓ માટે સુસંગત છે તેમ લેતાં,

(i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$

(iii) $A(BC) = (AB)C$

(iv) $AO = O = OA$

(v) $AB \neq BA$, મોટે ભાગે

(vi) $AB = O$ તો $A = O$ કે $B = O$ ન પણ હોય

(vii) $AB = AC$ તો $B = C$ ન પણ હોય

શ્રેણિકોના પ્રકારો

(6) એકમ શ્રેણિક : જે વિકર્ણ શ્રેણિકના પ્રત્યેક અગ્રવિકર્ણ ઘટક 1 હોય તેવા શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે તેને I અથવા I_n અથવા $I_{n \times n}$ વડે દર્શાવાય છે.

(7) અદિશ શ્રેણિક : જો $k \in R$ તો kI_n ને અદિશ શ્રેણિક કહે છે.

નિશ્ચાયક : જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય તો A ના બધાં જ ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી તેનો નિશ્ચાયક મેળવવામાં આવે, તો તેને શ્રેણિક A નો નિશ્ચાયક કહે છે. તેને $|A|$ કે $\det A$ વડે દર્શાવાય છે.

નિશ્ચાયક નું મૂલ્ય (વિસ્તરણ) :

દ્વિહાર નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ત્રિહાર નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

કેટલાક સંકેતો

(1) $R_i \to C_i$: પ્રત્યેક હારને (સ્તંભને) અનુરૂપ સ્તંભ (હાર) માં ફેરવવી.

(2) $R_{ij}\ (C_{ij})\ (i \neq j)$: $i^{મી}$ હાર (સ્તંભ) તથા $j^{મી}$ હાર (સ્તંભ)ની અદલબદલ કરવી.

(3) $R_i(k)[c_i(k)]$: $i^{મી}$ હાર (સ્તંભ) ના પ્રત્યેક ઘટકને $k \in R\ (k \neq 0)$ વડે ગુણવા.

(4) $R_{ij}(k)[C_{ij}(k)]$: $i^{મી}$ હાર (સ્તંભ) ના દરેક ઘટકને $k \in R - \{0\}$ વડે ગુણીને $j^{મી}$ હાર (સ્તંભ) ના અનુરૂપ

ઘટકમાં ઉમેરવા.

શ્રેણિકોના પ્રકાર

(B) પરિવર્ત શ્રેણિક :

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક મળે તેને શ્રેણિક A નો પરિવર્ત શ્રેણિક કહેવાય. તેને A^T અથવા A' વડે દર્શાવાય છે. $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

પરિવર્ત શ્રેણિકોના ગુણધર્મો :

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(kA)^T = k\,A^T, k \in R$

(iv) $(AB)^T = B^T\,A^T$

(9) સંમિત શ્રેણિક :

જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$ થાય, તો A ને સંમિત શ્રેણિક કહેવાય. અહીં પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = a_{ji}$ થાય.

(10) વિસંમતિ શ્રેણિક :

જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય.

અહીં પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = -a_{ji}$ અને પ્રત્યેક i માટે $a_{ii} = 0$ થાય.

ચોરસ શ્રેણિક A માટે

$A + A^T$ સંમિત શ્રેણિક અને $A - A^T$ વિસંમિત શ્રેણિક થાય.

(11) ત્રિકાણિય શ્રેણિકો :

(i) ઉર્ધ્વ ત્રિકોણિય શ્રેણિક : જે ચોરસ શ્રેણિકના ઘટકો પ્રત્યેક $i > j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય તેને ઉર્ધ્વ ત્રિકાણિય શ્રેણિક કહેવાય છે.

જેમકે $\begin{bmatrix} a & b \\ o & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ o & d & e \\ o & o & f \end{bmatrix}$

(ii) અધ: ત્રિકોણિય શ્રેણિક : જે ચોરસ શ્રેણિકના ઘટકો પ્રત્યેક $i < j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય તેને અધ : ત્રિકોણિય શ્રેણિક કહેવાય છે.

$\begin{bmatrix} a & o \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & o & o \\ b & d & o \\ c & e & f \end{bmatrix}$

- A એ $n \times n$ કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક લેતાં,

(12) લંબચ્છેદી શ્રેણિક : (Orthogonal Matrix)

જો $A^TA = I_n = AA^T$ તો અને તો જ A ને લંબચ્છેદી શ્રેણિક કહેવાય.

(13) સ્વયંઘાતી શ્રેણિક : (Idempotent Matrix)

જો $A^2 = A$ તો A ને સ્વયંઘાતી શ્રેણિક કહેવાય.

(14) શૂન્યભાવી શ્રેણિક : (Nilpotent Matrix)

જો $A^m = A$, m એ ધન પૂર્ણાંક, તો A ને શૂન્યભાવી શ્રેણિક કહેવાય.

(15) સમુત્ક્રમી શ્રેણીક : (Involutary Matrix)

જો $A^2 = I$ એટલે કે $(I + A)(I - A) = O$ તો A ને સમુત્ક્રમી શ્રેણિક કહેવાય.

(16) અનુબદ્ધ શ્રેણિક :

જો $A = \left[a_{ij}\right]$ આપેલ શ્રેણિક હોય, તો તેના દરેક ઘટકોની જગ્યાએ તેની અનુરૂપ અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા મૂકતાં મળતા નવા શ્રેણિકને અનુબદ્ધ શ્રેણિક કહેવાય છે.

તેને $\overline{A} = \left[\overline{a}_{ij}\right]$ વડે દર્શાવાય છે.

ગુણધર્મો

(i) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$

(ii) $\left(\overline{A + B}\right) = \overline{A} + \overline{B}$

(iii) $\left(\overline{kA}\right) = \overline{k} \times \overline{A}$, k એ સંકર સંખ્યા છે.

(iv) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

(17) અનુબદ્ધ પરિવર્ત શ્રેણિક :

આપેલ શ્રેણિક A ના પરિવર્ત શ્રેણિકના અનુબદ્ધ શ્રેણિકને અનુબદ્ધ પરિવર્ત શ્રેણિક કહેવાય છે. તેને A^θ વડે દર્શાવાય છે.

ગુણધર્મો

(i) $A^\theta = \overline{\left(A^T\right)} = \left(\overline{A}\right)^T$

(ii) $\left(A^\theta\right)^\theta = A$

(iii) $(A + B)^\theta = A^\theta + B^\theta$

(iv) $(kA)^\theta = \overline{k} \cdot A^\theta$, k એ સંકર સંખ્યા છે.

(v) $(AB)^\theta = B^\theta \cdot A^\theta$

(18) ઐકિક શ્રેણિક : (Unitary Matrix)

જો $n \times n$ કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક A માટે $AA^{\theta} = I_n = A^{\theta}A$ તો A ને ઐકિક શ્રેણિક કહેવાય.

(19) હર્મિટીય શ્રેણિક :

જો $n \times n$ કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^{\theta} = A$, તો A ને હર્મિટીય શ્રેણિક કહેવાય.

(20) વિષમ-હર્મિટીય શ્રેણિક :

$n \times n$ કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક A માટે, જો $A^{\theta} = -A$ તો A ને વિષમ હર્મિટીય શ્રેણિક કહેવાય.

શ્રેણિકના નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો

(i) $|A^T| = |A|$

(ii) $|AB| = |A||B|$

$|ABC| = |A||B||C|$

(iii) $|kA| = k^n |A|$ (જ્યાં A એ $n \times n$ શ્રેણિક છે.)

(iv) $|I| = 1$

કેટલાક નિશ્ચાયકોના મૂલ્યો

(i) સંમિત નિશ્ચાયક :

$$\begin{vmatrix} x & p & q \\ p & y & r \\ q & r & z \end{vmatrix} = xyz + 2pqr - xp^2 - yq^2 - zr^2$$

(ii) અયુગ્મ કક્ષા ધરાવતો વિસંમિત નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} o & x & y \\ -x & o & z \\ y & z & o \end{vmatrix} = 0$$

(iii) વૃત્તિય નિશ્ચાયક :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = -\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$$

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ :

જો ત્રિકોણના શિરોબિંદુના યામ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) હોય

તો, તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \Delta = \frac{1}{2} | D |$, જ્યાં $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

ઉગમબિંદુનું સ્થાનાંતર એ Δ ને અસર કરતું નથી.

જો $D = 0 \Leftrightarrow$ ત્રણેય બિંદુઓ સમરેખ છે.

જો ત્રિકોણની બાજુઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$

$\therefore$ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\Delta^2}{2 | C_1 C_2 C_3 |}$, જ્યાં C_1, C_2, C_3 અનુક્રમે c_1, c_2, c_3 ના સહ અવયવ છે.

અને $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો ($D =$ નિશ્ચાયક નું મૂલ્ય)

(1) જો કોઈ એક હાર (સ્તંભ)ના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય (શૂન્ય સદિશ), તો $D = 0$

(2) જો બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો $D = 0$

(3) જો કોઈપણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતાં D વિરોધી સંખ્યા - D થાય છે.

(4) જો કોઈપણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતા D ન બદલાય તો $|A^T| = |A|$ થાય.

(5) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 + e_1 & c_1 + f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(7) બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવતા D ન બદલાય.

(8) કોઈપણ હારના (સ્તંભના) પ્રત્યેક ઘટકને $k \in R (k \neq 0)$ વડે ગુણીને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં

ઉમેરતાં D ન બદલાય.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(9) નિશ્ચાયકોનો ગુણાકાર શ્રેણિકોના ગુણાકારની રીત પ્રમાણે જ થાય છે.

$$|AB| = |A|\,|B| = |BA| = |AB^T| = |A^TB| = |A^TB^T|$$

(10) $D = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$, જ્યાં f_r, g_r, h_r એ x ના વિધેયો છે, r = 1, 2, 3

$$\therefore \frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} f_1' & g_1' & h_1' \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2' & g_2' & h_2' \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \end{vmatrix}$$

(11) જેના ઘટકો બહુપદી સ્વરૂપના હોય તેવો તૃતિય કક્ષાનો નિશ્ચાયક D(x) લેતાં,

જો D(m) ની કોઈપણ બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો D(x) નો એક અવયવ x - m થાય.

જો D(m) ની ત્રણેય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો $(x - m)^2$ એ D(x) ના અવયવ થાય.

- **ઉપનિશ્ચાયક**

$$A = \left[a_{ij}\right]_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ લેતાં,}$$

A માં ઘટક a_{ij} (i, j = 1, 2, 3) નો ઉપનિશ્ચાયક = M_{ij} = ઘટક a_{ij} ને સમાવતી $i^{મી}$ હાર અને $j^{મા}$ સ્તંભને દૂર કર્યા પછી A માંથી મળતા નિશ્ચાયક ને a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે.

A માં ઘટક a_{ij} (i, j = 1, 2, 3) નો સહઅવયવ

$= A_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij})$

ત્રિહાર નિશ્ચાયકમાં કોઈપણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે.

ત્રિહાર નિશ્ચાયકમાં કોઈપણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો વડે ગુણી ને ઉમેરતાં મળતો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} A & \text{જો } i = k = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{જો } i \neq k = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} A & \text{જો} \quad j = k = 1, 2, 3 \\ O & \quad\quad j \neq k = 1, 2, 3 \end{cases}$$

સહઅવયવજ શ્રેણિક :

A નો સહઅવયવજ શ્રેણિક = A ના સહઅવયવોનો પરિવર્ત શ્રેણિક

$$= \text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \left[A_{ji}\right]_{3 \times 3}$$

જો $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$, તો $\text{adj}A = \left[A_{ji}\right]_{n \times n}$

2×2 શ્રેણિકનો સહઅવયવજ શ્રેણિક મેળવવા માટે, મુખ્ય વિકર્ણના ઘટકોની અદલબદલ કરવાની તથા પ્રતિવિકર્ણના ઘટકોની નિશાની બદલવાની હોય છે.

સહઅવયવજ શ્રેણિકના ગુણધર્મો

જો A એ $n \times n$ ચોરસ શ્રેણિક છે, તો

(1) $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|I_n$

(2) $\text{adj } I_n = I_n$

(3) $\text{adj}(kI_n) = k^{n-1} I_n$, k અચળ છે.

(4) $\text{adj } A^T = (\text{adj } A)^T$

(5) $\text{adj}(kA) = k^{n-1} \text{ adj}A$, k અચળ છે.

(6) $\text{adj }(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$

(7) $\text{adj }(ABC) = (\text{adj } C)(\text{adj } B)(\text{adj } A)$

(8) વિકર્ણ શ્રેણિકનો સહઅવયવજ વિકર્ણ શ્રેણિક છે.

(9) ત્રિકોણિય શ્રેણિકનો સહઅવયવજ ત્રિકોણિય શ્રેણિક છે.

(10) સંમિત શ્રેણિકનો સહઅવયવજ સંમિત શ્રેણિક છે.

(11) હર્મિટીય શ્રેણિકનો સહઅવયવજ હર્મિટીય શ્રેણિક છે.

જો $|A| = 0$ તો A અસામાન્ય શ્રેણિક કહેવાય.

જો $|A| \neq 0$ તો A સામાન્ય શ્રેણિક કહેવાય.

(12) $|\text{adj}A| = |A|^{n-2} A$

(13) $|\text{adj}(\text{adj}A)| = |A|^{n-2} A$

(14) $|\text{adj}(\text{adj}A)| = |A|^{(n-1)^2}$

વ્યસ્ત શ્રેણિક :

જો ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત બીજો ચોરસ શ્રેણિક B એવો મળે કે જેથી AB = I = BA થાય, તો B(A) ને A(B) નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. A ના વ્યસ્તશ્રેણિકને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$$

જો A ને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય તો તે અનન્ય છે.

ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય હોય

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow A^{-1}$ અસ્તિત્વ ધરાવે.

કેટલાક અગત્યનાં પરિણામો

(i) $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

(iv) $\left(A^{k}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{k}, k \in Z$

(v) $A = \text{diag}\left[a_{11}\ \ a_{22}\ \ a_{33}\ \ldots\ a_{nn}\right]$ અને $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ldots q_{nn} \neq 0$ તો

$A^{-1} = \text{diag}\left[{a_{11}}^{-1}\ \ {a_{22}}^{-1}\ \ {a_{33}}^{-1}\ \ldots\ {a_{nn}}^{-1}\right]$

(vi) સંમિત શ્રેણિકનો વ્યસ્ત સંમિત શ્રેણિક હોય છે.

શ્રેણિકના પ્રાથમિક પરિવર્તનો

(1) હાર (સ્તંભ) ની અદલાબદલી

(2) કોઈપણ હાર (સ્તંભ) ના પ્રત્યેક ઘટકને શૂન્યેતર અદિશ વડે ગુણવા

(3) કોઈપણ હાર (સ્તંભ) ના પ્રત્યેક ઘટકને શૂન્યેતર અદિશ વડે ગુણી અન્ય હાર (સ્તંભ) ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરવા (બાદ કરવા)

- **સુસંગતતા કસોટી**

  જો સમીકરણ સંહતિ ઓછામાં ઓછો એક ઉકેલ ગણ ધરાવે (ઉકેલગણ ખાલી ગણ ન હોય), તો તેને સુસંગત સમીકરણોની સંહતિ કહે છે.

  જો સમીકરણ સંહતિ ને ઉકેલ ન મળે (ઉકેલગણ ખાલીગણ), તો તેને અસંગત સમીકરણોની સંહતિ કહે છે.

- **દ્વિચલ/ત્રિચલ સુરેખ સમીકરણની સંહતિનો ઉકેલ :**
- **દેખીતો ઉકેલ :**

  આપેલા બધાં જ ચલની કિંમત શૂન્ય હોય

જેમકે $x = 0, y = 0, z = 0$

- **દેખીતો ન હોય તેવો ઉકેલ**

ઓછામાં ઓછા એક ચલની કિંમત શૂન્યેતર હોય.

- **સમઘાત સુરેખ સમીકરણ :**

જે સુરેખ સમીકરણમાં અચળ પદ શૂન્ય હોય

જેમ કે $ax + by = 0$ અથવા $ax + by + cz = 0$ તેવા સમીકરણ ને સમઘાત સુરેખ સમીકરણ કહેવાય છે.

- **સમઘાત સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ :**

ત્રણ ચલ માટે

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$AX = O$ કહો

બે ચલ માટે

$$a_{11}x + a_{12}y = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$AX = O$ કહો

(1) જો $|A| \neq 0$ તો આપેલ સંહતિ સુસંગત થશે અને તેને ફક્ત દેખીતો (અનન્ય) ઉકેલ મળે.

(2) જો $|A| = 0$ તો આપેલ સંહતિ સુસંગત થશે અને તેને દેખીતો ન હોય તેવો (અનંત) ઉકેલ મળે.

- **વિષમઘાત સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ**

ત્રણ સમીકરણો

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગની પદ્ધતિ :

સમીકરણ સંહતિને $AX = B$ પ્રમાણે લખી શકાય જ્યાં,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

જો $|A| \neq 0$ (A સામાન્ય શ્રેણિક) હોય, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે અને ઉકેલ $X = A^{-1}B$ પ્રમાણે મળે.

ક્રેમરનું સૂત્ર

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}$$

જયાં

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(1) જો $D \neq 0$ તો સમીકરણની સંહતિ સુસંગત કહેવાય અને તેને અનન્ય ઉકેલ મળે.

(2) જો $D = 0$ અને $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ તો સમીકરણની સંહતિ સુસંગત કહેવાય અને તેને અનંત ઉકેલ મળે.

(3) જો $D = 0$ અને D_1 , D_2 કે D_3 માંથી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય, તો સમીકરણની સંહતિ અસંગત થાય અને તેને ઉકેલ ન મળે (ઉકેલ ખાલીગણ)

ઉપરની બંને પદ્ધતિ બે ચલના બે સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ માટે પણ સત્ય છે.

શ્રેણિકનું લાક્ષણિક સમીકરણ :

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ હોય તો શ્રેણિક $A - \lambda I$ ને લાક્ષણિક શ્રેણિક કહે છે. સમીકરણ $|A - \lambda I| = 0$ ને A નું લાક્ષણિક સમીકરણ કહે છે.

$|A - \lambda I| = 0$ તો સમઘાત સમીકરણની સંહતિને દેખીતો ન હોય તેવો ઉકેલ મળે છે.

દરેક ચોરસ શ્રેણિક A તેના લાક્ષણિક સમીકરણ $|A - \lambda I| = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

પ્રશ્ન બેન્ક

1. જો સમીકરણોની સંહતી $x + ky + 3z = 0$, $3x + ky - 2z = 0$, $2x + 3y - 4z = 0$ ને દેખીતો ઉકેલ ન હોય, તો $\frac{xy}{z^2} = \ldots$)

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $-\frac{5}{6}$ (c) $\frac{6}{5}$ (d) $-\frac{6}{5}$

2. $\begin{vmatrix} n & {}_nP_n & {}_nC_n \\ n+1 & {}_{n+1}P_{n+1} & {}_{n+1}C_{n+1} \\ n+2 & {}_{n+2}P_{n+2} & {}_{n+2}C_{n+2} \end{vmatrix} = \ldots$

(a) $(n^2 + n + 1)n!$ (b) $n(n+1)!$ (c) $(n+1)n!$ (d) $(n+2)n!$

3. $b(a+c) \neq 0$ થાય તેવા a, b, c લેતાં,

જો $\begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c-1 \\ a-1 & b-1 & c+1 \\ (-1)^{n+2}a & (-1)^{n+1}b & (-1)^n c \end{vmatrix} = 0$ તો n એ ... છે.

(a) શૂન્ય (b) કોઈપણ યુગ્મ પૂર્ણાંક

(c) કોઈપણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક (d) કોઈપણ પૂર્ણાંક

4. $\begin{vmatrix} \sin(x+p) & \sin(x+q) & \sin(x+r) \\ \sin(y+p) & \sin(y+q) & \sin(y+r) \\ \sin(z+p) & \sin(z+q) & \sin(z+r) \end{vmatrix} = \cdots$

(a) $\sin(x+y+z)$ (b) $\sin(p+q+r)$ (c) 1 (d) 0

5. જો $\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$, તો $x = \ldots$

(a) $\frac{3}{2}, \frac{3}{11}$ (b) $\frac{3}{2}, \frac{11}{3}$ (c) $\frac{2}{3}, \frac{11}{3}$ (d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{11}$

6. જો $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = k\,(abc)\,(a+b+c)^3$, તો $k = \ldots$

(a) 1 (b) -1 (c) -2 (d) 2

7. જો $\begin{vmatrix} \frac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \frac{b^2+c^2}{a} & a \\ b & b & \frac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix} = kbc,$ તો $k = \ldots$

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

8. જો સદિશો $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)$ અસમતલીય અને $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$, હોય તો $abc = \ldots$

(a) 0 (b) 2 (c) -1 (d) 1

9. $\begin{vmatrix} \sqrt{11}+\sqrt{3} & \sqrt{20} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{22} & \sqrt{25} & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{55} & \sqrt{15} & \sqrt{25} \end{vmatrix} = \ldots$

(a) $5\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)$ (b) $5\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$ (c) $-5\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$ (d) $5\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)$

10. જો $2s = a + b + c$ અને $A = \begin{bmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{bmatrix}$ તો $|A| = \ldots$

(a) $2s^2(s-a)(s-b)(s-c)$ (b) $2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$

(c) $2s(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2$ (d) $2s^2(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2$

11. સમઘાત સુરેખ સમીકરણની સંહતિ

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha+\beta+\gamma+\delta & \alpha\beta+\gamma\delta \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & 2(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) & \alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta) \\ \alpha\beta+\gamma\delta & \alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta) & 2\alpha\beta\gamma\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = O$$

ને દેખીતો ન હોય તેવો ઉકેલ ક્યારે હોય ?

(a) $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0))))$ (b) કોઈપણ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ માટે

(c) $\alpha\beta+\gamma\delta = 0$ (d) $\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 4k & k \\ 0 & k & 4k \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ જો $|A^2| = 16$, તો $|k| = \dots$

(a) 1 (b) $\frac{1}{4}$ (c) 4 (d) 4^2

13. જો $1, \omega, \omega^2$ એ 1 ના ઘનમૂળ હોય, તો $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3-1 \\ a^{\omega} & a^{2\omega} & a^{3\omega}-1 \\ a^{\omega^2} & a^{2\omega^2} & a^{3\omega^2}-1 \end{vmatrix} = \dots$

(a) 0 (b) a (c) a^2 (d) a^3

14. જો $a_1, a_2, a_3, \dots$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો

$$\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix} = \cdots$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

15. જો $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $Q = PAP^T$, તો $P^TQ^{2013}P = \dots$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2013 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4+2013\sqrt{3} & 6039 \\ 2013 & 4-2013\sqrt{3} \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2012 & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 2012 \end{bmatrix}$

16. $\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 5 & 1+i \\ 3-4i & 1-i & 4 \end{bmatrix}$, તો $|A|$એ … છે.

(a) શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા (b) શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા

(c) સંકર સંખ્યા (d) શૂન્ય

17. $\begin{vmatrix} \log_3 1024 & \log_8 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_4 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix} = \ldots$

(a) 6 (b) 9 (c) 10 (d) 12

18. જો $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}, i = \sqrt{-1}$, તો $A^n = I$ જ્યારે $n = \ldots$ જ્યાં I એ એકમ શ્રેણિક છે.

(a) 4p + 1 (b) 4p + 3 (c) 4p (d) 4p + 2

19. જો $A = \begin{bmatrix} k & 3 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ અને $|A^3| = 343$, તો k કિંમત ... છે.

(a) ± 1 (b) ± 2 (c) ± 3 (d) ± 4

20. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^n + (n-1)I = \ldots$

(a) $2^{n-1} A$ (b) - nA (c) nA (d) (n + 1)A

21. જો $\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 2x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 24x + B$, તો B = ...

(a) -12 (b) 12 (c) 24 (d) -8

22. $\begin{vmatrix} \tan^2 x & -\sec^2 x & 1 \\ -\sec^2 x & \tan^2 x & 1 \\ -10 & 12 & 2 \end{vmatrix} = \cdots$

(a) $12\tan^2 x - 10\sec^2 x$ (b) $12\sec^2 x - 10\tan^2 x - 2$

(c) 0 (d) $\tan^2 x \cdot \sec^2 x$

23. જો $f(x) = \begin{vmatrix} \sec x & \cos x & \sec^2 x + \cos x.\operatorname{cosec}^2 x \\ \cos^2 x & \cos^2 x & \operatorname{cosec}^2 x \\ 1 & \cos^2 x & \operatorname{cosec}^2 x \end{vmatrix}$, તો $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \ldots$

(a) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}$

24. જો $f(x)=\begin{vmatrix} x & e^{x^2} & \sec x \\ \sin x & 2 & \cos x \\ \operatorname{cosec} x & x^2 & 5 \end{vmatrix}$, તો $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \ldots$

(a) 0 (b) $5e^{\pi}$ (c) $1-\frac{\pi}{2}$ (d) 34

25. જો $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, જ્યાં $a,b,c \in R^{+}$, $abc = 1$ અને $|A| > 0$, $A^{T}A = I$ તો $a^3 + b^3 + c^3 = \ldots$

(a) 12 (b) 4 (c) - 8 (d) 28

26. જો $f(x)=\begin{vmatrix} x^n & \sin x & \cos x \\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$, તો $\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right]_{x=0} = \ldots$ જ્યાં p એ અચળ છે.

(a) p (b) $p + p^2$ (c) p^3 (d) p પર આધારીત નથી

27. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} \cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) & \cos^2\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) \end{vmatrix}$ નું મુલ્ય … છે.

(a) 0 (b) $\cos^2\left(3x-\frac{9\pi}{2}\right)$ (c) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ (d) $\cos^2\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)$

28. જો $\Delta(x)=\begin{vmatrix} x^2-5x+3 & 2x-5 & 3 \\ 3x^2+x+4 & 6x+1 & 9 \\ 7x^2-6x+9 & 14x-6 & 21 \end{vmatrix} = ax^3+bx^2+cx+d$, તો $d = \ldots$

(a) 156 (b) 187 (c) 119 (d) 141

29. જો $A=\begin{bmatrix} 3a & b & c \\ b & 3c & a \\ c & a & 3b \end{bmatrix}$, $a,b,c \in R$, $abc=1$, $AA^{T} = 64I$ અને $|A| > 0$, તો $\left(a^3+b^3+c^3\right)^3 = \ldots$

(a) 343 (b) 729 (c) 256 (d) 512

30. જો P એ સામાન્ય શ્રેણિક હોય અને $1 + P + P^2 + ... + P^n = O$, જ્યાં O એ શૂન્ય શ્રેણિક છે, તો $P^{-1} = ...$

(a) O (b) P (c) P^n (d) I

31. $\begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix}$ ને અસામાન્ય શ્રેણિક થવા માટે ... થવું જોઈએ.

(a) $a-b=0$ (b) $a+b=0$ (c) $a+b+c=0$ (d) $a=0$

32. $\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & x+4 \\ x+4 & x+6 & x+8 \\ x+8 & x+10 & x+14 \end{vmatrix} = ...$

(a) 2 (b) -2 (c) 4 (d) -4

33. જો a, b, c એ ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ હોય, તો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ નુ મૂલ્ય ... થાય.

(a) >0 (b) ≥ 0 (c) <0 (d) ≤ 0

34. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = ...$

(a) 0 (b) $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$

(c) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) -1

35. જો સમીકરણો y + z = - ax, z + x = -by, x + y = -cz ને દેખીતો ન હોય તેવો ઉકેલ મળે, તો $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} = ...$

(a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) -2

36. જો સમીકરણો a(y + z) = x, b(z + x) = y, c(x + y) = z ને દેખિતો ન હોય તેવો ઉકેલ મળે, તો $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} = ...$

(a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) -2

37. જો સમીકરણો $x-2y+3z=0, -2x+3y+2z=0, -8x+\lambda y=0$ ને દેખીતો ન હોય તેવો ઉકેલ મળે, તો $\lambda = ...$

(a) 18 (b) 13 (c) -10 (d) 4

38. જો સમીકરણો x + 3y + z = 0, 2x - y - z = 0, kx + 2y + 3z = 0 ને દેખીતો ન હોય તેવો ઉકેલ મળે, તો k = ...

(a) $\frac{13}{2}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) $-\frac{15}{2}$ (d) $-\frac{13}{2}$

39. જો સમીકરણો ax + by + cz = 0, 4x + 3y + 2z = 0 x + y + z = 0 ને દેખીતો ઉકેલ ન હોય તેવા સમયે a, b, c એ ... માં હોય.

(a) સમાંતર શ્રેણી (b) સમગુણોત્તર શ્રેણી (c) વધતી શ્રેણી (d) ઘટતી શ્રેણી

40. જો સમીકરણ સંહતિ x + ay = 0, az + y = 0, ax + z = 0 ને અનંત ઉકેલ હોય, તો a = ...

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) -2

41. સમીકરણ $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલ ગણ ... છે.

(a) $\{1, 2\}$ (b) $\{-1, -2\}$

(c) $\{1, -2\}$ (d) $\{-1, 2\}$

42. સમીકરણો x + 2y + 3z = 1, 2x + y + 3z = 2, 5x + 5y + 9z = 4 ને ...

(a) ઉકેલ નથી. (b) અનન્ય ઉકેલ છે.

(c) અનંત ઉકેલો છે. (d) ઉકેલ વિશે કંઈજ ન કહી શકાય.

43. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^{-1} = \dots$

(a) A (b) A^2 (c) A^3 (d) A^4

નીચેનો ફકરો કાળજીપૂર્વક વાંચો અને પ્રશ્નો 44, 45 અને 46 ના ઉત્તરો આપો.

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ અને U_1, U_2 અને U_3 એ સ્તંભ શ્રેણિકો છે કે જેથી

$AU_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, AU_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, AU_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ અને U_1, U_2, U_3 એ 3×3 શ્રેણિક U ના સ્તંભો હોય, તો

44. $|U|$ નું મૂલ્ય ... છે.

(a) 3 (b) -3 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2

45. શ્રેણિક U^{-1} ના ઘટકોનો સરવાળો ... છે.

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 3

46. $[3\ 2\ 0]\ U \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ના નિશ્ચાયક નું મૂલ્ય ... છે.

(a) 5 (b) $\frac{5}{2}$ (c) 4 (d) $\frac{3}{2}$

47. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, તો...

(a) $a = 2, c = -\frac{1}{2}$ (b) $a = 1, c = -1$

(c) $a = -1, c = 1$ (d) $a = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$

48. જો $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, તો $\text{adj}A = \dots$

(a) A (b) A^T (c) 3A (d) $3A^T$

49. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, તો $A^3 = \dots$

(a) I (b) A^T (c) O (d) A^{-1}

50. જો $A = \begin{bmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2i} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2i} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2i} & \frac{1-i\sqrt{3}}{2i} \end{bmatrix}$, $i=\sqrt{-1}$ અને $f(x) = x^2 + 2$, તો $f(A) = \dots$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\left(\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\left(2+i\sqrt{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

51. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}$ એ સ્વયંઘાતી શ્રેણિક હોય, તો $x = \dots$

(a) -1 (b) -5 (c) -4 (d) -3

52. જો a, b, c એ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો x, y અને z ની સમીકરણ સંહતિ ...
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ને

(a) અનન્ય ઉકેલ છે. (b) ઉકેલ નથી.

(c) એકથી વધુ સાન્ત ઉકેલો છે. (d) અનંત ઉકેલો છે.

53. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, તો $A^n = \dots$

(a) $\begin{bmatrix} 3n & -4n \\ n & -n \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2+n & 5-n \\ n & -n \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3^n & (-4)^n \\ 1^n & (-1)^n \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$

54. શ્રેણિક A એ સમીકરણ $A^2 - 5A + 7I = O$ નું સમાધાન કરે છે. જો $A^5 = aA + bI$, તો $2a - 3b$ નું મૂલ્ય ... છે.

(a) 4135 (b) 1435 (c) 1453 (d) 3135

55. ΔABC માં, જો $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & a \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = 0$, તો $64\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) = \dots$

(a) 64 (b) 144 (c) 128 (d) 0

56. ò u$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^{2013} = \ldots$

(a) $2^{2012}A$ (b) $2^{1006}A$ (c) $-2^{2013}A$ (d) I

57. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^{2013} = \ldots$

(a) $3^{2014}A$ (b) $-3^{2013}A$ (c) $3^{2012}A$ (d) $3^{1007}A$

58. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \text{adj}A$, $C = 5A$, તો $\dfrac{|\text{adj } B|}{|C|} = \ldots$

(a) 5 (b) 1 (c) 3 (d) $\dfrac{1}{5}$

59. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, તો $|(\text{adj}(\text{adj}(\text{adj}(\text{adj} A))))| = \ldots$

(a) 1 (b) 2 (c) 2^4 (d) 2^{12}

60. જો $A_r = \begin{vmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{vmatrix}$, જ્યા r એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા દર્શાવે છે, તો $\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{2013} A_r\right)} = \ldots$

(a) 1 (b) 40 (c) 2012 (d) 2013

61. જો z એ સંકર સંખ્યા અને $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ એ બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો

$$\begin{vmatrix} a_1z+b_1\bar{z} & a_2z+b_2\bar{z} & a_3z+b_3\bar{z} \\ b_1z+a_1\bar{z} & b_2z+a_2\bar{z} & b_3z+a_3\bar{z} \\ b_1z+a_1 & b_2z+a_2 & b_3z+a_3 \end{vmatrix} = \cdots$$

(a) $|\bar{z}|^2$ (b) $(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3)^2|z|^2$ (c) 3 (d) 0

62. જો $D = \begin{vmatrix} 1 & 3\cos\theta & 1 \\ \sin\theta & 1 & 3\cos\theta \\ 1 & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}$, તો D નું મહત્તમ મૂલ્ય … છે.

(a) 9 (b) 1 (c) 10 (d) 16

63. $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\cdot\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\cdot\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

એ શક્ય થવા માટે $\theta-\phi=\dots,\ n\in Z$

(a) $n\pi$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{n\pi}{2}$ (d) $2n\pi$

64. જો P, Q અને R એ લઘુકોણ ત્રિકોણના ખૂણાઓ હોય અને P, Q, R માંથી કોઈપણ બે ખૂણા સમાન ન હોય તો

$\begin{vmatrix} 1 & 1+\cos P & \cos P(1+\cos P) \\ 1 & 1+\cos Q & \cos Q(1+\cos Q) \\ 1 & 1+\cos R & \cos R(1+\cos R) \end{vmatrix}$ એ ...

(a) ધન છે. (b) શૂન્ય છે.

(c) ઋણ છે. (d) નક્કી ન કરી શકાય.

65. જો $0\le[x]<2,\ -1\le[y]<1,\ 1\le[z]<3$ ($[\cdot]$ એ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય દર્શાવે છે), તો નિશ્ચાયક

$D=\begin{vmatrix} [x]+1 & [y] & [z] \\ [x] & [y]+1 & [z] \\ [x] & [y] & [z]+1 \end{vmatrix}$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ... છે.

(a) 6 (b) 2 (c) 4 (d) 8

66. જો $A=\begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^T A^{-1}=\dots$

(a) $\begin{bmatrix} -\cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \cos 2x & \sin 2x \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -1 & \tan x \end{bmatrix}$

67. $f(x)=\begin{bmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{bmatrix},\ g(y)=\begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $f(x)\,.\,f(y)=\dots$

(a) $f(xy)$ (b) $f\left(\frac{x}{y}\right)$ (c) $f(x+y)$ (d) $f(x-y)$

(ii) નીચેનામાંથી કયું વિધાન ખરૂ છે ?

(a) $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ (b) $[f(x)]^{-1} = -f(x)$ (c) $[f(x)]^{-1} = f(-x)$ (d) $[f(x)]^{-1} = -f(-x)$

(iii) $[f(x)g(y)]^{-1} = \ldots$

(a) $f(x^{-1})g(y^{-1})$ (b) $g(y^{-1})f(x^{-1})$ (c) $f(-x)g(-y)$ (d) $g(-y)f(-x)$

68. જો $D_1 = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$ અને $D_2 = \begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix}$, તો ...

(a) $D_1 = 3(D_2)^{\frac{3}{2}}$ (b) $D_1 = 3D_2^2$

(c) $\frac{d}{dx}(D_1) = 3D_2^2$ (d) $\frac{d}{dx}(D_1) = 3D_2$

69. જો α, β એ સમીકરણ $x^2 + bx + c = 0$ ના બે બીજ હોય , તો

$$\begin{vmatrix} 3 & 1+\alpha+\beta & 1+\alpha^2+\beta^2 \\ 1+\alpha+\beta & 1+\alpha^2+\beta^2 & 1+\alpha^3+\beta^3 \\ 1+\alpha^2+\beta^2 & 1+\alpha^3+\beta^3 & 1+\alpha^4+\beta^4 \end{vmatrix} = \ldots$$

(a) $(1+b+c)^2(b^2-4c)$ (b) $(1-b-c)^2(b^2-4c)$

(c) $(1-b+c)^2(b^2-4c)$ (d) $(1+b-c)^2(b^2-4c)$

70. જો $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n$, $D_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$ અને $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, તો $x = \ldots$ અને $y = \ldots$

(a) $\log\left(\frac{D_1}{D}\right), \log\left(\frac{D_2}{D}\right)$ (b) $\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}$

(c) $e^{\frac{D_1}{D}}, e^{\frac{D_2}{D}}$ (d) $\frac{D_2}{D_1}, \frac{D}{D_1}$

71. $\begin{vmatrix} \sqrt{6} & 2i & 3+\sqrt{6} \\ \sqrt{12} & \sqrt{3}+\sqrt{8}i & 3\sqrt{2}-\sqrt{6}i \\ \sqrt{18} & \sqrt{2}+\sqrt{12}i & \sqrt{27}+2i \end{vmatrix}$ નું મુલ્ય એ ...

(a) વાસ્તવિક સંખ્યા છે. (b) સંમેય સંખ્યા છે.

(c) અસંમેય સંખ્યા છે. (d) સંકર સંખ્યા છે.

72. યોગ્ય જોડી બનાવો.

	સ્તંભ-I		સ્તંભ-II
1.	ચોરસ શ્રેણિક A એવો છે કે જેથી $A^2 = A$	A	A એ શૂન્યભાવી (Nilpotent) શ્રેણિક છે.
2.	ચોરસ શ્રેણિક A એવો છે કે જેથી $A^m = O$	B	A એ સમુત્ક્રમી (Involutary) શ્રેણિક છે.
3.	ચોરસ શ્રેણિક A એવો છે કે જેથી $A^2 = I$	C	A એ સંમતિ શ્રેણિક છે.
4.	ચોરસ શ્રેણિક A એવો છે કે જેથી $A^T = A$	D	A એ સ્વયંઘાતી શ્રેણિક છે.

(a) 1-D, 2-A, 3-C, 4-B (b) 1-D, 2-A, 3-B, 4-C

(c) 1-A, 2-C, 3-D, 4-B (d) 1-B, 2-D, 3-C, 4-A

73. જો $f(x) = \begin{vmatrix} 2\cos^2 x & \sin 2x & -\sin x \\ \sin 2x & 2\sin^2 x & \cos x \\ \sin x & -\cos x & 0 \end{vmatrix}$, તો $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) + f'(x)\right) dx = \dots$

(a) 1 (b) π (c) 0 (d) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}$

74. જો $f(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ x^2 & -\tan x & -x^3 \\ 2x & \sin 2x & 5x \end{vmatrix}$, તો $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = \dots$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

75. પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ N નુ એવી રીતે વિભાજન કરવામાં આવે છે કે તેનાથી હાર અને સ્તંભોની ગોઠવણવાળા શ્રેણિકો મળે. જેમકે $M_1 = [1], M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}, \dots\ M_n = \begin{bmatrix} \\ \dots\dots \end{bmatrix}$; તો M_6 ના વિકર્ણના ઘટકોનો સરવાળો શોધો.

(a) 144 (b) 441 (c) 321 (d) 461

76. જો $\begin{vmatrix} 1+x & x & x^2 \\ x & 1+x & x^2 \\ x^2 & x & 1+x \end{vmatrix} = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, તો નીચેના સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડ બનાવો.

	સ્તંભ-I		સ્તંભ-II
1.	f ની કિંમત	A.	0
2.	e ની કિંમત	B.	1

3. a + c ની કિંમત C. -1

4. b + d ની કિંમત D. 3

(a) 1-C, 2-D, 3-A, 4-B (b) 1-A, 2-B, 3-B, 4-C

(c) 1-B, 2-D, 3-C, 4-B (d) 1-D, 2-C, 3-D, 4-A

77. જો $f(x) = \begin{vmatrix} (1+3x)^m & (1+5x)^n & 1 \\ 1 & (1+3x)^m & (1+5x)^n \\ (1+5x)^n & 1 & (1+3x)^m \end{vmatrix}$, જ્યાં a અને b એ ઘન પૂર્ણાંકો છે, તો અચળપદ અને x ના સહગુણક નો સરવાળો ... થાય.

(a) 5 (b) -8 (c) 1 (d) 0

78. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 1+\sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 x & 1+\cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1+\sin 2x \end{vmatrix}$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે M અને m હોય, તો નીચેના સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડ બનાવો.

સ્તંભ-I		સ્તંભ-II	
1.	$M^2 + m^{2013} =$	A.	$k \in N$ માટે હંમેશા અયુગ્મ
2.	$M^3 - m^3 =$	B.	ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓના માપ દર્શાવે છે.
3.	$M^{2k} - m^{2k} =$	C.	10
4.	$2M - 3m, M + m, M + 2m$	D.	4
		E.	$k \in N$ માટે હંમેશા યુગ્મ
		F.	તે માપની ત્રિકોણની બાજુઓ શક્ય નથી.
		G	26

(a) 1-D, 2-G, 3-A, 4-B (b) 1-G, 2-D, 3-A, 4-E

(c) 1-C, 2-G, 3-E, 4-B (d) 1-D, 2-C, 3-E, 4-F

79. જો [x] એ x નું પૂર્ણાંકભાગ વિધેય દર્શાવે તો નીચેના શ્રેણિકના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ... છે.

$$\begin{bmatrix} [e] & [\pi] & [\pi^2 - 6] \\ [\pi] & [\pi^2 - 6] & [e] \\ [\pi^2 - 6] & [e] & [\pi] \end{bmatrix}$$

(a) 8 (b) 0 (c) 1 (d) -8

80. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin^2 x & \cos 4x \\ \sin^2 x & \cos 2x & \cos^2 x \\ \cos 4x & \cos^2 x & \cos 2x \end{vmatrix}$ નું વિસ્તરણ sin x ની ઘાતમાં કરવામાં આવે ત્યારે આ વિસ્તરણમા અચળપદનું મૂલ્ય ... થાય.

(a) 0 (b) -1 (c) 2 (d) 1

81. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & \sin 2\theta \\ \sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(2\theta-\frac{4\pi}{3}\right) \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ... છે.

(a) 0 (b) $2\sin\theta$ (c) $-\sin 2\theta$ (d) $-2\cos\theta$

82. જો $A=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^2 = B$ માટે

(a) $\alpha = 4$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha = -1$ (d) α ન મળે

83. જો $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^2 = 9I$ માટે

(a) $\alpha = 4$ (b) $\alpha = 3$ (c) $\alpha = -3$ (d) α ન મળે

84. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$, તો $I + 2A + 3A^2 + ... \infty = ...$

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}$

85. જો M એ 3×3 શ્રેણિક હોય, જ્યાં $M^T M = I$ અને $\det M = 1$ તો $\det(M - I) = ...$

(a) 0 (b) -1 (c) 4 (d) -3

86. જો λ અને α વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, અને નીચેની સમીકરણ સંહતિ

$\lambda x + (\sin\alpha)y + (\cos\alpha)z = 0$

$x + (\cos\alpha)y + (\sin\alpha)z = 0$

$-x + (\sin\alpha)y - (\cos\alpha)z = 0$ ને દેખીતો ઉકેલ હોય, તો

(i) λ નો વિસ્તારગણ ... છે.

(a) $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ (b) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ (c) $[-1, 1]$ (d) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) જો $\lambda = 1$, તો $\alpha = \ldots$

(a) $n\pi, n\pi - \frac{\pi}{4}$ (b) $2n\pi, n\pi - \frac{\pi}{4}$

(c) $n\pi, n\pi + \frac{\pi}{4}$ (d) $-\pi, \frac{-3\pi}{4}$

87. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ અને $A^2 = 8A + kI_2$, તો $k = \ldots$

(a) 1 (b) -1 (c) 7 (d) -7

88. શ્રેણિકોના ગુણાકારને સાપેક્ષ સમુહ

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} / x \in R, x \neq 0 \right\}$$ નો એકમ ઘટક … છે.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

89. શ્રેણિકોના ગુણાકારને સાપેક્ષ સમુહ

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} / x \in R, x \neq 0, I = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$ માં ઘટક $\begin{bmatrix} y & y & y \\ y & y & y \\ y & y & y \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત ઘટક ….. છે.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} \\ \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} \\ \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6y} & \frac{1}{6y} & \frac{1}{6y} \\ \frac{1}{6y} & \frac{1}{6y} & \frac{1}{6y} \\ \frac{1}{6y} & \frac{1}{6y} & \frac{1}{6y} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} \\ \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} \\ \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} \end{bmatrix}$

90. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ અને $\phi(x) = (1+x)(1-x)^{-1}$, તો $\phi(A) = \ldots$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

91. વિસંમિત શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો … લંબશ્રેણિક થાય.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

92. વિસંમિત શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ના ઉપયોગથી મળતો લંબશ્રેણિક … છે.

(a) $\frac{1}{31}\begin{bmatrix} 21 & 6 & 22 \\ 14 & 21 & 6 \\ 18 & 14 & 21 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{31}\begin{bmatrix} 21 & 6 & 22 \\ 14 & -27 & -6 \\ 18 & 14 & -21 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{31}\begin{bmatrix} 21 & 6 & 22 \\ 6 & 14 & 18 \\ 22 & 18 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{31}\begin{bmatrix} 21 & -6 & 22 \\ 6 & 14 & -18 \\ -22 & 18 & 7 \end{bmatrix}$

93. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, તો $A^3 - 7A^2 + 10A = \ldots$

(a) $5I - A$ (b) $5I + A$ (c) $A - 5I$ (d) $7I$

94. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, તો $8A^{-4} = \ldots$

(a) $145A^{-1} - 27I$ (b) $27I - 145A^{-1}$ (c) $29A^{-1} + 9I$ (d) $145A^{-1} + 27I$

95. સમીકરણ સંહિત ને એક દેખીતો ઉકેલ હોય, તો $\lambda = \ldots$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \lambda x_1$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda x_2$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = \lambda x_3$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6

96. સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ

$x \sec^2 \alpha - y \tan^2 x + z = 2$

$x \cos^2 \alpha + y \sin^2 \alpha = 1$

$x + y = 2$ નો ઉકેલ (x, y, z) = ... જ્યાં α એ અચળ છે.

(a) (1,1,1) (b) (1,2,2) (c) (2,1,2) (d) (1,0,1)

97. k ની કઈ કિંમત માટે નીચેની સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ ને દેખીતો ઉકેલ હોય

$x + 2y - z = 0$

$3x + (k+7)y - 3z = 0$

$2x + 4y + (k - 3) z = 0$

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -2

98. નીચે આપેલા સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડી રચો.

સ્તંભ-I	સ્તંભ-II
1. લિબ્નીટ્ઝ	A. $e^{i\theta}$
2. યુલર	B. ગાણિતીય તર્ક
3. કેલી-હેમિલ્ટન	C. કલનશાસ્ત્ર
4. જ્યોર્જ બૂલ	D. $(e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$
5. ડી મોર્વે	E. શ્રેણિક

(a) 1-D, 2-A, 3-E, 4-B, 5-A (b) 1-B, 2-D, 3-A, 4-C, 5-E

(c) 1-C, 2-A, 3-D, 4-B, 5-E (d) 1-C, 2-A, 3-E, 4-B, 5-D

99. $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ તથા $AX = \lambda X$ જ્યા λ એ અદિશ છે અને X એ સ્તંભ સદિશ છે. જો બે સ્તંભ સદિશો X વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો $\tan\theta =$ ....

(a) $\frac{7}{\sqrt{202}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{19}$ (c) $\sqrt{\frac{3}{202}}$ (d) $\frac{7}{19}$

100. જો ત્રણ અંકોની સંખ્યા A28, 3B9 અને 62C, એ કોઈ નિશ્ચિત પૂર્ણાંક k વડે વિભાજ્ય છે જ્યાં A, B, C એ 0 થી 9 વચ્ચેની કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે, તો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} A & 3 & 6 \\ 8 & 9 & C \\ 2 & B & 2 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 3k (b) k^3 (c) k (d) $\frac{k}{3}$

101. જો $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, તો $I + A + A^2 + \ldots \infty = \ldots$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (d) અવ્યાખ્યાયિત

102. જો $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^3 = \ldots$

(a) I (b) O (c) - A (d) A + I

103. જો $\begin{vmatrix} \binom{x}{r} & \binom{x+1}{r+1} & \binom{x+2}{r+2} \\ \binom{y}{r} & \binom{y+1}{r+1} & \binom{y+2}{r+2} \\ \binom{z}{r} & \binom{z+1}{r+1} & \binom{z+2}{r+2} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \binom{x}{r} & \binom{x}{r+1} & \binom{x}{r+2} \\ \binom{y}{r} & \binom{y}{r+1} & \binom{y}{r+2} \\ \binom{z}{r} & \binom{z}{r+1} & \binom{z}{r+2} \end{vmatrix}$, તો $\lambda = \ldots$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

104. આપેલી સમીકરણોની સંહતિ માટે λ અને μ મેળવો તથા નીચેના સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડી રચો.

$x + 2y + 3z = 6$

$x + 3y + 5z = 9$

$2x + 5y + \lambda z = \mu$

સ્તંભ-I	સ્તંભ-II
1. $\lambda = 8, \mu \neq 15$	A. અનંત ઉકેલો મળે
2. $\lambda \neq 8, \mu \in R$	B. ઉકેલ ન મળે
3. $\lambda = 8, \mu = 15$	C. અનન્ય ઉકેલ મળે

(a) 1-A, 2-B, 3-C (b) 1-B, 2-C, 3-A

(c) 1-C, 2-A, 3-B (d) 1-C, 2-B, 3-A

105. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ લંબ શ્રેણિક હોય તો α, β, γ ના મૂલ્યો અનુક્રમે ... છે.

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

સૂચનો

1. $\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 3 & k & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = \frac{33}{2}$

k ની કિંમત આપેલા સમીકરણોમાં મૂકી તેને ઉકેલતાં, ક્રેમરની રીતે $\frac{x}{15} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{xy}{z^2} = -\frac{30}{36} = \frac{-5}{6}$

2. $D = \begin{vmatrix} n & n! & 1 \\ n+1 & (n+1)! & 1 \\ n+2 & (n+2)! & 1 \end{vmatrix}$

$= n! \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+1 & n+1 & 1 \\ n+2 & (n+2)(n+1) & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad \because C_2\left(\frac{1}{n!}\right)$

$= n! \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 0 \\ 1 & (n+1)^2 & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad \because R_{23}(-1), R_{12}(-1)$

$= (n^2 + n + 1)n!$ $\qquad \because C_2$ પ્રત્યે વિસ્તરણ કરતાં

3. બીજો નિશ્ચાયક $\quad D_2 = \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c-1 \\ a-1 & b-1 & c+1 \\ (-1)^n a & -(-1)^n b & (-1)^n c \end{vmatrix}$

$= (-1)^n \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c-1 \\ a-1 & b-1 & c+1 \\ a & -b & c \end{vmatrix}$

$= (-1)\, D_1$ $\qquad \because R_{13}, R_{23}$ અને તેનો પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં,

$\therefore (1 + (-1)^n)D_1 = 0$ કોઈપણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક માટે જ્યાં $D_1 \neq 0$ કારણકે $b(a + c) \neq 0$ આપેલું છે.

4. આપેલ નિશ્ચાયક એ બે નિશ્ચાયકોનો ગુણાકાર છે.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos p & \cos q & \cos r \\ \sin p & \sin q & \sin r \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

5. $$\begin{vmatrix} 3x-2 & 3 & 3 \\ 3x-2 & 3x-8 & 3 \\ 3x-2 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \because C_{21}(1), C_{31}(1)$$

$\therefore (3x-2)(3x-11)^2 = 0 \qquad \because c_1\left(\frac{1}{3x-2}\right)$ અને R_1 પ્રત્યે વિસ્તરણ કરતાં,

$\therefore x = \frac{2}{3}, \frac{11}{3}$

6. $a = 1, b = -1, c = 2$ લેતાં,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = k(-2)(2)^3$$

$\therefore -32 = -16k$

$\therefore k = 2$

7. $a = 1, b = -1, c = 2$ લેતાં,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = k(1)(-1)(2)$$

$\therefore -8 = -2k$

$\therefore k = 4$

8. $$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1+abc)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \Rightarrow abc = -1, \quad \text{જ્યાં} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

9. $$D = (\sqrt{5})(\sqrt{5})\begin{vmatrix} \sqrt{11}+\sqrt{3} & 2 & 1 \\ \sqrt{15}+\sqrt{22} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{55}+3 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \qquad \because C_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right), C_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 5\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \because C_{21}(-\sqrt{3}), C_{31}(-\sqrt{11})$$

$= 5\left(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}\right)$ $\quad \because R_1$ પ્રત્યે વિસ્તરણ કરતાં,

10. જો $s = 0$ તો $\det A = a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \because R_1 = R_2 = R_3$

$\therefore s^2$ એ $\det A$ નો અવયવ થાય ($\because$ ત્રણ હાર સમાન)

હવે $s = a$ લેતાં,

$$\therefore \det A = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ (a-b)^2 & b^2 & (a-b)^2 \\ (a-c)^2 & (a-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ c^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because b + c = a)$$

$\therefore (s-a)$ એ $\det A$ નો અવયવ થાય.

તેવી જ રીતે $(s-b)$ અને $(s-c)$ પણ અવયવો છે.

પણ $\det A$ એ છ ઘાતવાળી બહુપદી છે.

$\therefore$ છઠ્ઠો અવયવ $k(a+b+c)$ સ્વરૂપમાં હોય.

$\therefore \det A = k\,(a+b+c)\,s^2\,(s-a)(s-b)(s-c)$

હવે, $a = b = 0$, $c = 2$ લેતા $s = 1$ થાય.

$$\therefore \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2k \Rightarrow k = 1$$

$\therefore \det A = 2s^3\ (s-a)(s-b)(s-c)$

11\. સહગુણક શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક એ બે નિશ્ચાયકોના ગુણાકાર સ્વરૂપે છે.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha+\beta & \gamma+\delta & 0 \\ \alpha\beta & \gamma\delta & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \gamma+\delta & \gamma\delta \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

કોઈપણ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ માટે

12\. $\det\left(A^2\right) = (\det A)^2 = \begin{vmatrix} 4 & 4k & k \\ 0 & k & 4k \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}^2 = 16$

$\Rightarrow (16k)^2 = 16$

$\Rightarrow k^2 = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow |\,k\,| = \dfrac{1}{4}$

13\. $D = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a^w & a^{2w} & a^{3w} \\ a^{w^2} & a^{2w^2} & a^{3w^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ a^w & a^{2w} & 1 \\ a^{w^2} & a^{2w^2} & 1 \end{vmatrix}$

$= a.a^w.a^{w^2} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^w & a^{2w} \\ 1 & a^{w^2} & a^{2w^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a^{2w} & a^w \\ 1 & a^{2w^2} & a^{w^2} \end{vmatrix}$

$= 0 \qquad \because 1 + w + w^2 = 0$

14\. $a_n = a_1 r^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$\therefore \log a_n = \log a_1 + (n-1)\log r$

$\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ 3\log r & 3\log r & 3\log r \\ 6\log r & 6\log r & 6\log r \end{vmatrix} = 0 \qquad \because R_{12}(-1), R_{13}(-1)$ અને પછી $R_2 = R_3$

15\. P એ લંબશ્રેણિક છે $\therefore PP^T = P^TP = I$

$Q^{2013} = \left(PAP^T\right)\left(PAP^T\right)\ldots\left(PAP^T\right)$ 2013 વખત

$= PA^{2013}P^T$

$P^TQ^{2013}P = A^{2013}$

$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}, \ldots A^{2013} = \begin{bmatrix}1 & 2013\\0 & 1\end{bmatrix}$

16. $\det\overline{A} = \det\left(\overline{A}\right)^T = \det A$

$\Rightarrow \overline{\det A} = \det\overline{A} = \det A$

$\Rightarrow$ det Aએ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

17. $D = \begin{vmatrix}\log_3 2^{10} & \log_{2^3} 3\\ \log_3 2^3 & \log_{2^2} 3^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\log_2 3 & \log_{2^2} 3\\ \log_3 2^2 & \log_3 2^2\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}10\log_3 2 & \frac{1}{3}\log_2 3\\ 3\log_3 2 & \frac{2}{2}\log_2 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\log_2 3 & \frac{1}{2}\log_2 3\\ 2\log_3 2 & 2\log_3 2\end{vmatrix}$

$= (10-1)(2-1) = 9$

18. $A = iI$

$A^n = i^nI^n = i^n\ I = I$ જો $n = 4p$

19. $|A^3| = 7^3$

$\Rightarrow |A^3| = 7^3 \Rightarrow |A| = 7$

$\Rightarrow k^2 - 9 = 7 \Rightarrow k \pm 4$

20. $A^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, \ldots, A^n = \begin{bmatrix}1 & 0\\n & 1\end{bmatrix}$

$\therefore A^n + (n-1)I = \begin{bmatrix}n & 0\\n & n\end{bmatrix} = nA$

21. નિશ્ચાયકમાં $x = 0$ મુકતાં

$\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & -3\\3 & -1 & -1\end{vmatrix} = B \Rightarrow B = -12$

22. $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\sec^2 x & \tan^2 x & 1 \\ -10 & 12 & 2 \end{bmatrix} \quad \because R_{21}(1)$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -\sec^2 x & 1 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \because C_{12}(1)$ અને $C_2 = C_3$

23. $f(x) = \begin{vmatrix} \sec & \cos x & \sec^2 x + \cos x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \\ \cos^2 x & \cos^2 x & \operatorname{cosec}^2 x \\ \sin^2 x & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \because C_{23}(-1)$

$= \cos x - \sin^2 x - \cos^3 x$

$= \sin^2 x \cdot \cos x - \sin^2 x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx ,$ $\sin x = t$ આદેશ લેતા,

$= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{1} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$

24. સ્પષ્ટ છે કે $f(-x) = -f(x)$ વિધેય અયુગ્મ છે.

$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 0$

25. આપેલું છે કે $A^T A = I \Rightarrow A^2 = I$ ($\because A^T = A$ સ્પષ્ટ છે)

$\therefore \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad ab + bc + ca = 0$

$\therefore (a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow a+b+c = 1$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3(1) + 1 = 4 \qquad (\because abc = 1)$

26. $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \begin{vmatrix} n! & \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$

$\therefore \frac{d^n}{dx^n} f(0) = f^n(0) = 0 \qquad \because R_1 = R_2$

27. $R_{32}(1)$ પ્રક્રિયાથી R_2 ના બધાં જ ઘટકો શૂન્ય થાય છે. $\therefore D = 0$

28. $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} 2x-5 & 2x-5 & 3 \\ 6x+1 & 6x+1 & 9 \\ 14x-6 & 14x-6 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2-5x+3 & 2 & 3 \\ 3x^2+x+4 & 6 & 9 \\ 7x^2-6x+9 & 14 & 21 \end{vmatrix}$

$= 0\ (\because c_1 - c_2) + 0\ (\because c_2 = c_3) = 0$

$\therefore \Delta(x)$ અચળ છે.

$\therefore a = 0,\ b = 0,\ c = 0$

$\Delta(x)$માં બંને બાજુ $x = 0$ મુકતાં,

$\Delta(0) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & -6 & 21 \end{vmatrix} = 141$

29. સ્પષ્ટ છે કે $A^T = A \Rightarrow AA^T = 64I$

$\Rightarrow A^2 = 64I$

$\Rightarrow |A| = 8$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3a & b & c \\ b & 3c & a \\ c & a & 3b \end{vmatrix} = 8$

$\Rightarrow 29abc - 3\left(a^3 + b^3 + c^3\right) = 8$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 7 \qquad (\because abc = 1)$

$\Rightarrow \left(a^3 + b^3 + c^3\right)^3 = 343$

30. $P^{-1}\left(1+P+P^2+...+P^n\right)=P^{-1}O$

$\therefore P^{-1}+I+IP+...+IP^{n-1}=O$

$\therefore P^{-1}+I\left(1+P+...+P^{n-1}\right)=O$

$\therefore P^{-1}+I\left(-P^n\right)=O$

$\therefore P^{-1}=P^n$

31. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ $\because R_{21}(1), R_{31}(1)$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & (-a+b+c) \end{vmatrix}$ $\because R_1\left(\frac{1}{a+b+c}\right), C_{12}(-1), C_{13}(-1)$

$=(a+b+c)^3$ $\because C_2\left(\frac{1}{a+b+c}\right), C_3\left(\frac{1}{a+b+c}\right)$ અને વિસ્તરણ કરતાં,

$=0$ જો $a+b+c=0$

32. $D=\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & x+4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ $\because R_{23}(-1), R_{12}(-1)$

$=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\because C_{23}(-1), C_{12}(-1)$

$=-4$ C_2 પ્રત્યે વિસ્તરણ કરતા

33. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=3abc-a^3-b^3-c^3$

$=-(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

$=-\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]<0$ ઋણ

34. $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(c-a) - (a-b)(b-c)(c-a)$

$= 0$

35. સમીકરણો $ax + y + z = 0$

$x + by + z = 0$

$x + y + cz = 0$

આપેલું છે કે $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & b-1 & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \because R_{23}(-1), R_{12}(-1)$

$\therefore\ a(b-1)(c-1) - 1(1-a)(c-1) + 1\,(1-a)(1-b) = 0$

$\therefore \frac{a}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 0 \quad \because (1-a)\,(1-b)\,(1-c) \neq 0$ વડે ભાગતાં,

$\therefore \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1$

36. સહગુણક શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} -1 & a & a \\ b & -1 & b \\ c & c & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 1+a & 1+a \\ b & -1-b & 0 \\ c & 0 & -1-c \end{vmatrix} = 0 \quad \because C_{12}(-1), C_{13}(-1)$

$\therefore \begin{vmatrix} \frac{-1}{1+a} & 1 & 1 \\ \frac{b}{1+b} & -1 & 0 \\ \frac{c}{1+c} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \because R_1\left(\frac{1}{1+a}\right), R_2\left(\frac{1}{1+b}\right), R_3\left(\frac{1}{1+c}\right)$

$\therefore \frac{-1}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 0$

$\therefore \frac{-1}{1+a} + 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = 0$

$\therefore \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

37. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -8 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -2\lambda + 32 - 6\lambda + 72 = 0$

$\Rightarrow -8\lambda + 104 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 13$

38. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -1 - 18 - 3k + 4 + k = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{15}{2}$

39. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow a - 2b + c = 0$

$\Rightarrow$ a, b, c સમાંતર શ્રેણિમાં છે.

40. $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1 - a\left(-a^2\right) = 0$

$\Rightarrow a^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow a = -1$

41. સ્પષ્ટ છે કે,

જો $x = -1 \Rightarrow R_2 = R_3$ અને $D = 0$

જો $x = 2 \Rightarrow R_1 = R_3$ અને $D = 0$

$\therefore$ ઉકેલ ગુણ $\{-1, 2\}$

42. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ અનન્ય ઉકેલ મળે

43. $|A| = 1 \neq 0$,

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $A^4 = I$

$\therefore A^4 A^{-1} = IA^{-1} \Rightarrow A^3 = A^{-1}$

44. $U_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ લેતાં,

$AU_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 2x+y \\ 3x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = 1, y = -2, z = 1$

$\therefore U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, તેવી જ રીતે $U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\therefore U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |U| = 3$

45. $U^{-1} = \frac{1}{|U|} \text{adj} U = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -7 & -5 & -3 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

U^{-1} ના ઘટકોનો સરવાળો $= \frac{1}{3}\left[-1-2+0-7-5-3+9+6+3\right] = 0$

46. $$[3\ 2\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [-1\ 4\ 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [5]$$

$\therefore$ det $[5] = 5$

47. $|A| = 8 + 2(9-6) = 2a - 4$

$a_{12}\ (=1)$ નો $|A|$ માં સહઅવય $= 8$

A^{-1} માં $A_{21} = \frac{8}{|A|} = -4$

$\Rightarrow \frac{8}{2a-4} = -4 \Rightarrow \frac{2}{2a-4} = -1$

$\Rightarrow 2 = -2a + 4 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$\therefore |A| = -2$

A^{-1} માં $A_{23} = C = \frac{|A| \text{ માં a નો સહઅવયવ}}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1$

48. A ના સહઅવયવનો શ્રેણિક = $A^C = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj}A = (A^C)^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 3A^T$$

49. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ અને $A^3 = O$

50. $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ અને $\omega^2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ લેતાં, $\omega^3 = 1$ અને $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{i} & \frac{\omega^2}{i} \\ -\frac{\omega^2}{i} & -\frac{\omega}{i} \end{bmatrix} = \frac{\omega}{i} \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = \frac{\omega^2}{i^2} \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} 1-\omega^2 & 0 \\ 0 & 1-\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega^2 + \omega^4 & 0 \\ 0 & -\omega^2 + \omega^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\omega & 0 \\ 0 & 1+2\omega \end{bmatrix}$$

$$f(A) = A^2 + 2I = \begin{bmatrix} 1+2\omega & 0 \\ 0 & 1+2\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (3 + 2\omega) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{3 + 2\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(2 + i\sqrt{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

51. $A^2 = A$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -2 & -16-4x \\ -1 & 3 & 16+4x \\ 4+x & -8-2x & -12+x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}$$

બંને બાજુ ઘટકો સરખાવતાં,

$4 + x = 1 \Rightarrow x = -3$

52. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{-1}{b^2} & \frac{-1}{c^2} \\ \frac{-1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & \frac{-1}{c^2} \\ \frac{-1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{-4}{a^2 b^2 c^2} \neq 0$ અનન્ય ઉકેલ મળે

53. $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore$ $n = 2$ માટે, $A^2 = (d)$ જવાબ

54. $A^3 = A \times A^2 = A\ (5A - 7I) = 5A^2 - 7A = 5\ (5A - 7I) - 7A$

$= 25A - 35I - 7A = 18A - 35I$

તેવી જ રીતે $A^4 = A \cdot A^3 = A\ (18A - 35I)$

$= 18\ (5A - 7I) - 35A = 55A - 126I$

$A^5 = 149A - 385I = aA + bI$

$\therefore\ a = 149,\ b = -385$

$\therefore\ 2a - 3b = 2\ (149) - 3\ (-385) = 1453$

55. વિસ્તરણ કરતાં,

$\therefore\ 1\ (c^2 - ab) - a\ (c - a) + b\ (b - c) = 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$\therefore\ \frac{1}{2} \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0$

$\therefore\ a = b = c \Rightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ 64 \left(\sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) = 64 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 144$

56. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$

$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot 2A = 2A^2 = 2(2A) = 4A = 2^2 A = 2^{3-1} A, \ldots,\ A^n = 2^{n-1} A$

$\therefore A^{2013} = 2^{2012} A$

57. $A^2 = 3A$

$A^3 = A^2 \cdot A = 3A \cdot A = 3A^2 = 3(3A) = 3^2A = 3^{3-1}A, \ldots, A^n = 3^{n-1}A$

$A^{2013} = 3^{2012}\ A$

58. $|A| = 1(0+3) + 1(0+6) + 1(0-4) = 5$

$$\frac{|adj B|}{|C|} = \frac{|adj(adj A)|}{|5A|} = \frac{|A|^{(3-1)^2}}{5^3 |A|} = \frac{|A|^4}{5^4} = 1$$

59. $|A| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$adj\ (adj A) = |A|^{n-2} A = (1)^{3-2}\ A = A$

$\therefore\ \left|\left(adj\left(adj\left(adj\left(adj\ A\right)\right)\right)\right)\right| = \left|adj\ (adj\ A)\right|$

$= |A|^{(n-1)^2}$

$= |A|^4 = 1$

60. $A_r = r^2 - (r-1)^2 = 2r - 1$

$$\sum A_r = \sum(2r-1) = 2.\frac{r}{2}(r+1) - r = r^2$$

$$\sum_{r=1}^{2013} A_r = (2013)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{2013} A_r\right)} = 2013$$

61. આપેલ નિશ્ચાયક એ બે નિશ્ચાયકોનો ગુણાકાર છે.

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 0 \\ \bar{z} & z & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

62. $D = 1(1 - 3\sin\theta\cos\theta) - 3\cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta) + 1(\sin^2\theta - 1)$

$= 1 - 6\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta$

$= (3\cos\theta - \sin\theta)^2 = (a\cos\alpha + b\sin\alpha)^2$

$\therefore -\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{D} \le \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\ -\sqrt{9+1} \le (3\cos\theta - \sin\theta) \le \sqrt{9+1}$

$\therefore\ 0 \le (3\cos\theta - \sin\theta)^2 \le 10$

63. ગુણાકાર

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta\cos^2\phi + \cos\theta\sin\theta\times\cos\phi\sin\phi & \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi + \sin^2\phi\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\cdot\sin\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\cdot\cos\phi\sin\phi & \cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi + \sin^2\phi\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi.\cos(\theta-\phi) & \cos\theta\sin\phi\cos(\theta-\phi) \\ \sin\theta\cos\phi\cos(\theta-\phi) & \sin\theta\sin\phi\cos(\theta-\phi) \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ જો $\theta - \phi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \because \cos(\theta-\phi) = 0$

64. $D = \begin{vmatrix} 1 & \cos P & \cos^2 P \\ 1 & \cos Q & \cos^2 Q \\ 1 & \cos R & \cos^2 R \end{vmatrix} = -(\cos P - \cos Q)(\cos Q - \cos R)(\cos R - \cos P)$

જો $P < Q < R \quad \Rightarrow D > 0$

જો $P > Q > R \quad \Rightarrow D < 0$ $\because$ D મળી શકે નહી (નક્કી ન થઈ શકે)

65. $D = ([x]+[y]+[z]+1)\begin{vmatrix} 1 & [y] & [z] \\ 1 & [y]+1 & [z] \\ 1 & [y] & [z]+1 \end{vmatrix}$ $\because$ $C_{21}(-1)$, $R_{13}(-1)$ અને $C_1\left(\frac{1}{[x]+[y]+[z]+1}\right)$

$= ([x]+[y]+[z]+1)\begin{vmatrix} 1 & [y] & [z] \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \because R_{12}(-1),\ R_{13}(-1)$

$= [x]+[y]+[z]+1$

$\therefore$ D નું મહત્તમ મૂલ્ય $= 1 + 0 + 2 + 1 = 4$

66. $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$

$= \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)\begin{bmatrix} 1-\tan^2 x & -2\tan x \\ 2\tan x & 1-\tan^2 x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

67. (i) $f(x)\,f(y)=\begin{bmatrix}\cos x & 0 & \sin x\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin x & 0 & \cos x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos y & 0 & \sin y\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin y & 0 & \cos y\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos(x+y) & 0 & \sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{bmatrix}=f\,(x+y)$

(ii) $|f(x)|=1\neq 0,\ adj\big(f(x)\big)=\begin{bmatrix}\cos x & 0 & -\sin x\\ 0 & 1 & 0\\ \sin x & 0 & \cos x\end{bmatrix}=f(-x)$

$\therefore [f(x)]^{-1}=\dfrac{1}{|f(x)|}\,adj\,\big(f(x)\big)=\dfrac{1}{1}f(-x)=f(-x)$

(iii) $[f(x)g(y)]^{-1}=[g(y)]^{-1}\,[f(x)]^{-1}=g\,(-y)\,f\,(-x)$ $\qquad\because$ (ii)

68. $D_1=x^3-3a^2x+2a^3,\ D_2=x^2-a^2$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(D_1)=3x^2-3a^2=3\left(x^2-a^2\right)=3D_1$

69. $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \beta\\ 1 & \alpha^2 & \beta^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\end{vmatrix}$ ($\because$ D એ બે નિશ્ચાયકોનો ગુણાકાર છે)

$=\{(1-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-1)\}\{(1-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-1)\}$

$=(1-\alpha)^2\,(1-\beta)^2\,(\alpha-\beta)^2$

આપેલું છે કે $x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore 1+b+c=(1-\alpha)(1-\beta)$

અને $\alpha+\beta=-b,\ \alpha\beta=c$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-b)^2-4c=b^2-4c$

$\therefore D=(1+b+c)^2\,(b^2-4c)$

70. સુરેખ સમીકરણો $a\log x+b\log y=m$

$c\log x+d\log y=n$

ક્રેમરની રીત : $\log x = \frac{D_1}{D}, \log y = \frac{D_2}{D}$

$$\therefore\ x = e^{\frac{D_1}{D}},\ \ y = e^{\frac{D_2}{D}}$$

71.

$$D = \sqrt{6}\begin{vmatrix} 1 & 2i & 3+\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3}+2\sqrt{2}i & 3\sqrt{2}+\sqrt{6}i \\ \sqrt{3} & \sqrt{2}+2\sqrt{3}i & 3\sqrt{3}+2i \end{vmatrix} \qquad \because C_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \sqrt{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6}i \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 2i \end{vmatrix} \qquad \because C_{12}(-2i), C_{13}(-3)$$

$$= \sqrt{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \qquad \because C_{23}\ \left(-\sqrt{2}i\right)$$

$= 0 - 0 + \sqrt{6}\ .\ \sqrt{6}\ (2-3) = -\ 6$ વાસ્તવિક સંખ્યા

72. વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે 1-D, 2-A, 3-B, 4-C

73. $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -\sin x \\ 0 & 2 & \cos x \\ \sin x & -\cos x & 0 \end{vmatrix} \qquad \because C_{31}\ (-2\sin x), C_{32}\ (2\cos x)$

$= \ 2\ \left(0 + \cos^2 x\right) - 0 - \sin x\ (0 - 2\sin x)$

$= 2$

$f^1(x) = 0$

$$\therefore I\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) + f'\ (x)\right) dx$$

$= 2\ [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$

74. $\frac{f^1(x)}{x} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & -\sin x \\ x & \frac{-\tan x}{x} & -x^2 \\ 2x & \sin 2x & 5x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 2x & -\sec^2 x & -3x^2 \\ 2 & \frac{\sin 2x}{x} & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ x & -\frac{\tan x}{x} & -x^2 \\ 2 & 2\cos 2x & 5 \end{vmatrix}$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{f^1(x)}{x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 0 + 2 + 2 = 4$

75. ધારો કે $S_n = 1 + 2 + 6 + 15 + \ldots + t_{n-1} + t_n$

જ્યાં t_n = શ્રેણિક M_n નો a_{11} સ્થાનનો ઘટક સૌ પ્રથમ આપણે M_n ના a_{11} સ્થાનનો ઘટક મેળવીશું.

$S_n = 1 + 2 + 6 + 15 + \ldots + t_{n-1} + t_n$

$S_n \quad = 1 + 2 + 6 + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

$0 = 1 + 1 + 4 + 9 + \ldots + (t_n - t_{n-1}) - t_n$

$\therefore t_n = 1 + \left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right)$

$= 1 + \frac{n-1}{6}((n-1)+1)(2(n-1)+1)$

$= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

સ્પષ્ટ છે કે $(n \times n)$ શ્રેણિકમાં ક્રમિક વિકર્ણ ઘટકો વચ્ચેનું અંતર $(n+1)$ હોય છે.

પ્રથમ પદ $= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, તફાવત $= n+1$

$\therefore M_n$ ના વિકર્ણ ઘટકોનો સરવાળો

$= \frac{n}{6}\left[2\left(1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) + (n-1)(n+1)\right]$

$= \frac{n}{6}\left[2n^3 + n + 3\right]$

$n = 6$ માટે, M_6 ના વિકર્ણ ઘટકોનો સરવાળો $= 441$

76. બંને બાજુ $x = 0$ લેતાં, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0+0+0+f \therefore f = 1$

બંને બાજુ વિકલન કરી ને $x = 0$ મુકતાં,

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e \quad \therefore e = 3$$

બંને બાજુ $x = 1$ મુકતાં,

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a+b+c+d+e+f$$

$\therefore 4 = a+b+c+d+3+1$

$\therefore a+b+c+d = 4 \quad ...(1)$

બંને બાજુ $x = -1$ મૂકતાં,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -a+b-c+d-e+f$$

$\therefore 0 = -a+b-c+d-3+1$

$\therefore -a+b-c+d = 2 \quad ...(2)$

(1) અને (2) પરથી

$a+c = -1, \quad b+d = 1$

77. $x = 0$ મૂકતાં, અચળ પદ $= f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

વિકલન કરીને $x = 0$ મૂકતાં,

$$x \text{ નો સહગુણક } f^1(0) = \begin{vmatrix} 3m & 5n & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3m & 5n \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5n & 0 & 3m \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ માગેલ સરવાળો $= f(0) + f^1(0) = 0 + 0 = 0$

78. $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1+\sin 2x \end{vmatrix} \quad \because R_{31}(-1), R_{32}(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 2+\sin 2x \end{vmatrix} \qquad \because C_{13}(1), C_{23}(1)$$

$= 2 + \sin 2x$

હવે, $-1 \le \sin x \le 1$

$1 \le 2 + \sin 2x \le 3 \qquad \therefore M = 3, m = 1$

1. $M^2 + m^{2013} = 10$

2. $M^3 - m^3 = 26$

3. $M^{2k} - m^{2k} =$ અયુગ્મ $-1 =$ હંમેશા યુગ્મ

4. $2M - 3m = 3$, $M + m = 4$, $M + 2m = 5$ જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓના માપ દર્શાવે છે.

79. આપણે જાણીએ છીએ કે

$2 < e < 3 \Rightarrow [e] = 2$

$3 < \pi < 4 \Rightarrow [\pi] = 3$

$3 < \pi^2 - 6 < 4 \; [\pi^2 - 6] = 3$

$$\therefore \det \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

80. અચળ પદ $f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

81. $D = \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & \sin 2\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta & -\sin 2\theta \\ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{vmatrix} \qquad \because R_{32}(1)$

$= 0 \qquad \because R_1 = R_2$

જ્યાં $\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\theta\cos\frac{2\pi}{3} = 2\sin\theta\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin\theta$

તેવી જ રીતે $\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\theta$ અને

$$\sin\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(2\theta-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin 2\theta$$

82. $A^2 = B$

$\therefore \begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\ \alpha+1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\ \alpha^2 = 1,\ \alpha + 1 = 5$

વિકલ્પમાં આપેલ α ની કોઈપણ કિંમત ઉપરના બંને સમીકરણનું સમાધાન કરતી નથી.

$\therefore\ \alpha$ ન મળે.

83. $A^2 = 9I \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\ 2\alpha+6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ \alpha^2 = 9,\ 2\alpha + 6 = 0$ ....(i)

$\Rightarrow\ \alpha = -3$ જે (i) નું સમાધાન કરે છે.

84. $A^2 = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -9 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -9 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$

$\therefore\ I + 2A + 3A^2 + \ldots\infty = I + 2A + 0 + \ldots\infty$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 2\\ -18 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -18 & -5\end{bmatrix}$

85. $\det(M - I) = \det(M - I)^T$

$= \det(M^T - I)$

$= \det(M^T - M^T M)$

$= \det(M^T(I - M))$

$= \det M^T \cdot \det(I - M)$

$= \det M.\det(-(M-I))$

$= (-1)^3 \det(M-I)$

$\therefore \det(M-I) = -\det(M-I)$

$\therefore \det(M-I) = 0$

86. $\begin{vmatrix} \lambda & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ -1 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$

C_1 સાપેક્ષ વિસ્તરણ કરતાં, $\lambda = \cos 2\alpha + b\sin 2\alpha$ મળે તેને $f(x) = a\cos\alpha + b\sin\alpha$ સાથે સરખાવતાં,

જેનો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}\right]$

(i) λનો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ (જ્યાં $a = 1, b = 1$)

(ii) $\lambda = 1$ માટે $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 1$ ને બંને બાજુ $\sqrt{2}$ વડે ભાગતાં,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore 2\alpha - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = n\pi, n\pi + \frac{\pi}{4}$

87. $|A - \lambda I| = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$

$\Rightarrow A^2 - 8A + 7I = O$

$\Rightarrow A^2 = 8A - 7I$

$\Rightarrow k = -7$

88. ધારોકે $\begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix}$ એકમ ઘટક છે.

$\therefore \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3kx & 3kx & 3kx \\ 3kx & 3kx & 3kx \\ 3kx & 3kx & 3kx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$\therefore\ 3kx = x$

$\therefore\ (3k-1)x = 0$

$\therefore\ k = \frac{1}{3}\ (\because x \neq 0)$

$\therefore$ માગેલ એકમ ઘટક $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

89. $AB = I \Rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & y & y \\ y & y & y \\ y & y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3xy & 3xy & 3xy \\ 3xy & 3xy & 3xy \\ 3xy & 3xy & 3xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 3xy = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{9x}$ અથવા $x = \frac{1}{9y}$

$\therefore$ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} y & y & y \\ y & y & y \\ y & y & y \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\begin{bmatrix} \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} \\ \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} \\ \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} & \frac{1}{9y} \end{bmatrix}$

90. $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad |I - A| = 4 \neq 0$

$\therefore (I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \, adj \, (I - A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \phi(A) = (I + A)(I - A)^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

91. $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |I - A| = 5 \neq 0$

$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \, adj \, (I - A) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ લંબશ્રેણિક $\phi(A) = (I + A)(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

92. $I + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, I - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}, |I - A| = 31 \neq 0$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|}\left(adj\ (I - A)\right) = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 26 & 3 & 11 \\ 7 & 2 & -3 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ લંબશ્રેણિક $\phi(A) = (I + A)(I - A)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 26 & 3 & 11 \\ 7 & 2 & -3 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 21 & 6 & 22 \\ 14 & -27 & -6 \\ 18 & 14 & -21 \end{bmatrix}$$

93. શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક સમીકરણ $|A - \lambda I| = 0$ છે.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

$\Rightarrow A^3 - 7A^2 + 11A - 5I = O$

$\Rightarrow A^3 - 7A^2 + 10A = 5I - A$

94. શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક સમીકરણ $|A - \lambda I| = 0$ છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow A^2 - 5A - 2I = O$

$\Rightarrow I - 5A^{-1} - 2A^{-2} = O$

$\Rightarrow A^{-2} = \frac{1}{2}\left[I - 5A^{-1}\right]$

$\Rightarrow A^4 = \frac{1}{4}\left(I - 5A^{-1}\right)^2$

$\Rightarrow A^{-4} = \frac{1}{4}\left(I - 10A^{-1} + 25A^{-2}\right)$

$\Rightarrow A^{-4} = \frac{1}{4}\left[I - 10A^{-1} + \frac{25}{2}\left(I - 5A^{-1}\right)\right]$

$\Rightarrow\ 8A^{-4} = 27I - 145A^{-2}$

95. $(1-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$3x_1 + (1-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0$

$2x_1 + 3x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow\ (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 6\right) - 2(3-3\lambda-4) + 3(9-2+2\lambda) = 0$

$\Rightarrow\ (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 5) - 2(-3\lambda - 1) + 3(7+2\lambda) = 0$

$\Rightarrow\ \lambda^2 - 2\lambda - 5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda + 2 + 21 + 6\lambda = 0$

$\Rightarrow\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda + 18 = 0$

આપેલા વિકલ્પોમાં $\lambda = 6$ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

96. સહગુણક શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

$$D = \begin{vmatrix} \sec^2\alpha & -\tan^2\alpha & 1 \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \sec^2\alpha \sin^2\alpha + \tan^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= \tan^2\alpha \neq 0$ અનન્ય ઉકેલ મળે

$\therefore\ D_x = D_y = D_z = \tan^2\alpha$

$\therefore\ x = \dfrac{Dx}{D} = 1, \qquad y = \dfrac{Dy}{D} = 1, \quad z = \dfrac{D_z}{D} = 1$

$\therefore\ (x, y, z) = (1, 1, 1)$

97. સહગુણક શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k+7 & -3 \\ 3 & 4 & k-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \quad (\because \text{ વિસ્તર કરતાં})$$

$\Rightarrow\ k = \pm 1$

98. જવાબ (d) સ્પષ્ટ છે.

99. $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, 2$

હવે $\lambda = 1$ માટે

$3x + 6y + 6z = 0$

$x + 2y + 2z = 0$

$-x - 5y - 3z = 0$

$\therefore$ ક્રોસ ગુણાકારની રીતથી $\frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$ $\quad \therefore X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ...(i)

$\lambda = 2$ માટે

$2x + 6y + 6z = 0$

$x + y + 2z = 0$

$-x - 5y - 4z = 0$

$\therefore$ ક્રોસ ગુણાકારની રીતથી $\therefore \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-4}$ $\quad \therefore X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ...(ii)

(i) અને (ii) પરથી $\cos\theta = \frac{(4, 1, -3)\cdot(3, 1, -2)}{\sqrt{16+1+9}\,\sqrt{9+1+4}} = \frac{19}{\sqrt{364}}$

$\therefore \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \frac{\sqrt{3}}{19}$

100. $\begin{vmatrix} A & 3 & 6 \\ 100A+8+20 & 300+9+30B & 600+C+20 \\ 2 & B & 2 \end{vmatrix}$ $\quad \because R_{12}(100), R_{31}(10)$

$= \begin{vmatrix} A & 3 & 6 \\ A28 & 2B9 & 62C \\ 2 & B & 2 \end{vmatrix} = km$ જે k વડે વિભાજ્ય છે કારણ કે R_2 એ k વડે વિભાજ્ય છે.

101. $I + A + A^2 + \ldots \infty = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

102. $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow A^2 + A + I = O$

$\Rightarrow A^2 = -A - I$

$\Rightarrow A^3 = -A^2 - A = -(-A - I) - I$

$\Rightarrow A^3 = I$

103. પાસ્કલના નિયમ પ્રમાણે $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

$\therefore \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r} = \binom{n}{r+1}$

$$\therefore \text{LHS} = \begin{vmatrix} \binom{x}{r} & \binom{x}{r+1} & \binom{x+1}{r+2} \\ \binom{y}{r} & \binom{y}{r+1} & \binom{y+1}{r+2} \\ \binom{z}{r} & \binom{z}{r+1} & \binom{z+1}{r+2} \end{vmatrix} \qquad \because C_{23}(1) \ \& \ C_{12}(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{x}{r} & \binom{x}{r+1} & \binom{x}{r+2} \\ \binom{y}{r} & \binom{y}{r+1} & \binom{y}{r+2} \\ \binom{z}{r} & \binom{z}{r+1} & \binom{z}{r+2} \end{vmatrix} \qquad \because C_{23}(-1)$$

$\therefore \lambda = 1$

104. $x + 2y + 3z = 6 \quad \ldots(1)$

$x + 3y + 5z = 9 \quad \ldots(2)$

$2x + 5y + \lambda z = \mu \quad \ldots(3)$ લેતાં,

હવે 3-2(1), (3), -2(2) કરતાં,

$y + (\lambda - 6)z = \mu - 12$ ...(4)

$-y + (\lambda - 10)z = \mu - 18$ ...(5)

(4) + (5) કરતાં $(\lambda - 8)z = \mu - 15$ મળે.

હવે, $\lambda \neq 8, \mu \in R \Rightarrow$ અનન્ય ઉકેલ મળે

$\lambda = 8, \mu \neq 15 \Rightarrow$ ઉકેલ ન મળે

$\lambda = 8, \mu = 15 \Rightarrow$ અનંત ઉકેલ મળે

105. $AA^T = I$ $\because$ આપેલું છે કે A લંબચ્છેદી શ્રેણિક છે.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\beta^2 + \gamma^2 & 2\beta^2 - \gamma^2 & -2\beta^2 + \gamma^2 \\ 2\beta^2 - \gamma^2 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\ -2\beta^2 + \gamma^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore 4\beta^2 + \gamma^2 = 1$ ...(i)

$2\beta^2 - \gamma^2 = 0$ ...(ii)

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ...(iv)

$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$ ...(iv)

સમીકરણો (i), (ii), (iii) અને (iv) ઉકેલતાં,

$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

જવાબો

1	(b)	22	(c)	43	(c)	64	(d)	83	(c)
2	(a)	23	(b)	44	(a)	65	(c)	84	(c)
3	(c)	24	(a)	45	(b)	66	(b)	85	(a)
4	(d)	25	(b)	46	(a)	67 (i)	(d)	86 (i)	(b)
5	(c)	26	(d)	47	(b)	67 (ii)	(c)	86 (ii)	(c)
6	(d)	27	(a)	48	(d)	67 (iii)	(c)	87	(d)
7	(a)	28	(d)	49	(c)	68	(d)	88	(a)
8	(c)	29	(a)	50	(d)	69	(a)	89	(d)
9	(d)	30	(c)	51	(d)	70	(c)	90	(b)
10	(b)	31	(c)	52	(a)	71	(a)	91	(a)
11	(b)	32	(d)	53	(d)	72	(b)	92	(b)
12	(b)	33	(c)	54	(c)	73	(b)	93	(a)
13	(a)	34	(a)	55	(b)	74	(d)	94	(b)
14	(a)	35	(a)	56	(a)	75	(b)	95	(d)
15	(a)	36	(b)	57	(c)	76	(c)	96	(a)
16	(a)	37	(b)	58	(b)	77	(d)	97	(a)
17	(b)	38	(c)	59	(a)	78	(c)	98	(d)
18	(c)	39	(a)	60	(d)	79	(d)	99	(b)
19	(d)	40	(c)	61	(d)	80	(b)	100	(c)
20	(c)	41	(d)	62	(c)	81	(a)	101	(c)
21	(a)	42	(b)	63	(b)	82	(d)	102	(a)
								103	(b)
								104	(b)
								105	(c)

એકમ - 4

ક્રમચય અને સંચય

અગત્યના મુદ્દા

* **ગણતરીનો મૂળભૂત સિધ્ધાંત** :- જો એક ક્રિયા m ભિન્ન રીતે થઇ શકે તથા તેની આનુષંગિક બીજી ક્રિયા p ભિન્ન રીતે થઇ શકે અને આ બંનેને આનુષંગિક ત્રીજી ક્રિયા r રીતે થઇ શકે તો ત્રણેય ક્રિયા સાથે કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા mpr છે.
* **ક્રમગુણિત (ફેક્ટોરિયલ)** :- પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગુણાકારને ક્રમગુણિત કહે છે. સંકેતમાં તેને n! અથવા Ln વડે દર્શાવાય છે.

  → $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$

  → $n! = n.(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$

  → $0! = 1$
* **ક્રમચયો (ગોઠવણીઓ)** :- આપેલ ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી અમુક અથવા બધીજ વસ્તુઓની ચોક્કસ ગોઠવણીને ક્રમચય કહે છે.

  → ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-r+1)$

  → ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ → ${}_nP_r = n.{}_{n-1}P_{r-1}$

  → ${}_nP_n = n!$ → ${}_nP_1 = n$ → ${}_nP_2 = n(n-1)$
* n ભિન્ન વસ્તુઓની r સ્થાનમાં પુનરાવર્તન સહિતની ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા $= n^r$
* **સમસ્વરૂપ વસ્તુના ક્રમચયો** :- આપેલી n વસ્તુઓમાંથી P_1 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે. તેમનાથી ભિન્ન P_2 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે. તે જ રીતે આગળની વસ્તુઓથી ભિન્ન P_K સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા,

  $$\frac{n!}{P_1!P_2!....P_k!}$$
* **વર્તુળાકાર ક્રમચયઃ**- n ભિન્ન વસ્તુઓને વર્તુળ પર ગોઠવવાની ક્રિયાને વર્તુળકાર ક્રમચયો કહે છે.

  → n ભિન્ન વસ્તુઓના વર્તુળાકાર ક્રમચયોની સંખ્યા (n-1)! થાય

  → વર્તુળાકાર ક્રમચયમાં સમઘડી અને વિષયઘડી દિશાની ગોઠવણીને ભિન્ન ગણવામાં આવે છે.

  → જો સમઘડી અને વિષયઘડી દિશાની ગોઠવણીને ભિન્ન ન ગણવાની હોયતો n ભિન્ન વસ્તુઓની વર્તુળાકાર ગોઠવણી $\dfrac{(n-1)!}{2}$ મળે.

ઉદા. 1 5 વ્યક્તિઓને વર્તુળાકાર ટેબલ પર ગોઠવવાના પ્રકારો = (5-1)! = 4! કારણકે અહી સમઘડી અને વિષમઘડી ગોઠવણીઓ ભિન્ન છે.

ઉદા. 2 મોતીની ગોઠવણી, હારની ગોઠવણી (Neclaces) માળામાં ફૂલોની ગોઠવણી વગેરે ગોઠવણીઓમાં n ભિન્ન ૪ વસ્તુઓની વર્તુળાકાર ગોઠવણીના પ્રકારો $\frac{(n-1)!}{2}$ મળે.

→ n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની ગોઠવણી કે જેમાં એક ચોક્કસ વસ્તુ દરેક ગોઠવણીમાં હોય તેના કુલ પ્રકારો $r.{}_{n-1}P_{r-1}$

→ n શૂન્યેતર અંકોની મદદથી મળતી સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો = (અંકોનો સરવાળો) $(n-1)!\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)$

→ n! માં આવેલી અવિભાજ્ય સંખ્યા P નો મહત્તમ ઘાતાંક $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{P^2}\right]+\dots\dots\dots+\left[\frac{n}{P^r}\right]$

જ્યાં r એ સૌથી મોટો પૂર્ણાંક છે કે જેથી $P^r \le n \le P^{r+1}$

* **સંચય (પસંદગી) :-** n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓની પસંદગી ને r વસ્તુઓનો સંચય કહે છે. તેને $\binom{n}{r}$ અથવા ${}_nC_r$ અથવા ${}^nC_r$ અથવા $C(n, r)$ વડે દર્શાવવાય છે. $n \in N$

→ $\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.\ 0 < r \le n$

→ $\binom{n}{0} = 1 \rightarrow \binom{n}{n} = 1 \rightarrow \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},\ 0 \le r \le n$

→ $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

→ $\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Rightarrow \text{(i) } x = y \text{ or (ii) } x + y = n$

→ $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

→ $n\binom{n-1}{r-1} = (n-r+1)\binom{n}{r-1},\ 1 \le r \le n$

→ જો n યુગ્મ હોયતો $\binom{n}{r}$ ની મહત્તમ કિંમત $\binom{n}{n/2}$ મળે. જ્યાં $0 \le r \le n$

→ જો n અયુગ્મ હોયતો, $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ અથવા $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ મળે, જ્યાં $0 \le r \le n$

→ n ક્રમિક પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર n! વડે વિભાજ્ય છે.

→ n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી એક કે એકથી વધુ વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકારો $2^n - 1$

→ n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી શૂન્ય, એક અથવા વધુ વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકારો 2^n

→ n સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકાર = 1

→ n સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ પૈકી એક અથવા વધુ (ઓછામાં ઓછી એક) વસ્તુની પસંદગીના પ્રકારો n

→ n સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ પૈકી શૂન્ય એક અથવા વધુ વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકારો n+1
(અહીં એક પણ વસ્તુ (શૂન્ય વસ્તુ) પસંદ ન થાય તે વિકલ્પ માટે 1 ઉમેરેલ છે)

→ m+n+p વસ્તુઓમાંથી શૂન્ય, m સમસ્વરૂપ n સમસ્વરૂપ અને p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકારો (m+1) (n+1) (p+1)

→ m+n+p વસ્તુઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુની પસંદગીના પ્રકારો (m+1) (n+1) (p+1) -1

→ જ્યાં m સ્વરૂપ, n સમસ્વરૂપ અને p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે.
(અહીં -1 એ એકપણ વસ્તુ પસંદ ન થાય તે વિકલ્પ માટે છે)

→ m સમસ્વરૂપ, n સમસ્વરૂપ અને p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ પૈકી દરેક પ્રકારની ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકારો mnp

→ p સમસ્વરૂપ, q સમસ્વરૂપ, r સમસ્વરૂપ અને n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી ઓછામાં એક વસ્તુની પસંદગીના પ્રકારો $= (p+1)(q+1)(r+1)2^n - 1$

→ n ભિન્ન વસ્તુઓ અને m સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક વસ્તુની પસંદગીના પ્રકારો $2^n(m+1) - 1$

→ m+n+p વસ્તુઓને m,n અને p વસ્તુઓવાળા ભિન્ન સમૂહમાં વિભાજીત કરવાના પ્રકારો

$$ {}_{m+n+1}C_m \cdot {}_{n+1}C_n \cdot {}^{P}C_p = \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!} $$

→ m+n+p વસ્તુઓને 3 વ્યકિતઓ વચ્ચે m,n અને p સંખ્યાઓ વાળા સમૂહમાં વહેંચવાના પ્રકારો

$$ \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!} \times 3! $$

(અહીં 3! એ 3 વ્યક્તિઓને અંદરો અંદર ગોઠવવાના પ્રકારો છે.)

→ mn ભિન્ન વસ્તુઓને n વસ્તુઓ ધરાવતા m સમાન સમુહોમાં વહેંચવાના પ્રકારો $= \frac{(m\ n)!}{(n!)^m} \times \frac{1}{m!}$

→ mn ભિન્ન વસ્તુઓને સમાન રીતે m વ્યક્તિઓમાં વહેંચવાના પ્રકારો $= \frac{(m\ n)!}{(n!)^m}$

→ n બાજુઓવાળા બહુકોણના વિકર્ણોની સંખ્યા ${}^nC_2 - n = \frac{n(n-3)}{2}, n > 3$

→ કોઇપણ 3 અસમરેખ હોય તેવા સમતલના n ભિન્ન બિંદુઓથી મળતા ત્રિકોણની સંખ્યા ${}^nC_3$

→ સમતલના n ભિન્ન બિંદુઓ પૈકી m બિંદુઓ સમરેખ છે આ બિંદુઓથી મળતી રેખાઓની સંખ્યા $^{n}C_{2} - {}^{m}C_{2} + 1$

→ સમતલના n ભિન્ન બિંદુઓ પૈકી m બિદુઓ સમરેખ છે. આ બિંદુઓથી મળતા ત્રિકોણની સંખ્યા $^{n}C_{3} - {}^{m}C_{3}$

→ એક વર્તુળ પરના n ભિન્ન બિંદુઓથી મળતા રેખાઓની સંખ્યા $^{n}C_{2}$

→ એક વર્તુળ પરના n ભિન્ન બિંદુંઓથી મળતા ત્રિકોણની સંખ્યા $^{n}C_{3}$

→ એક વર્તુળ પરના n ભિન્ન બિંદુઓથી મળતા ચતુષકોણની સંખ્યા $^{n}C_{4}$

ÆÜþÜËÜ`

(1) n ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો કે જેથી ${}^{n-1}C_5 + {}^{n-1}C_6 < {}^nC_7$ સત્ય બને.

(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 28

(2) બે ચોક્કસ બુક્સ સાથે ન આવે તે રીતે n બુક્સ ને એક અભેરાઈ પર ગોઠવવામાં આવે છે. આવી ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો 480 હોય તો અભેરાઈ પરની બુક્સની સંખ્યા શોધો.

(a) 5 (b) 6 (c) 10 (d) 8

(3) $\{1,3,5,7,9\}$ અંકોનો ઉપયોગ કરી મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો કે જે સંખ્યાઓ 10,000 કરતા મોટી હોય.

(a) 6,66,600 (b) 6,66,660 (c) 6,66,66,600 (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(4) 'MATHEMATICS' શબ્દના અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી ચાર અક્ષરોવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

(a) 756 (b) 1680 (c) 2454 (d) 18

(5) જો $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r}$ તો $\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} =$ __________

(a) $(n-1)a_n$ (b) na_n (c) $\frac{1}{2}na_n$ (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(6) જો ${}^nC_r = {}^nC_{r-1}$ અને ${}^nP_r = {}^nP_{r+1}$ હોય તો n ની કિંમત __________

(a) 3 (b) 4 (c) 2 (d) 5

(7) અંકો 22,33,55,888 ની પુનઃગોઠવણી થી નવ અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય કે જેથી અયુગ્મ અંકો યુગ્મ સ્થાને હોય.

(a) 16 (b) 36 (c) 60 (d) 180

(8) "SUCCESS" શબ્દના અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બધા S સાથે ન આવે તે રીતે ગોઠવતા મળતા શબ્દોની સંખ્યા______

(a) 60 (b) 120 (c) 360 (d) 420

(9) $(1+x)^n$ના વિસ્તરણમાં 5માં, 6ઠ્ઠા અને 7માં પદોના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો n ની શક્ય કિંમત

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

(10) પુનરાવર્તન કર્યા વિના 0, 1, 2, 3, 4, 5 અંકોના ઉપયોગથી 3000 કરતા મોટી કેટલી સંખ્યાઓ મળે.?

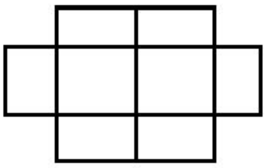
(a) 1240 (b) 1280 (c) 1320 (d) 1380

(11) એક પરીક્ષામાં a_i વિદ્યાર્થીઓ ઓછામાં ઓછા i ખોટા જવાબો આપ્યા. જયાં i = 1, 2, 3....K કોઈપણ વિદ્યાર્થીઓ K કરતા વધુ ખોટા જવાબો આપ્યા નથી. તો કુલ ખોટા જવાબો ની સંખ્યા

(a) $a_1 + a_2 + \ldots + a_K$ (b) $a_1 + 2a_2 + \ldots + Ka_K$

(c) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k$ (d) $\frac{K}{2}(K+1)$

(12) નીચેની આકૃતિમાં છ x ને એવી રીતે ગોઠવો કે તેથી દરેક હારમાં ઓછામાં ઓછો એક x હોય, આવી ગોઠવણીના પ્રકારો



(a) 18 (b) 22 (c) 26 (d) 30

(13) 0, 1, 2, 3, 4, 5 અંકોની મદદથી પુનરાવર્તન કર્યા વિના પાંચ અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ મળે જે 3 વડે વિભાજય હોય ?

(a) 216 (b) 184 (c) 256 (d) 225

(14) ચાર વર્તુળો અને ચાર સુરેખાઓ એકબીજાને વધુમાં વધુ કેટલા બિંદુઓએ છેદશે ?

(a) 26 (b) 56 (c) 50 (d) 72

(15) ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA પર અનુક્રમે 3, 4 અને 5 બિંદુઓ છે. આ બિંદુઓ ને શિરોબિંદુઓ તરીકે લઈ કેટલા ત્રિકોણો બનાવી શકાય ?

(a) 220 (b) 204 (c) 205 (d) 195

(16) એક વર્ગમાં જુદાજુદા સાત શિક્ષકો એક દિવસે 7 પિરિયડ લે છે. A, B અને C એ આ સાત શિક્ષકો પૈકીના છે એક દિવસ A એ B પહેલા અને B એ C પહેલા પિરિયડ લે તેવી ગોઠવણીના પ્રકારો.

(a) 420 (b) 120 (c) 210 (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(17) જો ${}^{189}C_{35} + {}^{189}C_x = {}^{190}C_x$ હોય તો x = ...

(a) 34 (b) 35 (c) 36 (d) 37

(18) EXAMINATION શબ્દના બધા અક્ષરોને ડીક્ષનેરી ક્રમમાં ગોઠવતાં મળતા શબ્દોમાં, E થી શરૂ થતા શબ્દો પહેલા કુલ કેટલા શબ્દો બને ?

(a) 907, 200 (b) 970, 200 (c) 922, 700 (d) 709, 002

(19) 5 સમાન લાલ અને 6 સમાન કાળા મોતીઓની મદદથી કેટલી ભિન્ન માળાઓ બનાવી શકાય ?

(a) $\frac{11!}{6!5!}$ (b) ${}_{11}P_6$ (c) $\frac{10!}{2(6!5!)}$ (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(20) એક પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીએ 4 વિષયમાં પાસ થવાનું છે. તો તે કેટલી રીતે નાપાસ થઈ શકે ?

(a) 15 (b) 20 (c) 25 (d) 10

(21) અગ્રેજીના 10 મૂળાક્ષરો આપેલા છે. જેની મદદથી 5 અક્ષરોના શબ્દો કેટલા બને કે જેમાં ઓછામાં ઓછો એક અક્ષર પુનરાવર્તિત થાય ?

(a) 69, 760 (b) 98, 748 (c) 96, 747 (d) 97, 147

(22) જો p + q = 1 હોય તો

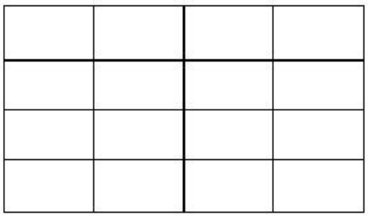
$$\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}^{n}c_r\, p^r\, q^{n-r} = ...$$

(a) 1 (b) np (c) npq (d) 0

(23) x, y, z, r નો ઉપયોગ કરીને 10 અક્ષરોના ભિન્ન કોડ બનાવવાના છે કે જેથી x એ ત્રણ વખત અને y એ 2 વખત દરેક કોડમાં આવે તો આવા કેટલા કોડ બને ?

(a) 60840 (b) 88400 (c) 80640 (d) 64080

(24) 2m-1 અને 2n-1 લંબાઈની બાજુઓ વાળા એક લંબચોરસને એક એકમના ચોરસમાં વિભાજીત કરવામાં આવે છે. જે માટે આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ સમાંતર રેખાઓ દોરવામાં આવે છે. તો કેટલા લંબચોરસ અયુગ્મ લંબાઈની બાજુઓવાળા મળે.



(a) mn (m+1) (n+1) (b) m^2n^2 (c) $(m+n+1)^2$ (d) 4^{m+n-1}

(25) 1, 2 અને 3 નો ઉપયોગ કરીને 7 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને કે જેના અંકોનો સરવાળો 10 થાય ?

(a) 55 (b) 66 (c) 77 (d) 88

(26) $^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {}^{52-j}C_3$ = ________

(a) $^{47}C_5$ (b) $^{52}C_5$ (c) $^{52}C_4$ (d) $^{53}C_7$

(27) $x_1x_2x_3x_4 = 770$ ના ધન પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા N હોય તો N ની કિંમત ________

(a) 250 (b) 252 (c) 254 (d) 256

(28) x+2 વસ્તુઓની ગોઠવણીના પ્રકારો a હોય, x વસ્તુઓમાંથી 11 વસ્તુઓની ગોઠવણીના પ્રકારો b હોય, x-11 વસ્તુઓની ગોઠવણીના પ્રકારો c હોય તથા a = 182bc હોય તો x ની કિંમત________

(a) 15 (b) 12 (c) 10 (d) 18

(29) એક સ્કૂલના 15 સ્ટાફમિત્રોને કેટલી ભિન્ન રીતે વર્તુળાકાર ટેબલ પર ગોઠવી શકાય કે જેથી સેક્રેટરી અને ડેપ્યુટી સેક્રેટરી ની વચ્ચે પ્રિન્સીપાલ બેસે ?

(a) $2\times12!$ (b) 24 (c) $2\times15!$ (d) $2!\times13!$

(30) n વસ્તુઓના ક્રમચયોની સંખ્યા શોધો કે જેથી એકની એક વસ્તુ ગમે તેટલી વખત પસંદ થાય પરંતુ r થી વધુ વખત પસંદ ન થાય.

(a) $\frac{n(n^n-1)}{n-1}$ (b) $\frac{n^r-1}{n-1}$ (c) $\frac{n(n^r-1)}{n-1}$ (d) $\frac{n(n-r)}{n-1}$

(31) એક કારમાં આગળની સીટમાં 2 અને પાછળની સીટમાં 1 વ્યક્તિ બેસી શકે છે. કુલ 6 માંથી 2 વ્યક્તિઓ ડ્રાયવિંગ કરી શકે છે તો આ કારમાં કેટલી રીતે વ્યક્તિઓને બેસાડી શકાય ?

(a) 10 (b) 20 (c) 30 (d) 40

(32) □ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA પર અનુક્રમે 3, 4, 5 અને 6 બિંદુઓ છે જુદી જુદી બાજુઓ પર શિરો બિંદુઓ હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ બનાવી શકાય ?

(a) 270 (b) 220 (c) 282 (d) 342

(33) એક ચેસ ટુર્નામેન્ટ માં153 રમતો રમાય. જો દરેક ખેલાડી બીજા એક જ ખેલાડી સાથે એકજ વખત રમ્યો હોય તો કુલ કેટલા ખેલાડીઓ હશે ?

(a) 17 (b) 51 (c) 18 (d) 35

(34) જેનો સ્થાનસદિશ $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ હોય કે જેથી $2^a + 3^b + 5^c$ એ 4 વડે વિભાજય થાય તેવા કેટલા બિંદુઓ મળે ?

(a) 140 (b) 70 (c) 100 (d) 75

(35) એક પ્રશ્નપત્રમાં n પ્રશ્નો છે. જેમાં 2^K વિદ્યાર્થીઓ એ ઓછામાં ઓછા n-k પ્રશ્નોના ખોટા જવાબો આપ્યા છે. જયાં K = 0, 1, 2, ... n. જો ખોટા જવાબોની સંખ્યા 4095 હોય તો n ની કિંમત ________

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 15

(36) જો E = $\{1,2,3,4\}$, F = $\{a,b\}$ તો E થી F ના વ્યાપ્ત વિધેયની સંખ્યા

(a) 14 (b) 16 (c) 12 (d) 32

(37) એક વર્ગમાં 5 છોકરાઓ અને g છોકરીઓ છે. દર રવિવારે 5 વિદ્યાર્થીઓને ઢીંગલી ઘરની મુલાકાતે મોકલવામાં આવે છે કે જેમાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ છોકરાઓ હોય, જુદાંજુદા ગ્રુપને મોકલવામાં આવે છે અને વર્ગશિક્ષક મુલાકાત લેનાર ગ્રુપની દરેક છોકરીઓને એક ઢીંગલી આપે છે. કુલ 85 ઢીંગલીઓ અપાય હોય તો g ની કિંમત શોધો.

(a) 15 (b) 12 (c) 8 (d) 5

(38) ત્રણ સમતોલ પાસાને ઉછાળતાં મળતો સરવાળો 11 થાય તેવી કેટલી ભિન્ન ગોઠવણી મળે ?

(a) 18 (b) 27 (c) 45 (d) 56

(39) સમાંતર રેખાઓના ત્રણ ગણ છે જેમાં અનુક્રમે p, q અને r સમાંતર રેખાઓ છે. જેની મદદથી વધુમાં વધુ કેટલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બની શકે ?

(a) pqr + (p-1) (q-1) (r-1)

(b) $\frac{1}{4}\{pqr + (p-q)(q-1)(r-1)\}$

(c) $\frac{1}{4}pqr(p+1)(q+1)(r+1)$

(d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(40) એક બહુકોણ ને 90 વિકર્ણો હોય તો તેની બાજુઓની સંખ્યા

(a) 12 (b) 11 (c) 10 (d) 15

(41) 2^n વ્યક્તિઓને n યુગલોમાં વિભાજીત કરવાના પ્રકારો N હોય તો

(a) $2^n N = (2n)!$ (b) $N(n!) = (1.3.5...(2n-1))$

(c) $N = {}^{2n}C_n$ (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(42) જો 500! = $2^m \times$ કોઈ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય, તો

(a) m = 494

(b) m = 496

(c) 400! = $2^n \times$ કોઈ એક પૂર્ણાંક માં n ની સંખ્યા જેટલો

(d) m = ${}^{500}C_2$

(43) જો $C_r = {}^{2n+1}C_r$ હોય, તો

$C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 ...... + (-1)^{2n+1} C_{2n+1}^2 =$ ______

(a) $({}^{2n+1}C_n - {}^{2n+1}C_{n+1})^2$ (b) ${}^{2n}C_n$

(c) $\frac{1}{n}({}^{2n}C_n)$ (d) 0

(44) 100! ના અંતમાં કેટલા શૂન્યો મળે ?

(a) 20 (b) 22 (c) 24 (d) 26

(45) 1, 2, 3 અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ અંકની કેટલી સંખ્યાઓ મળે કે જેમાં એક નો એક અંક 3 વખત આવે.

(a) 30 (b) 60 (c) 90 (d) 120

(46) સમી. $x^2+6x+y^2 = 4$ નું સમાધાન કરતી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) કેટલી મળે ?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

(47) જો ${}^nC_4$, ${}^nC_5$ અને ${}^nC_6$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો n ની કિંમત ?

(a) 14 (b) 11 (c) 9 (d) 5

(48) એક સમતલમાં ત્રણ સમાંતર રેખાઓ l_1, l_2, l_3 છે. જેના પર અનુક્રમે m, n અને k બિંદુઓ આપેલા છે. આ બિંદુઓને શિરોબિંદુઓ તરીકે લેતાં વધુમાં વધુ કેટલા ત્રિકોણ મળે ?

(a) ${}^{m+n+k}C_3$ (b) ${}^{m+n+k}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$

(c) ${}^mC_3 + {}^nC_3 + {}^kC_3$ (d) $m + n + k - {}^{m+n+k}C_3$

(49) બંને R સાથે ન આવે તે રીતે "ARRANGE" શબ્દના અક્ષરોને ગોઠવાના પ્રકારો કેટલા ?

(a) 360 (b) 900 (c) 1260 (d) 1620

(50) 9 સ્ત્રીઓ અને 8 પુરૂષો પૈકી 12 વ્યક્તિઓની સમિતિ બનાવવી છે કે જેમાં ઓછામાં ઓછી 5 સ્ત્રીઓ આવે. તો (i) જેમાં સ્ત્રીઓ વધારે હોય (ii) પુરૂષો વધારે હોય તેવી કેટલી સમિતિઓ બને.?

(a) 4784, 1008 (b) 2702, 3360 (c) 6062, 2702 (d) 2702, 1008

(51) ગણ A માં n ઘટકો છે. P એ ગણ A નો ઉપગણ છે. P ના ઘટકોથી ગણ A ને ફરીથી લઈ તેમાંથી બીજો ઉપગણ Q લેવામાં આવે છે. $P \cap Q = \varnothing$ તેવી રીતે P અને Q ની પસંદગીના પ્રકારો__________

(a) $2^{2n} - {}^{2n}c_n$ (b) 2^n (c) 2^n-1 (d) 3^n

(52) 12 વ્યક્તિઓ વર્તુળાકાર ટેબલ પર બેસે છે કે જેથી બે ચોક્કસ વ્યક્તિઓ સામસામે ન આવે. તેવી ગોઠવણીના પ્રકારો....

(a) 9(10!) (b) 2(10!) (c) 45(8!) (d) 10!

(53) નંદન તેના છ મિત્રોને પાર્ટી આપવા માગે છે. કુલ 10 મિત્રોમાંથી છ મિત્રોની પસંદગીના પ્રકારો કે જેથી બે મિત્રો આ પાર્ટીમાં હાજરી ન આપે.

(a) 112 (b) 140 (c) 164 (d) 146

(54) કુલ 10 બિંદુઓ પૈકી 7 બિંદુઓ સમરેખ છે જેમાંથી મળતી રેખાઓની સંખ્યા__________

(a) 22 (b) 23 (c) 24 (d) 25

(55) બે C સાથે ન આવે તે રીતે AAAAABBBCCCDEEF ને ગોઠવવાના પ્રકારો__________

(a) $\frac{15!}{5!3!3!2!} - 3!$ (b) $\frac{15!}{5!3!3!2!} - \frac{13!}{5!3!2!}$

(c) $\frac{12!}{5!3!2!} \times \frac{{}^{13}P_3}{3!}$ (d) $\frac{12!}{5!3!2!} \times {}^{13}P_3$

(56) 10 વ્યક્તિઓ 2 કારમાં એવી રીતે મુસાફરી કરે છે કે તેથી દરેક કારમાં 5-5 વ્યક્તિઓ બેસે જેમાં બે ચોક્કસ વ્યક્તિઓ એકકારમાં સાથે ન બેસે તેવી ગોઠવણીના પ્રકારો__________

(a) $\frac{1}{2}\,{}^{10}C_5$ (b) $\frac{1}{2}\,{}^{8}C_5$ (c) $2 \times {}^{8}C_4$ (d) ${}^{8}C_4$

(57) 3 ખોખામાં 8 સમાન દડાને ગોઠવવાના પ્રકારો કે જેથી એક પણ ખોખુ ખાલી ન રહે ?

(a) 3^8 (b) 21 (c) 5 (d) ${}^{8}C_3$

(58) એક સમતલમાં 10 બિંદુઓ પૈકી 6 સમરેખ છે. જો N એ આ બિંદુઓને જોડવાથી મળતા ત્રિકોણની સંખ્યા હોય તો

(a) $N \le 100$ (b) $100 < N < 140$ (c) $140 < N \le 190$ (d) $N > 190$

(59) જો $n = {}^{m}C_2$ હોય, તો ${}^{n}C_2 =$ __________

(a) ${}^{m+1}C_4$ (b) ${}^{m-1}C_4$

(c) ${}^{m+2}C_4$ (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(60) ચાર જુદાજુદા પ્રકારની ચોપડીઓની દરેકની 3-3 કોપી છે. તેને ક્રમમાં ગોઠવવાના પ્રકારો__________

(a) 369600 (b) 400400 (c) 420600 (d) 440720

(61) 10 સમાન પ્રકારના બોક્સમાં 5 દડાને ગોઠવવાના પ્રકારો કે જેથી એકથી વધુ દડો એક બોક્સમાં ન મુકાય.

(a) ${}^{10}P_5$ (b) ${}^{10}C_5$ (c) 5 (d) 1

(62) 12 બાજુઓવાળા એક રેગ્યુલર બહુકોણના શિરોબિંદુઓના મદદ થી ત્રિકોણ બનાવવામાં આવ્યા. ત્રિકોણોની કુલ સંખ્યા કે જેથી બહુકોણની બાજુએ ત્રિકોણ ની બાજુ ન હોય.

(a) 96 (b) 108 (c) 112 (d) 220

(63) 12 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓને એવી રીતે હારમાં ગોઠવવામાં આવે છે કે જેથી બે છોકરીઓની વચ્ચે ઓછામાં ઓછા 3 છોકરાઓ આવે. આવી ગોઠવણીના પ્રકારો m. 12! હોય તો m = ________

(a) $2.\ {}^{12}C_6$ (b) 20 (c) ${}^{11}P_2$ (d) ${}^{11}C_2$

(64) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના પ્રથમ 12 અક્ષરોને લખવામાં આવે છે કે જેથી A અને B ની વચ્ચે ફક્ત 4 અક્ષરો જ આવે આવી ગોઠવણીના પ્રકારો__________

(a) 7.10! (b) 2.10! (c) 21.10! (d) 14.10!

(65) 'MISSISSIPPI' શબ્દના અક્ષરોની મદદથી કુલ કેટલા શબ્દો બને કે જેમાં 2 વખત S પાસપાસે ન હોય ?

(a) $(n-1)a_n$ (b) $2\times 7\ {}^{3}C_4$ (c) $6\times 8\ {}^{7}C_4$ (d) $7\ {}^{6}C_4\ {}^{8}C_4$

(66) 6 જુદીજુદી નવલકથાઓ અને 1 ડીક્ષનેરી પૈકી 4 નવલકથાઓ અને 1 ડીક્ષનેરીને પસંદ કરીને એક હારમાં ગોઠવવાના પ્રકારો કે જેથી ડીક્ષનેરી હંમેશા ગોઠવણીમાં વચ્ચે હોય.

(a) 500 કરતા ઓછી

(b) 500 કે 500 કરતા વધુ પરંતુ 750 કરતા ઓછી

(c) 750 કે 100 કરતા ઓછી

(d) ઓછામાં ઓછી 1000

(67) એક શહેરમાં ત્રણ વોર્ડમાં ચૂંટણીપ્રચાર માટે અનુક્રમે 4, 5 અને 8 માણસો જાય છે. કુલ 20 કાર્યકર્તાઓને આ કામ સોંપવાના પ્રકારો..

(a) ${}^{20}P_4.{}^{20}P_5.{}^{20}P_8$ (b) ${}^{20}C_4\ {}^{20}C_5\ {}^{20}C_8$

(c) ${}^{20}C_4{}^{16}C_5\ {}^{11}C_8$ (d) $\frac{1}{3!}\ {}^{20}C_4\ {}^{16}C_5\ {}^{11}C_8$

(68) $A_1, A_2, \ldots\ A_{10}$ એમ 10 સભ્યોને ક્રમાંક આપવાના પ્રકારો કે જેથી A_2 એ ક્રમાંકમાં હંમેશા A_1 કરતા આગળ હોય.

(a) 2.8! (b) 9! (c) 10! (d) 5.9!

(69) 20 જુદાજુદા દેશના 20 સભ્યો વચ્ચે એક વર્તુળાકાર ટેબલ પર ચર્ચા કરવામાં આવે છે તેમને એવી રીતે વર્તુળાકારે ગોઠવવામાં આવે કે જેથી 2 ચોક્કસ દેશના સભ્યો પાસપાસે ન બેઠા હોય તેવી ગોઠવણીના પ્રકારો.

(a) 17.18! (b) 18.19! (c) $\frac{20!}{2}$ (d) 19!.2

(70) 10 જુદાજુદા મૂળાક્ષરો આપેલા છે. આ અક્ષરોની મદદથી 5 અક્ષરના શબ્દો બનાવવામાં આવે છે કે જેથી શબ્દમાં ઓછામાં ઓછા એક અક્ષર પુનરાવર્તિત થાય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

(a) 69760 (b) 30240 (c) 9948 (d) 10680

(71) આઠ ખુરશીઓને 1 થી 8 નંબર આપેલ છે. 2 સ્ત્રીઓ અને 3 પુરૂષોને એક-એક ખુરશી આપવાની છે. પહેલા સ્ત્રીઓ 1 થી 4 નંબર પૈકી ખુરશીઓની પસંદગી કરે છે અને બાકીની ખુરશીઓ પૈકી પુરૂષો પસંદગી કરે છે. આવી ગોઠવણીના પ્રકારો

(a) 1250 (b) 1360 (c) 1440 (d) 1560

(72) 4 જુદાજુદા કલરના દડાઓ છે અને એવા જ કલરના 4 જુદાજુદા બોક્સ છે. જેવા કલરનું બોક્સ હોય તેવા કલરનો દડો તેમા ન ગોઠવાય તે રીતે દરેક બોક્સમાં દડાને ગોઠવવાના પ્રકારો.

(a) 5 (b) 6 (c) 9 (d) 12

(73) T_n = n બાજુઓવાળા બહુકોણના શિરોબિંદુથી મળતા ત્રિકોણની સંખ્યા દર્શાવે છે.

જો $T_{n+1} - T_n = 21$ હોય, તો n = ________

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

(74) 223355888 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 9 અંકોની સંખ્યા બનાવવામાં આવે કે જેથી અયુગ્મ અંકો એ સંખ્યામાં યુગ્મ સ્થાને આવે તેવી ભિન્ન સંખ્યાઓ કેટલી મળે ?

(a) 16 (b) 36 (c) 60 (d) 80

(75) $f(x) = {}^{7-x}P_{x-3}$ નો વિસ્તારગણ

(a) $\{1,2,3\}$ (b) $\{1,2,3,4\}$ (c) $\{1,2,3,4,5\}$ (d) $\{1,2,3,4,5,6\}$

(76) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 નો ઉપયોગ કરી 3 વડે વિભાજ્ય મળતી 5 અંકની સંખ્યાઓ (પુનરાવર્તન કર્યા વિના)

(a) 936 (b) 480 (c) 600 (d) 216

(77) એક વિદ્યાર્થીએ એક પરીક્ષામાં 13માંથી 10 પ્રશ્નોના જવાબ એવી રીતે આપવાના છેકે જેથી ઓછામાં ઓછા 4 પ્રશ્નો પ્રથમ પાંચ પ્રશ્નોમાંથી પસંદ કરવાના. આવી પસંદગીના પ્રકારો.

(a) 140 (b) 196 (c) 280 (d) 346

(78) 8 સમાન દડાઓને 3 જુદાજુદા બોક્સમાં મૂકવાના પ્રકારો કે જેથી એકપણ બોક્સ ખાલી ન રહે.

(a) 5 (b) ${}^8C_3$ (c) 3^8 (d) 21

(79) સમી. $\left[\frac{x}{99}\right] = \left[\frac{x}{101}\right]$ ના ધન પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા

(a) 2500 (b) 2499 (c) 1729 (d) 1440

(80) $(42)^n$ એ 2007! વડે વિભાજ્ય થાય તેવી n ની મહતમ પૂર્ણાંક કિંમત

(a) 329 (b) 330 (c) 331 (d) 332

(81) SACHIN શબ્દના અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી મળતા શબ્દોને શબ્દકોષ પ્રમાણે લખતા SACHIN શબ્દનું શબ્દકોષ પ્રમાણે સ્થાન કેટલામું આવશે ?

(a) 600 (b) 601 (c) 602 (d) 603

(82) પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર, $n \geq 2$ એ

(a) n વડે વિભાજ્ય નથી.

(b) n વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ 2n વડે નહિ

(c) 2n વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ n! વડે નહિ

(d) n! વડે વિભાજ્ય છે.

(83) 2, 5 અને 7 નો ઉપયોગ કરીને n અંકોના ભિન્ન 900 સંખ્યાઓ બનાવવામાં આવે છે. આ શક્ય બને તેવી n ની નાનામાં નાની શક્ય કિંમત

(a) 6 (b)7 (c) 8 (d) 9

(84) જો n(A) = n હોય તો A થી A ના વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા ________

(a) n^n (b) n^n-n! (c) $\frac{n^n}{n!}$ (d) n!

(85) 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 અંકોના ઉપયોગથી મળતી ભિન્ન સંખ્યાઓ કે જેમાં અયુગ્મ અંકો અયુગ્મ સ્થાને હોય

(a) 12 (b) 18 (c) 24 (d) 36

(86) 10 વ્યક્તિઓને વર્તુળાકાર ટેબલ પર ગોઠવવાના છે. જે પૈકી 3 વ્યક્તિઓ એક જૂથમાં સાથે બેસવા માગે છે. આવી ગોઠવણીના પ્રકારો.

(a) $9! \times 3!$ (b) $8! \times 3!$ (c) $7! \times {}^8P_3$ (d) $7! \times 3!$

(87) 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 નો ઉપયોગ કરી 10 લાખ કરતા મોટી કેટલી સંખ્યાઓ મળે ?

(a) 420 (b) 360 (c) 400 (d) 300

(88) 3, 5, 7, 9 અંકોનો માત્ર એક જ વખત ઉપયોગ કરી મળતી ચાર અંકની સંખ્યાઓની સરાસરી મેળવો.

(a) 4444 (b) 5555 (c) 6666 (d) 7777

(89) એક પરીક્ષામાં એક પ્રશ્નપત્ર બે વિભાગોમાં વિભાજીત કરેલ છે. જેમાં કુલ 12 પ્રશ્નો છે. વિભાગ-I માં 5 અને વિભાગ-II માં 7 પ્રશ્નો છે. એક વિદ્યાર્થી 8 પ્રશ્નોના જવાબ આપવાના છે કે જેથી દરેક વિભાગમાંથી ઓછામાં ઓછા 3 પ્રશ્નો પસંદ કરે તે વિદ્યાર્થીની પ્રશ્નોની પસંદગીના પ્રકારો.

(a) ${}^5C_2.{}^7C_2 + {}^5C_1.{}^7C_3 + {}^5C_0.{}^7C_3$

(b) ${}^{12}C_5.{}^{12}C_7$

(c) ${}^5C_3.{}^7C_5$

(d) ${}^{12}C_8$

(90) એક લાયબ્રેરીમાં a પ્રકારની 1 ચોપડી, b પ્રકારની 2 ચોપડીઓ, c પ્રકારની 3 ચોપડીઓ, d પ્રકારની એક ચોપડી છે. આ ચોપડીઓના વિતરણના કુલ પ્રકારો

(a) $\frac{(a+2b+3c+d)!}{a!.b!.c!}$ (b) $\frac{(a+2b+3c+d)!}{a!.b^2!.c^3!}$

(c) $\frac{(a+2b+3c+d)!}{a!.(b!)^2(c!)^3}$ (d) $\frac{a+2b+3c+d}{a+b+c+d}$

(91) 3 છોકરાઓ અને 3 છોકરીઓ એક વર્તુળાકાર ટેબલ પર વર્તુળાકારે બેસે છે. જેથી છોકરા x ના પડોશી એકપણ છોકરી ન હોય અને છોકરી y નો પડોશી એકપણ છોકરો ન હોય તેવી ગોઠવણીના પ્રકારો

(a) 2 (b) 4 (c) 2^3 (d) 3^3

(92) 4 બાળકોએ આંબાના વૃક્ષ પરથી 30 કેરીઓ ઉતારી જે દરેક કેરી સમાન છે. આ કેરીઓને તેમની વચ્ચે વહેંચવાના પ્રકારો.

(a) $^{33}C_4$ (b) $^{33}C_2$ (c) 5456 (d) 6554

(93) 15 પુરૂષો અને 15 સ્ત્રીઓ પૈકી 15 યુગલો કેટલી રીતે બનાવી શકાય કે જેમાં એક પુરૂષ અને એક સ્ત્રી હોય.

(a) 1240 (b) 1840 (c) 1820 (d) 2005

(94) 1 થી 1000 સુધીની સંખ્યાઓની યાદી બનાવતા 3 એ કેટલી વખત આવે ?

(a) 269 (b) 300 (c) 271 (d) 302

(95) 52 પત્તાને 4 રમતવીરો વચ્ચે વહેંચવાના પ્રકારો કે જેથી ત્રણ રમતવીરને 17 પત્તા અને ચોથાને 1 પત્તુ મળે.

(a) $\frac{52!}{(17!)^3}$ (b) 52! (c) $\frac{52!}{17!}$ (d) $\frac{52!}{(17!)^2}$

(96) 10 પ્રાણીઓને રહેવા માટે એક સર્કસમાં 10 પાંજરા છે. જે પૈકી 4 પાંજરા એટલા નાના છે કે જેથી 10 પૈકી 5 પ્રાણીઓ તેમાં રહી ન શકે. આ 10 પ્રાણીઓને 10 પાંજરામાં ગોઠવવાના પ્રકારો.

(a) 66400 (b) 86400 (c) 96400 (d) 46900

(97) ચાર અંકની એવી કેટલી સંખ્યાઓ મળે જેના ચારેય અંક જુદા જુદા ન હોય.

(a) 2432 (b) 3616 (c) 4210 (d) 4464

(98) એક માણસને 7 સંબંધીઓ છે જેમાં 4 સ્ત્રીઓ અને 3 પુરૂષો છે, તેની પત્નીને પણ 7 સંબંધીઓ છે જેમાં 3 સ્ત્રીઓ અને 4 પુરૂષો છે. તેઓ એક પાર્ટી માટે 3 સ્ત્રીઓ અને 3 પુરૂષોને આમંત્રણ આપે છે કે જેથી 3 સંબંધીઓ પુરૂષના અને 3 સંબંધીઓ તેની પત્નીના હોય. આવા આમંત્રણના કુલ પ્રકારોની સંખ્યા શોધો.

(a) 854 (b) 585 (c) 485 (d) 548

(99) એક વર્તુળ પરના 16 બિંદુઓથી મળતી જીવાઓની સંખ્યા

(a) 102 (b) 120 (c) 12 (d) $16P_2$

(100) 'BANANA' શબ્દના અક્ષરોથી મળતી ભિન્ન ગોઠવણીઓ કે જેમાં બે N સાથે ન આવે.

(a) 40 (b) 60 (c) 80 (d) 100

(101) 20! ના અવયવોની સંખ્યા = ________

(a) 4140 (b) 41040 (c) 4204 (d) 81650

(102) જો $\frac{1}{^4C_n} = \frac{1}{^5C_n} + \frac{1}{^6C_n}$ તો n ની કિંમત શોધો.

(a) 3 (b) 4 (c) 0 (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(104) 8 સ્ત્રીઓ અને 7 પુરૂષો પૈકી 3 સ્ત્રીઓ અને 4 પુરૂષોની એક્સમિતિ બનાવવામાં આવે છે. જો પુરૂષ B એ સમિતિનો સભ્ય હોય તો પુરૂષ A એ સમિતિ નો સભ્ય થવાની ના પાડે છે. આવી સમિતિઓના પ્રકાર શોધો.

(a) 420 (b) 840 (c) 1540 (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(105) જો $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{^nC_r}$ તો $\sum_{r=0}^{n} \frac{n-2r}{^nC_r}$ = ________

(a) $\frac{n}{2}a_n$ (b) $\frac{1}{4}a_n$ (c) $n.a_n$ (d) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

(106) સંખ્યા 1!+2!+3!+4!+.....+100! ને 240 વડે ભાગતા મળતી શેષ ________

(a) 153 (b) 33 (c) 73 (d) 187

(107) સમાન પ્રકારના પીળા, કાળા અને લીલા રંગના મોતી ધરાવતી ત્રણ માળા છે. દરેક માળામાં ઓછામાં ઓછા 20 મોતી છે. 20 મોતી એવી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે કે જેથી પીળા મોતી કરતા કાળા મોતીની સંખ્યા બમણી હોય તો આવી પસંદગીના પ્રકારો

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

(108) જો a + b + c + d = 20 અને a, b, c, d $\geq$ O નું સમાધાન કરતી a, b, c અને d ની પૂર્ણાંક કિંમતો કેટલી મળે.

(a) $^{24}C_3$ (b) $^{25}C_3$ (c) $^{26}C_3$ (d) $^{27}C_3$

(109) $Kn^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)....(n^2-(n-1)^2) = r!$ થાય તેવી k ની ન્યૂનતમ ધન કિંમત

(a) 2002 (b) 2004 (c) 1 (d) 2

સુચનો

1. $^{n-1}C_5 + {}^{n-1}C_6 < {}^{n}C_7$

$\therefore\ {}^{n}C_6 < {}^{n}C_7$

$\therefore\ \frac{n!}{6!\,(n-6)!} < \frac{n!}{7!\,(n-7)!}$

$\therefore\ \frac{1}{n-6} < \frac{1}{7}$

$\therefore\ 7 < n - 6$

$\therefore n > 13 \qquad \therefore\ n = 14$

2. કુલ ગોઠવણી $= n\,!$

બે બુક્સ સાથે હોય તેવી ગોઠવણી $= (n-1)\,!\ 2$

બે ચોક્કસ બુક્સ સાથે ન હોય તેવી ગોઠવણી $= n! - 2\,(n-1)!$

$= (n-2)\,(n-1)! = 480 = 4 \times 120$

$\therefore\ (n-2)\,(n-1)\,! = (6-2)\,(6-1)!$

$\therefore\ n = 6$

3.

Ten Thousand	Thousand	Hundrerd	Tens	Unit
600	600	600	600	600

$\therefore$ સરવાળો : 66, 66, 600

4. M-2 વખત

T-2 વખત

A-2 વખત તથા H, E, I, C, S છે.

2 અક્ષરો સમાન હોય તેવા શબ્દો $= {}^{3}C_2 \times \frac{4!}{2!.\,2!} = 18$

2 અક્ષરો સમાન અને 2 અક્ષરો ભિન્ન હોય $= {}^{3}C_2 \times {}^{7}C_2 \times \frac{4!}{2!}$

$= 756$

બધા અક્ષરો ભિન્ન હોય

તેવા શબ્દો = ${}^8C_4 \times 4! = 1680$

કુલ શબ્દો = 2454

5. શ્રેણી $\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} = \frac{o}{{}^nC_0} + \frac{1}{{}^nC_1} + \frac{2}{{}^nC_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{{}^nC_n}$

તથા $\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} = \frac{n}{{}^nC_0} + \frac{n-1}{{}^nC_1} + \frac{n-2}{{}^nC_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{o}{{}^nC_n}$

$\therefore\ 2\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} = \frac{n}{{}^nC_0} + \frac{n}{{}^nC_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{{}^nC_n}$

$= n\left[\frac{1}{{}^nC_0} + \frac{1}{{}^nC_1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{{}^nC_n}\right]$

$= n\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r}$

$= n\, a_n$

$\therefore \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} = \frac{1}{2} n a_n$

6. ${}^nC_r = {}^nC_{r-1} \Rightarrow r + r - 1 = n \Rightarrow r = \frac{n+1}{2}$ અને ${}^nP_r = {}^nP_{r+1}$

$\therefore\ \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r-1)!}$ $\qquad \therefore\ n - r = 1$

$\therefore\ n - \left(\frac{n+1}{2}\right) = 1$

$\therefore 2n - n - 1 = 2$

$\therefore n = 3$

7.

O	E	O	E	O	E	O	E	O

O = odd

E = Even

3, 3, 5, 5 અયુગ્મ અંકો છે. 2, 2, 8, 8, 8 યુગ્મ અંકો

મળતી સંખ્યાઓ $\frac{{}^4C_4 \times 4!}{2!\,2!} \times \frac{{}^5C_4 \times 5!}{3!\,2!} = 60$

8. અહીં S-3 વખત

C-2 વખત તથા U, E એક વખત છે.

કુલ શબ્દો $= \frac{7!}{3!\,2!}$

3S સાથે હોય તેવા શબ્દો $= \frac{5!}{2!}$

બધા 3 સાથે ન હોય તેવા શબ્દો $= \frac{7!}{3!\,2!} - \frac{5!}{2!} = 360$

9. t_5 નો સહગુણક $= {}^nC_4$

t_6 નો સહગુણક $= {}^nC_5$

t_7 નો સહગુણક $= {}^nC_6$

$2 \times {}^nC_5 = {}^nC_4 + {}^nC_6$ ઉકેલતાં $n = 7$ અથવા 14

10. 4 અંકોની સંખ્યા $= 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$

5 અંકોની સંખ્યા $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 600$

6 અંકોની સંખ્યા $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 600$

$\therefore$ કુલ સંખ્યાઓ = 1380

11. i અથવા i થી વધુ ખોટા આપનાર વિદ્યાર્થી ઓની સંખ્યા $= a_i$

$i + 1$ ખોટા જવાબ આપનાર વિદ્યાર્થી ઓની સંખ્યા $= a_{i+1}$

i પ્રશ્નોના ખોટા જવાબ આપનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= a_i - a_{i+1}$

$\therefore$ કુલ ખોટા જવાબોની સંખ્યા

$= 1(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + (k-1)(a_{k-1} - a_k) + ka_k$

$= a_1 + a_2 + \dots\dots\dots a_k$

12. છ X ને 8 ચોરસખાનામાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^8C_6 = {}^8C_2 = 28$

જેમાં પ્રથમ હાર બે તથા ત્રીજી હારના બે ખાના ખાલી રહે છે.

$\therefore$ માંગેલ ગોઠવણી $= 28 - 2 = 26$

13. શૂન્ય સિવાય 5 અંકોની સંખ્યાઓ $= 5! = 120$

3 સિવાય 5 અંકોની સંખ્યાઓ $= 5! - 4!$

$= 120 - 24$

$= 96$

માંગેલ કુલ સંખ્યાઓ $= 120 + 96 = 216$

14. 4 રેખાઓ એકબીજાને ${}^4C_2 = 6$ બિંદુઓમાં છેદે

4 વર્તુળો એકબીજાને ${}^4P_2 = 12$ બિંદુઓમાં છેદે.

દરેક રેખા 4 વર્તુળોને 8 બિંદુઓમાં છેદે.

4 રેખાઓ 4 વર્તુળોને $4 \times 8 = 32$ બિંદુઓમાં છેદે.

$\therefore$ કુલ છેદ બિંદુઓ $6 + 12 + 32 = 50$

15. 12 બિંદુઓથી મળતા કુલ ત્રિકોણ $= {}^{12}C_3 = 220$

પરંતુ અહીં AB પરના 3 બિંદુથી મળતા ત્રિકોણ $= {}^3C_3 = 1$

BC પરના 4 બિંદુથી મળતા ત્રિકોણ $= {}^4C_3 = 4$

AC પરના 5 બિંદુથી મળતા ત્રિકોણ $= {}^5C_3 = 10$

$\therefore$ મળતા ત્રિકોણની સંખ્યા $= 220 - 1 - 4 - 10 = 205$

16. A, B, C નો ક્રમ બદલવાનો નથી.

$\therefore$ A, B અને C ને એજ ક્રમમાં રાખતા મળતી ગોઠવણીઓ $\frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

17. ${}^{189}C_{35} + {}^{189}C_x = {}^{190}C_x$

$\therefore x = 36$

18. A.A.........વાળા શબ્દો જેમાં N - 2 વખત

I - 2 વખત છે.

$\therefore$ મળતા કુલ શબ્દો $= \frac{10!}{2!\,2!} = 907, 200$

19. અહીં ગોઠવણી ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં અને વિરુધ્ધ દિશામાં બંને સમાન થશે.

$\therefore$ કુલ ગોઠવણી $= \frac{10!}{2\,(6!) \times 5!}$

20. દરેક વિષય માટે 2 શક્યતાઓ છે.

$\therefore$ કુલ શક્યતાઓ $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\therefore$ નાપાસ થવાની શક્યતાઓ $= 16 - 1 = 15$

21. કુલ શબ્દો = બધા શબ્દો - એકપણ અક્ષર પુનરાવર્તિત ન થાય તેવા શબ્દો

$= 10^5 - {}^{10}P_5 = 69, 760$

22. $\sum_{r=0}^{n} r \, {}^nC_r \, P^r \, q^{n-r}$

$= 1 \, {}^nC_1 \, pq^{n+1} + {}^nC_2 \, p^2 \, q^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= npq^{n-1} + n(n-1) p^2 \, q^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= np \left(q^{n-1} + (n-1) pq^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$

$= np \, (q + p)^{n-1} = np$

23.

X	Y	Z	r	કોડની સંખ્યા
3	2	0	5	$\frac{10\,!}{3!\,2!\,5!} = 2520$
3	2	1	4	12600
3	2	2	3	25200
3	2	3	2	25200
3	2	4	1	12600
3	2	5	0	2520
કુલ કોડ				80640

24. શિરોલંબ બાજુઓની પસંદગીના પ્રકારો

$= 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$

સમક્ષિતિજ બાજુઓની પસંદગીના પ્રકારો

$= m^2$

$\therefore$ લંબચોરસની સંખ્યા $= m^2 \, n^2$

25. 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3 ના ઉપયોગથી $\frac{7!}{5!} = 42$

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 ના ઉપયોગથી $\frac{7!}{4!\,3!} = 35$

$\therefore$ કુલ સંખ્યાઓ $= 42 + 35 = 77$

26. સૂત્રથી $^{52}C_4$

27. $770 = 2\times5\times7\times11$

2 એ 4 રીતે

5 એ 4 રીતે

7 એ 4 રીતે અને 11 એ 4 રીતે મુકી શકાય

$\therefore$ ઉકેલોની સંખ્યા $N = 4^4 = 256$

28. $a = 182bc$

$\therefore {}^{x+2}P_{x+2} = 182 \times {}^{x}P_{11} \times {}^{x-11}P_{x-11}$

ઉકેલતાં $(x+2)! = 182x!$ $\quad \therefore x = 12, -15$

29. 3 વ્યક્તિઓ ફિક્સ છે.

$\therefore 12! \times 2$

30. એક જ વસ્તુને ગોઠવવાના પ્રકારો $= n$

એક જ વસ્તુને બે વખત ગોઠવવાના પ્રકારો $= n.n = n^2$

આ જ રીતે આગળ વધતા

કુલ ગોઠવણી $n + n^2 + ... + n^r = \dfrac{n(n^r - 1)}{n-1}$

31. ડ્રાયવરની પસંદગી $^2C_1 = 2$

બાકીના 5 માંથી પસંદગી $^5C_2 = 10$

$\therefore$ કુલ $2\times10 = 20$

32. Ans. (D)

33. $^nC_2 = 153 \quad \therefore n = 18$

34. $4m = 2^a + 3^b + 5^c$

$= 2^a + (4-1)^b + (4+1)^c$

$= 4k + 2^a + (-1)^b + (1)^6$

$\therefore a = 1, \quad b =$ યુગ્મ $\quad c =$ કોઈપણ

$a \neq 1, \quad b =$ અયુગ્મ $\quad c =$ કોઈપણ

$\therefore$ સંખ્યાઓ $= 1\times 2\times 5 + 4\times 3\times 5 = 70$

35. ઓછામાં ઓછા r ખોટા જવાબો ની સંખ્યા $= 2^{n-r}$

r પ્રશ્નોના જવાબ ખોટા આપનારની સંખ્યા $= 2^{n-r} - 2^{n-(r+1)}$

બધા પ્રશ્નોના ખોટા જવાબ આપનારની સંખ્યા $= 2^0 = 1$

કુલ ખોટા જવાબોની સંખ્યા

$= 1\left(2^{n-1} - 2^{n-2}\right) + 2\left(2^{n-2} - 2^{n-3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)\left(2^1 - 2^0\right) + n\left(2^0\right)$

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^0 = 2^n - 1$

$2^n - 1 = 4095$

$\therefore 2^n = 4096 = 2^{12}$

$\therefore n = 12$

36. કુલ વિધેયોની સંખ્યા $= 2^4 = 16$

જે પૈકી અચળ વિધેયો $f_1(x) = a \quad \forall x \in E$

$f_2(x) = b \quad \forall x \in E$

જે વ્યાપ્ત નથી.

$\therefore$ મળતા વિધેયો $16 - 2 = 14$

37. 4 1 ગ્રુપની સંખ્યા $^4C_4 \times {}^gC_1 = g$

3 2 ગ્રુપની સંખ્યા $^4C_3 \times {}^gC_2 = 2g(g-1)$

કુલ ઢીંગલીઓની સંખ્યા $g(1) + 2\left[2g(g-1)\right]$

$85 = 4g^2 - 3g$

સમીકરણ ઉકેલતાં $g = 5$

38. $\left(x + x^2 + \ldots\ldots\ldots x^6\right)^3$ માં x^{11} નો સહગુણક

$= \left(1 - x^6\right)^3 (1 - x)^{-3}$ માં x^8 નો સહગુણક

$= \left(1 - 3x^6\right)\left(1 + {}^3C_1 x + {}^4C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\right)$ માં x^8 નો સહગુણાક

$= {}^{10}C_8 - 3\left({}^4C_2\right) = 27$

39. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણની સંખ્યા

$= {}^pC_2\,{}^qC_2 + {}^qC_2\,{}^rC_2 + {}^rC_2\,{}^pC_2$

40. $^nC_2 - n = 90$ તો $n = 15$

41. $N = \left({}^{2n}C_2\right)\left({}^{2n-2}C_2\right)..........\left({}^{2}C_2\right)$

$= \dfrac{(2n)!}{2^n}$

$\therefore 2^n\ N = (2n)!$

42. Ans. (A)

43. $C_r = C_{2n+1-r}$, $\forall$ r નો ઉપયોગ કરો

44. $100! = 2^{97} \times 3^{48} \times 5^{24} \times............$

45. $\left({}^{3}C_1\right) \cdot \dfrac{5!}{3!} = 60$

46. $x^2 + 6x + y^2 = 4$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 13$

$\therefore (x + 3)^2 + y^2 = 13$

$\Rightarrow x + 3 = \pm 2, \qquad y = \pm 3$

અથવા $x + 3 = \pm 3, \qquad y = \pm 2$

$\therefore$ કુલ 8 જોડ મળે.

47. પક્ષ પરથી $2\left({}^{n}C_5\right) = {}^{n}C_4 + {}^{n}C_6$

$\therefore \dfrac{{}^{n}C_4}{{}^{n}C_5} + \dfrac{{}^{n}C_6}{{}^{n}C_5} = 2$ સમી. ઉકેલતા .

n = 14 મળે.

48. ${}^{m+n+k}C_3 - {}^{m}C_3 - {}^{n}C_3 - {}^{k}C_3$

49. A 2 વખત

R 2 વખત

N, G અને E એક વખત છે.

$\therefore$ કુલ ગોઠવણી $\dfrac{7!}{2!\,2!} = 1260$

RR સાથે વાળા શબ્દો $= \dfrac{6!}{2!} = 360$

$\therefore$ R R સાથે ન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા $= 1260 - 360 = 900$

50. ઓછામાં ઓછી 5 સ્ત્રીઓ હોય તેવી સમિતિ = ${}^9C_5 . {}^8C_7 + {}^9C_6 . {}^8C_6 + {}^9C_7 . {}^8C_5 + {}^9C_8 . {}^8C_4 + {}^9C_9 . {}^8C_3$

$= 1008 + 2352 + 2016 + 630 + 56 = 6062$

(i) સ્ત્રીઓ વધારે હોય તેવી સમિતિઓ

$= 2016 + 630 + 56 = 2702$

(ii) પુરુષો વધારે હોય તેવી સમિતિઓ = 1008

51. $A = \{ a_1, a_2, a_3, ... a_n \}$ લેતાં

$a_i \in P$ માટે (i) $a_i \in P$ & $a_i \in Q$

(ii) $a_i \notin P$ & $a_i \in Q$

(iii) $a_i \in P$ & $a_i \notin Q$

(iv) $a_i \notin P$ & $a_i \notin Q$

(i), (ii) અને (iii) પરથી $a_i \notin (P \cap Q)$

$\therefore$ $P \cap Q = \phi$ થાય તેવી કુલ શક્યતાઓ $= 3^n$

52. 12 વ્યક્તિઓને વર્તુળાકારે ગોઠવવાના પ્રકારો $= 11!$

બે ચોક્કસ વ્યક્તિઓ સામ સામે હોય તેવી ગોઠવણીઓ $= 10!\ (2!)$

$\therefore$ જરૂરી ગોઠવણી $= 11! - 10!\ (2!) = 10!\ (11 - 2)$

$= 9\ (10!)$

53. આમંત્રણના પ્રકારો ${}^{10}C_6 - {}^8C_4$

$= 210 - 70 = 140$

54. મળતી રેખાઓ $= {}^{10}C_2 - {}^7C_2 + 1 = 45 - 21 + 1 = 25$

55. કુલ 15 અક્ષરો છે. જેમાં C - 3 વખત છે.

C સિવાયના અક્ષરોને 12 સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= \dfrac{12!}{5!\ 3!\ 2!}$

બે C સાથે હોય તેવા પ્રકારો $= \dfrac{{}^{13}P_3}{3!}$

$\therefore$ જરૂરી શબ્દોના પ્રકારો $= \dfrac{12!}{5!\ 3!\ 2!} \times \dfrac{{}^{13}P_3}{3!}$

56. 8 વ્યક્તિઓને દરેક હારમાં 4 વ્યક્તિઓ આવે તે રીતે ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^8C_4$

બે ચોક્કસ વ્યક્તિઓને ગોઠવવાના પ્રકારો કે જેથી બંને એક જ કારમાં ન આવે = 2

$\therefore$ કુલ પ્રકારો $= 2 \times {}^8C_4$

57. ${}^{8-1}C_{3-1} = {}^{7}C_{2} = 21$

58. $N = {}^{10}C_3 - {}^{6}C_3 = 120 - 20 = 100$

59. $n = {}^{m}C_2 = \frac{m(m-1)}{2}$

$\therefore {}^{n}C_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{m(m-1)}{2} - 1\right]$

$= \frac{1}{8} m(m-1)(m^2 - m - 2)$

$= 3\left[\frac{1}{24}(m+1)(m)(m-1)(m-2)\right]$

$= 3(m + {}^{3}C_4)$

60. 3 સમાન પ્રકારનીબુકના જુદા જુદા 4 સેટ છે. કુલ ગોઠવણી $= \frac{12!}{3! \times 3! \times 3! \times 3!} = 369600$

61. 5 દડાને 5 બોક્સમાં મુકવાનો પ્રકાર એક જ મળે.

62. કુલ ત્રિકોણની સંખ્યા $= \binom{12}{3} = 220$

બે બાજુઓ બહુકોણની બાજુ હોય તેવા ત્રિકોણની સંખ્યા = 12

એક બાજુ બહુકોણની બાજુ હોય તેવા ત્રિકોણની સંખ્યા $= 8 \times 12 = 96$

$\therefore$ માગેલ ત્રિકોણની સંખ્યા $= 220 - 12 - 96 = 112$

63. 2 છોકરીઓ સાથે બેસે તેવી ગોઠવણી $= 2 \times 13 = 26$

1 છોકરો, 2 છોકરીઓની વચ્ચે બેસે તેવી ગોઠવણીઓ $= 2 \times 12 = 24$

2 છોકરાઓ, 2 છોકરીઓની વચ્ચે બેસે તેવી ગોઠવણીઓ $= 2 \times 11 = 22$

કુલ ગોઠવણીઓના પ્રકાર = 14!

$\therefore$ માગેલ ગોઠવણીના પ્રકારો

$= 14! - (26 + 24 + 22)12! = 110.12! = {}^{11}P_2\ 12!$

$\therefore m = {}^{11}P_2$

64. A અને B ને ગોઠવવાના પ્રકારો (સ્થાન) 1, 6 ; 2, 7 ; 3, 8 ; ....; 7, 12

બાકીના અક્ષરોને 10 સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારો = 10 !

$\therefore$ કુલ ગોઠવણી $= 2 \times 7 \times 10! = 14 \times 10!$

65. સાત અક્ષરો M IIII PP ને ગોઠવવાના પ્રકારો $= \frac{7!}{4!\,2!}$

ચાર S ને 7 અક્ષરોની વચ્ચેના 8 સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^8C_4$

$\therefore$ માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકારો $= \frac{7!}{4!\,2!}\ {}^8C_4 = 7\ \ {}^6C_4\,{}^8C_4$

66. N = નોવેલ D = ડીક્ષનેરી લેતાં NNDNN

D ની પસંદગીના પ્રકારો = 3

NNNN ની ગોઠવણીના પ્રકારો $= {}^6P_4 = 360$

$\therefore$ કુલ ગોઠવણીઓ $= 3 \times 360 = 1080$

67. પ્રથમ વોર્ડમાં 4 વ્યક્તિઓને મોકલવાના પ્રકારો $= {}^{20}C_4$

બાકીના 16 માંથી 5 વ્યક્તિઓને બીજા વોર્ડમાં મોકલવાના પ્રકારો $= {}^{16}C_5$

બાકીના 11 માંથી 8 વ્યક્તિઓની ત્રીજા વોર્ડમાં મોકલવાના પ્રકારો $= {}^{11}C_8$

$\therefore$ કુલ પ્રકારો $= {}^{20}C_4\ {}^{16}C_5\ {}^{11}C_8$

68. 10 સભ્યોને ક્રમાંક આપવાના કુલ પ્રકારો = 10!

જેમાં અડધા ક્રમાંકોમાં A_1 એ A_2 કરતા આગળ હોય અને બાકીના અડધા ક્રમાંકમાં A_2 એ A_1 કરતા આગળ હોય.

$\therefore$ માંગેલ ક્રમાંક આપવાના પ્રકારો $= \frac{10!}{2} = 5 \times 9!$

69. 2 ચોક્કસ સભ્યો સિવાયના 18 ને વર્તુળાકારે ગોઠવવાના પ્રકારો = 17!

2 ચોક્કસ વ્યક્તિઓને વચ્ચેની 18 ખાલી જગ્યામાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^{18}P_2 = 18 \times 17$

$\therefore$ કુલ ગોઠવણી $= 17! \times 18 \times 17 = 17 \times 18!$

70. 5 અક્ષરના શબ્દોની સંખ્યા $= 10^5$

પુનરાવર્તન વિના 5 અક્ષરના શબ્દોની સંખ્યા $= {}^{10}P_5$

$\therefore$ માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= 10^5 - {}^{10}P_5 = 69760$

71. 2 સ્ત્રીઓને 1 થી 4 નંબરવાળી ખુરશીઓમાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^4P_2 = 12$

બાકીની 6 ખુરશીઓમાં 3 પુરુષોને ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^6P_3 = 120$

$\therefore$ કુલ પસંદગી $= 12 \times 120 = 1440$

72. માંગેલ ગોઠવણ = $4!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$

$= 12 - 4 + 1 = 9$

73. અહીં $T_n = {}^nC_3$

$\therefore T_{n+1} - T_n = 21$

$\Rightarrow {}^{n+1}C_3 - {}^nC_3 = 21 \Rightarrow {}^nC_1 = 21 \Rightarrow n = 7$

74. 4 અયુગ્મ અંકો 3355 ને 4 યુગ્મસ્થાનોમાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

5 યુગ્મ અંકો 22888 ને 5 અયુગ્મ સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= \frac{5!}{2!\,3!} = 10$

$\therefore$ કુલ સંખ્યાઓ $= 6 \times 10 = 60$

75. ${}^{7-x}P_{x-3}$ વ્યાખ્યાયિત થાય તે માટે,

$x - 3 \ge 0$ અને $7 - x \ge x - 3$

$\therefore x \ge 3$ અને $x \le 5$

$\therefore$ પ્રદેશગણ $= \{2, 3, 4\}$

$\therefore f(3) = {}^4P_0 = 1, \quad f(x) = {}^3P_1 = 3, \quad f(5) = {}^2P_2 = 2$

$\therefore$ વિસ્તારગણ $= \{1, 2, 3\}$

76. પાંચ અંકોની પસંદગીઓ

$\{1, 3, 4, 6, 7\}, \{0, 1, 2, 3, 6\}, \{0, 1, 3, 4, 7\}, \{0, 1, 4, 6, 7\}, \{0, 2, 3, 6, 7\}, \{0, 2, 3, 4, 6\}$

આની મદદથી મળતી સંખ્યાઓ $= 5! + 5(5! - 4!) = 120 + 5 \times 96 = 600$

77. ${}^5C_4\ {}^8C_6 + {}^5C_5\ {}^8C_5$

$= 140 + 56 = 196$

78. જરૂરી ગોઠવણી $= {}^{8-1}C_{3-1} = {}^7C_2 = 21$

79. જો $\left[\frac{x}{99}\right] = \left[\frac{x}{101}\right] = n$ લેતાં

$n = 0 \Rightarrow x = 0, 1, 2, ...98$

$n = 1 \Rightarrow x = 101, 102, 103, ...197$

$n = 2 \Rightarrow x = 202, 203, 204, ...296$

$\therefore$ કુલ ઉકેલોની સંખ્યા $= [99 + 97 + 95 + ... + 3 + 1] - 1 = 2500 - 1 = 2499$

80. $42^n = 2^n . 3^n . 7^n$

$\therefore n = \left[\frac{2007}{7}\right] + \left[\frac{2007}{7^2}\right] + \left[\frac{2007}{7^3}\right] + ...$

$= 286 + 40 + 5 = 331$

81. A, C, H, I, N થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા $5 \times 5! = 600$

પછીનો શબ્દ S A C H I N

$\therefore$ S A C H I N શબ્દનું સ્થાન 601

82. $\frac{(m+1)(m+2)......(m+n)}{n!} = \frac{m+n}{n}$ એક પૂર્ણાંક

$\therefore (m+1)(m+2)............(m+n)$ એ n! વડે વિભાજ્ય છે.

83. n અંકો પૈકીનો દરેક અંક એ 2, 5 અથવા 7 હશે.

$\therefore$ n અંકોની સંખ્યા $= 3^n$

$\therefore 3^n > 900 \Rightarrow n = 7, 8, 9$

$\therefore$ n ની ન્યૂનત્તમ કિંમત 7

84. પ્રદેશ અને સહપ્રદેશના ઘટકોની સંખ્યા સમાન હોય તો વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા એક-એક વિધેયોની સંખ્યા જેટલી જ થાય.

$\therefore$ વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા $= n!$

85. અયુગ્મ અંકો 1, 1, 3, 3 ને 4 અયુગ્મ સ્થાનમાં અને યુગ્મ અંકો 2, 2, 4 ને યુગ્મ સ્થાનમાં ગોઠવવાના પ્રકારો

$= \frac{4!}{2!\,2!} . \frac{3!}{2!\,1!} = 18$

86. 3 સભ્યોનું એક જૂથ અને બાકીના 7 ને વર્તુળાકારે ગોઠવવાના પ્રકારો $= 7!$

3 વ્યક્તિઓને અંદરોઅંદર જૂથમાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= 3!$

$\therefore$ કુલ ગોઠવણી $= 7! \times 3!$

87. અહીં 10 લાખ કરતા મોટી સંખ્યામાં 7 અંકો જોઈએ

અહીં 2 એ 2 વખત

3 એ 3 વખત

0 એ એક વખત

4 એ એક વખત છે.

$\therefore$ મળતી સંખ્યાઓ $= \frac{7!}{2!\,3!} - \frac{6!}{2!\,3!} = 420 - 60 = 360$

$= 360$

88. સરાસરી $= \frac{\text{સંખ્યાઓનો સરવાળો}}{\text{મળતી કુલ સંખ્યાઓ}}$

$= \frac{3!\,(3+5+7+9)\times 1111}{4!}$

$= 6666$

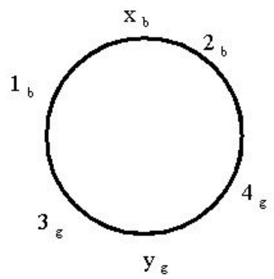
89. પસંદગીઓ નીચે મુજબ મળે.

		વિભાગ	વિભાગ	પસંદગીના પ્રકારો
		I	II	
પ્રશ્ન સંખ્યા	(i)	3	5	${}^5C_3 \cdot {}^7C_5 = {}^5C_2 \cdot {}^7C_2$
	(ii)	4	4	${}^5C_4 \cdot {}^7C_4 = {}^5C_1 \cdot {}^7C_3$
	(iii)	5	3	${}^5C_5 \cdot {}^7C_3 = {}^5C_0 \cdot {}^7C_4$
			Total	${}^5C_2 \cdot {}^7C_2 + {}^5C_1 \cdot {}^7C_3 + {}^5C_0 \cdot {}^7C_4$

90. કુલ ચોપડીઓની સંખ્યા $= a + 2b + 3c + d$

વિતરણના કુલ પ્રકારો $= \frac{(a+2b+3c+d)!}{a!\,(b!)^2\,(c!)^3}$

91. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 1_b, 2_b અને x_b ત્રણ છોકરાઓ 3_g, 4_g & y_g અને ત્રણ છોકરીઓને એવી રીતે ગોઠવીએ તો x_b છોકરા અને y_g છોકરીના કોઈ છોકરી કે છોકરા પડોશી ન હોય.



$\therefore$ કુલ ગોઠવણીઓ $= {}^2P_2 \times {}^2P_2 = 2! \times 2! = 2 \times 2 = 4$

92. દરેક બાળકને ગમે તેટલી સંખ્યામાં કેરી મળી શકે.

$\therefore$ કુલ પ્રકારો $= {}^{30+4-1}C_{4-1} = {}^{33}C_3 = 5456$

93. પ્રથમ યુગલની પસંદગીના પ્રકારો $= 15 \times 15 = 15^2$

એ જ રીતે બીજા યુગલની પસંદગીના પ્રકારો $= 14 \times 14 = 14^2$

$\therefore$ કુલ યુગલોની સંખ્યા $= 15^2 + 14^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^2 + 1^2$

$$= \sum_{i=1}^{15} i^2 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1240$$

94. 1 થી 999 વચ્ચેની દરેક સંખ્યા xyz પ્રકારની હોય. જ્યાં x, y. z એ 0 થી 9 વચ્ચેની સંખ્યા છે.

3 એક જ વખત આવે તેવી સંખ્યા $= {}^3C_1 (9 \times 9) = 3\left(9^2\right)$

3 બે જગ્યાએ આવે તેવી સંખ્યા $= {}^3C_2\ 9$

3 એ 3 જગ્યાએ આવે તેવી એક જ સંખ્યા 333

$\therefore$ 3 આવે તેવી કુલ શક્યતાઓ $= 1 \times \left(3 \times 9^2\right) + 2 \times (3 \times 9) + 3 \times 1 = 300$

95. વહેંચણીના પ્રકારો

$= {}^{52}C_{17} \cdot {}^{35}C_{17} \cdot {}^{18}C_{17} \cdot {}^1C_1$

$$= \frac{52!}{17!\,35!} \cdot \frac{35!}{17!\,18!} \cdot \frac{18!}{17!\,1!} \cdot 1 = \frac{52\,!}{(17\,!)^3}$$

96. પ્રથમ 5 પ્રાણીઓ કે જે નાના પાંજરામાં આવી શકે તેમ નથી તેને ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^6P_5$

બાકીના 5 પ્રાણીઓને 5 પાંજરામાં ગોઠવવાના પ્રકારો $= {}^5P_5 = 5!$

$\therefore$ કુલ ગોઠવણી $= {}^6P_5 \cdot {}^5P_5 = 720 \times 120 = 86400$

97. મળતી સંખ્યાઓ

$= 9 \times 10 \times 10 \times 10 - 9 \times 9 \times 8 \times 7$

$= 9000 - 4536 = 4464$

98.

		માણસ (3G, 4L)	પત્ની (3L, 4G)	પસંદગીઓ
પસંદગી	(1)	3 L	3G	${}^4C_3\,{}^4C_3 = 16$
	(2)	2L, 1G	1L, 1G	${}^4C_2\,{}^3C_1 \cdot {}^3C_1\,{}^4C_2 = 324$
	(3)	1L, 2G	2L, 1G	${}^4C_1{}^3C_2\,{}^3C_2\,{}^4C_1 = 144$
			3G, 3L	${}^3C_3 \cdot {}^3C_3 = 1$

$\therefore$ કુલ 485 આમંત્રણો

99. બિંદુઓ વર્તુળના પરિઘ પર હોવાથી કોઈપણ ત્રણ સમરેખ નથી.

$\therefore$ મળતી જીવાઓની સંખ્યા $= {}^{16}C_2 = 120$

100. BANANA માં કુલ 6 અક્ષરો છે.

A - 3 વખત

N - 2 વખત તથા B એક વખત

કુલ ગોઠવણી $= \dfrac{6\,!}{3\,!\,2!} = 60$

2N પાસે પાસે હોય તેવી ગોઠવણી $= \dfrac{5!}{3!} = 20$

$\therefore$ માગેલ ગોઠવણીઓ $= 60 - 20 = 40$

101. અહીં $20\,! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$

102. $\dfrac{1}{{}^4C_n} = \dfrac{1}{{}^5C_n} + \dfrac{1}{{}^6C_n}$

$\therefore \dfrac{{}^5C_n}{{}^4C_n} = 1 + \dfrac{{}^5C_n}{{}^6C_n}$

$\therefore \dfrac{5!\,n!\,(4-n)!}{n!\,(5-n)! \times 4!} = 1 + \dfrac{5!\,n!\,(6-n)!}{n!\,(5-n)! \times 6!}$

$\therefore \dfrac{5}{5-n} = 1 + \dfrac{6-n}{6}$

$\therefore 30 = 6\,(5-n) + (5-n)(6-n)$

$\therefore 30 = 30 - 6n + 30 - 5n - 6n + n^2$

$\therefore n^2 - 17n + 30 = 0$

$\therefore (n - 15)(n - 2) = 0$

$\therefore n = 2$

($\therefore n > 6$ શક્ય નથી)

103. $1 \times 3 \times 5 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (2n - 1) = \dfrac{(2n)!}{2^n\,(n!)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \; {}^{2n}C_n \cdot {}^nP_n$

104. સ્ત્રીઓ ${}^8C_3$ પ્રકારે અને પુરૂષો $= {}^7C_4 - {}^5C_2$ પ્રકારે

105. $\sum_{r=0}^{n}\frac{n-2r}{{}^nC_r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{n-r}{{}^nC_r} - \sum_{r=0}^{n}\frac{r}{{}^nC_r}$

$= \sum_{r=0}^{n}\frac{n-r}{{}^nC_{n-r}} - \sum_{r=0}^{n}\frac{r}{{}^nC_r}$

$= 0$

106. જો $r \geq 6$ તો $r\,!$ એ 240 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ આપેલ સંખ્યા 240 વડે વિભાજ્ય હોવાથી શેષ $1\,! + 2! + \ldots\ldots\ldots\ldots + 5\,! = 153$

107. x દડા પીળા, 2x દડા કાળા, y દડા લીલા લેતાં

$x + 2x + y = 20$

$\therefore\ 3x + y = 20$

$\therefore\ y = 20 - 3x$

હવે $\quad 0 \leq y \leq 20 \qquad \therefore\ 0 \leq 20 - 3x \leq 20$

$\therefore\ 0 \leq 3x \leq 20$

અથવા $0 \leq x \leq 6$

$\therefore$ દડો પસંદ કરવાના પ્રકારો 7

108. $a = x - 1, \qquad b = y - 1, \qquad c = z - 1, \qquad d = w - 1$ લેતાં

$x, y, z, w \geq 0$ અને

$x - 1 + y - 1 + z - 1 + w - 1 = 20$

$\therefore\ x + y + z + w = 24$

આ સમીકરણના શૂન્યેતર પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા

${}^{24+4-1}C_{4-1} = {}^{27}C_3$

109. $K\left(n^2\right)\left(n^2 - 1^2\right)\left(n^2 - 2^2\right)\left(n^2 - 3^2\right)\ldots\ldots \left[n^2 - (n-1)^2\right] = r!$

$K\left(n^2\right)(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3)\ldots\ldots(n + n - 1)\cdot(n - n + 1) = r!$

$\therefore\ K \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)n\ (n+1)(n+2)\ldots\ldots\ldots(2n-1) = r!$

$\therefore\ kn(2n-1)! = r\,!$

$\therefore\ K = 2$

$LHS = (2n)! = r!$

$\therefore\ r = 2$

જવાબો

1	A	41	A	81	B
2	B	42	A	82	D
3	D	43	A, D	83	B
4	C	44	C	84	D
5	C	45	B	85	B
6	A	46	D	86	D
7	C	47	A	87	B
8	C	48	B	88	C
9	C	49	B	89	A
10	D	50	D	90	C
11	A	51	D	91	B
12	C	52	A	92	C
13	A	53	B	93	A
14	C	54	D	94	B
15	C	55	C	95	A
16	D	56	C	96	B
17	C	57	B	97	D
18	A	58	A	98	C
19	C	59	D	99	B
20	A	60	A	100	A
21	A	61	D	101	B
22	A	62	C	102	D
23	C	63	C	103	B
24	B	64	D	104	D
25	C	65	D	105	D
26	C	66	D	106	A
27	D	67	C	107	B
28	B	68	D	108	D
29	A	69	A	109	D
30	C	70	A		
31	B	71	C		
32	D	72	C		
33	C	73	D		
34	B	74	C		
35	B	75	A		
36	A	76	C		
37	D	77	B		
38	B	78	D		
39	D	79	B		
40	D	80	C		

<u>સૂચનો</u>

1. $bN = \{bx / x \in N\} =$ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનોગણ જે bનો અવયવી

$cN = \{cx / x \in N\} =$ ધનપૂર્ણાંકસંખ્યા ઓનોગણ જે c નો અવયવી છે.

$\therefore\ bN \cap cN =$ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ જે bc નો અવયવી N =bcN ($\therefore$ b અને C અવિભાજ્ય છે)

$\therefore d = bc$

2. હવે $2^m = 2^n + 112$ આપેલ છે.

$\Rightarrow 2^n\left(2^{m-n} - 1\right) = 2^4 \times 7$

$\Rightarrow n = 4, 2^{m-n} - 1 = 7$

$\Rightarrow n = 4,\ m = 7$

3. n(A) = 70, n(B) = 82 $n(A \cap B) = x$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Rightarrow n(A \cap B) = 152 - n(A \cup B)$, પરંતુ $n(A \cup B) \le 100$

$\Rightarrow n(A \cap B) \ge 52$ અને $n(A \cap B) \le 70$

$\therefore\ 52 \le n(A \cap B) \le 70$

4. $X \cup \{3,4\} - \{3,4\} = \{1,2,5,6\}$ એ નાનામાં નાનો ગણ છે.

5. $n((A \times B) \cap (B \times A)) = n((A \cap B) \times (B \cap A))$

$= n(A \cap B).n(B \cap A)$

$= 43 \times 43$

$= 43^2$

6. $X = \{(1,2,7),(1,3,6),(1,4,5),(2,3,5)\}$

હવે $(1,4,5)$ અને (2,3,5) એ y ના પણ ઘટક છે.

$\therefore (1,4,5)$ અને (2,3,5) એ $x \cap y$ માં છે.

7. ધારોકે x કુટુંબ કસબામાં રહે છે.

ગણ A = {કુટુંબ પાસે સ્કૂટર છે. }

B = { કુટુંબ પાસે કાર છે. }

$\therefore n(A) = \frac{30x}{100}, n(B) = \frac{40x}{100}$ અને $n(A \cup B)' = \frac{50x}{100}$

$\therefore\ n(A\cup B)=\frac{50x}{100},\ n(A\cap B)=\frac{20x}{100}$

$\therefore \frac{20x}{100}=2000, \quad \therefore\ x=10000$

$\therefore$ કાર અને સ્કૂટર બંન્ને હોય તેવા 20% છે.

8. $\tan\theta+\sec\theta=\sqrt{2}\sec\theta$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{2}-1$

ઉપરાંત $\sec\theta-\tan\theta=\sqrt{2}\tan\theta$ માટે $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

9. $n(C)=n\left(\bigcup_{i=1}^{60} Ai\right) \quad =\frac{1}{20}\ (12\times 60)=36$

$n(C)=n\left(\bigcup_{j=1}^{n} Bj\right) \quad =\frac{4n}{18}=\frac{2n}{9}$

$=36=\frac{2n}{9}\Rightarrow n=162$

10. A ખાલીગણ હોય તો $n(P(A))=1$

11. $n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$

$\Rightarrow 8+2x+6x=2n(A)-2x(\therefore n(A)=n(B))$

$\Rightarrow n(A)=4+5x$

$\Rightarrow n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow\ 4=2x$

$\Rightarrow\ x=2$

12. 5 = 2(m) -5

$\therefore\ m=5$

n = 2(6)-5

n = 7

13. $\{x/x$ એ LATA શબ્દના અક્ષરોનો ગણ }

$=\{L,A,T\}$

$=\{x/x\in Z,\ x^2<5\}\ =\{-2,-1,0,1,2\}$

$\sin 0=0,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1,\ \tan\frac{5\pi}{4}=1$

$\therefore\ \left\{\sin 0, \sin 3\pi/2, \tan 5\pi/4\right\} = \{0,-1,1\}$

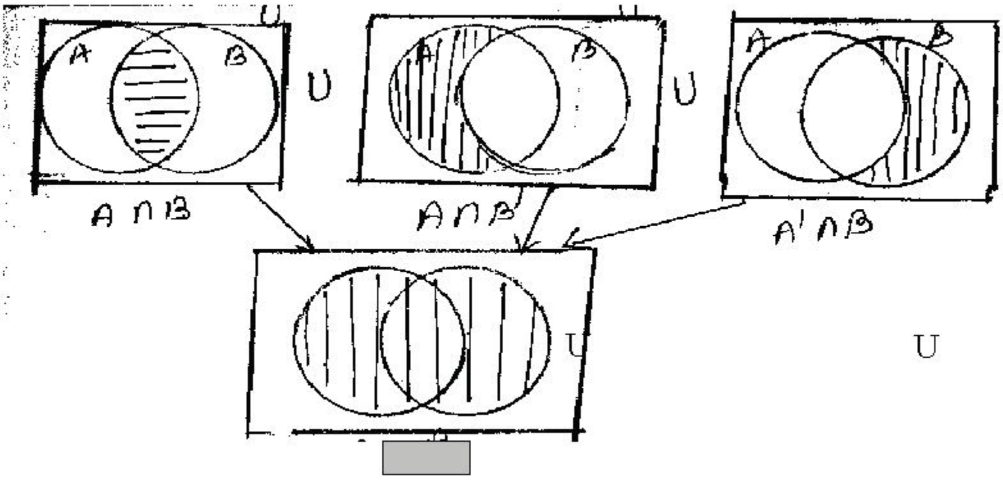
14. $S_1\times S_2$ માં $20\times 4=80$ ઘટકો છે.

$S_1\times S_3$ માં $20\times 4=80$ ઘટકો છે.

સામાન્ય ઘટકો = 20×2 = 40 (b અને d બે સામાન્ય ઘટકો છે.)

$\therefore\ (S_1\times S_2)\ \cup (S_1\times S_3)$ ના ઘટકોની સંખ્યા = 80 + 80 - 40 = 120

15.



U

16. જો X એ વર્તમાન પત્રની સંખ્યા છે.

$\therefore \frac{x}{5}\times 80=400$

$\therefore x=\frac{400\times 5}{80}$

$\therefore\ x=25$

17. $x^2=1\ \Rightarrow x=\pm 1\quad \therefore\ A=\{-1,1\}$

હવે $x^4=1\ \Rightarrow x=\pm 1$ અથવા $x=\pm i$

18. $4x^2+9y^2-32x-54y+109\le 0$

$\Rightarrow 4(x^2-8x)+9(y^2-6y)+109\le 0$

$\Rightarrow 4(x-4)^2+9(y-3)^2\le 36$

$\Rightarrow \left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2\le 1$

$B=\{(x,y)/\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2\le 1\ x,y\in R\}$

ધારો કે (x,y) $\in A\ \therefore\ |x-3|\le 1\Rightarrow -1<x-3<1$

$\Rightarrow\ -2<x-4<0$

$\Rightarrow\ 0<(x-4)^2<4$

$\Rightarrow 0<\left(\frac{x-4}{3}\right)^2\ <\ \frac{4}{9}$

તેજ રીતે $0\le\left(\frac{y-3}{2}\right)^2<1$

$\therefore\ \left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2\ <\frac{4}{9}\ +\ \frac{1}{4}=\frac{25}{36}$

$\therefore\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2<\ \frac{1}{4}$

$\therefore (x,y)\in B\ \ \therefore A\subset B$

19. જો n = 1 તો $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=1^3+2^3+3^3$

$= 36$

$= 9\times 4$

જો n = 2, $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=9\times 11$

જો $n=3\quad n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=9\times 24$

$\therefore\ n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ એ 9 નો અવયવ છે.

$\therefore A\subset B$

20. $\cup\ =\ \{1,2,3\}$

$\therefore\ P(\cup)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\ \phi\}$

અને $A=\{1,2\}$

$[P(A)]'=\{\{3\},\{2,3\},\{1,3\}\{1,2,3\}\}$

21. અહીં $n(A)>n(B)$

$\Rightarrow n(A)-n(B)>0$

$\Rightarrow n(A) - n(B) \leq n(A - B) \leq n(A)$

$\Rightarrow 2 \leq n(A - B) \leq 6$

$\therefore n(A - B)$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 2 છે.

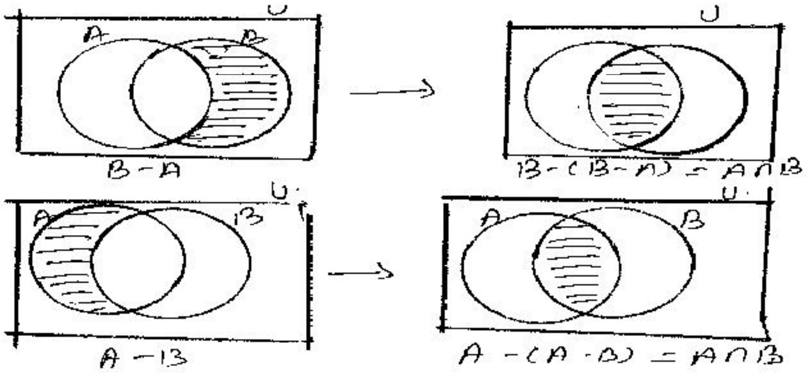
22. અહીં $A \cap B = \{x \in R / f(x) = 0$ અને $g(x) = 0\}$

$$= \{x \in R / f^2(x) + g^2(x) = 0\}$$

23. આપણે જાણીએ છીએકે $n[(A \times B) \cap (B \cap A)] = [n(A \cap B)]^2$

$$= [2]^2 = 4$$

24.



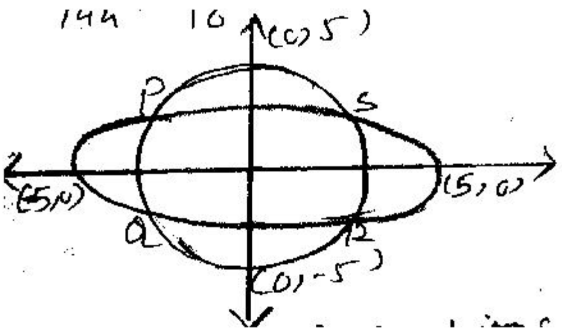
25. $x^2 + 9y^2 = 144$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$x^2 + y^2 = 25$

$\therefore x^2 + y^2 = 5^2$

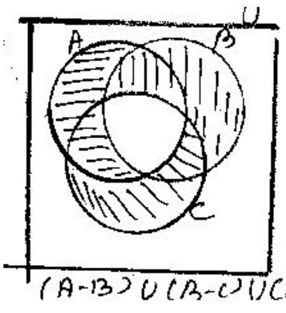
$\therefore A \cap B$ એ ચાર બિંદુ ધરાવે છે.

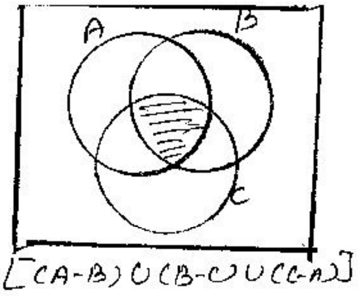


26. આપણે જાણીએ છીએકે $A \cup (B \cap B') = A$

$\therefore A' \cup (A \cup (B \cap B')) = A' \cup A = N$

27.





28. $(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B'\cap C')'\cap C'$

$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B\cup C)\cap C'$

$=[(A\cap A')\cup(B\cup C)]\cap C'$

$=[\phi\cup(B\cup C)]\cap C'=(B\cup C)\cap C'$

$=(B\cap C')\cup(C\cap C')$

$=(B\cap C')\cup\phi$

$=B\cap C'$

29. $y=e^x$ અને $y=e^{-x}$

$\Rightarrow\ e^x=e^{-x}\Rightarrow e^{2x}=1$

$\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

$\therefore y=\ e^0=1$

$\therefore$ A અને B એ (0,1) આગળ મળે છે.

$\therefore\ A\cap B\neq\phi$

30. $x^2-6x+5=0$

$\therefore\ x=5,\ x=1$

$\therefore A=\{1,5\}$

$\therefore A'=(1,5)$

સંબંધ

31. હવે R એ શાંતગણ A પરનો સ્વવાચક સંબંધ છે.

$\therefore (a,a)\in R,\ \forall\ a\in A$

$\therefore$ ઓછામાં ઓછી n ક્રમયુક્ત જોડ R માં બનશે

$\therefore m\geq n$

32. $R=\{(2,2),(3,5),(4,10),(5,17),(6,25)\}$

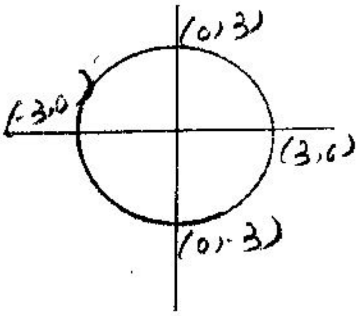
33. $(1) x\subset x$ (દરેક ગણ પોતાના ઉપગણ છે.)

સ્વવાચકતા છે. સાચુ છે.

(2) જો $x\subset y$ અને $y\subset x$ તો $x=y$ અસંમિતતા છે

(3) $X\subset Y,\ Y\subset Z\Rightarrow X\subset Z$ પરંપરિત છે.

34. $x^2 + y^2 = 9$



$\therefore x = \sqrt{9 - y^2}$

$R = \{(0,3),(0,-3),(3,0),(-3,0)\}$

$\therefore$ પ્રદેશ = $\{-3, 0, 3\}$

$\therefore$ વિસ્તાર = $\{-3,0,3\}$

35. T એ સામ્ય સંબંધ છે.

S = $\{1,2\}$

$\therefore (1,1) \notin S \therefore$ S એ સ્વવાચક નથી.

36. અહીં $A = \{2,4,6\}$ અને $B = \{2,3,5\}$

$\therefore A \times B$ એ $3 \times 3 = 9$ ઘટક ધરાવે છે.

$\therefore$ કુલ સંબંધો = 2^9

37. $x \in w$ માટે $(x,x) \in R \Rightarrow R$ સ્વવાચક છે.

હવે $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ ($\therefore$ x,y માં ઓછામાં ઓછો એક અક્ષર સામાન્ય છે)

$\Rightarrow$ R એ સંમિત છે.

પરંતુ R એ પરંપરિત નથી

(x = MITESH, y = MUMBBAI, Z = NAYAN) માટે $(x,y) \in R$, $(Y,Z) \in R$ પરંતુ $(x, z) \notin R$)

38. $(a,a),(b,b),(c,c) \in R$ થાય તો R સ્વવાચક છે.

જો $(b,a),(c,b) \in R$ થાય તો R સંમિત છે.

હવે $(c,a), (a,c) \in R$ હોયતો R પરંપરિત છે.

39. R સ્વવાચક સંમિત છે.

હવે (a,b) R (c,d) અને (c,d) R (e,f) માટે

$\Rightarrow$ $a + d = b + c$ અને $c + f = d + e$

$\Rightarrow$ $a + d + c + f = b + c + d + e$

$\Rightarrow$ $a + f = b + e$

$\Rightarrow$ (a,b) R (e,f) $\therefore R_q$ પરંપરિત છે.

40. $aR_1a \Leftrightarrow |a| = |a|$ R સ્વવાચક છે.

$aR_1b \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow |b| = |a| \Leftrightarrow bR_1a$

R_1 સંમિત છે.

aR_1b અને $bR_1c \Rightarrow |a| = |b|$ અને $|b| = |c|$

$\Rightarrow |a|=|c| \Rightarrow aR_1c$

$\therefore$ R_1 પરંપરિત છે.

41. $R = \{ (x,y) / x,y \in I \; x^2 + y^2 \le 4\}$

$= \{ (0,0), (0,-1), (0,1), (0,-2), \dots, (-2,0) \}$

$\therefore$ R નો પ્રદેશ = $\{-2,-1,0,1,2\}$

42. R એ સ્વવાચક છે અને પરંપરિત છે

પરંતુ 6 એ 2 નો ગુણક છે. જ્યારે 2 એ 6 નો ગુણક નથી

$\therefore$ R સંમિત નથી.

43. $(x, y) \in s \Rightarrow x \ge y \Rightarrow y \le x \Rightarrow (y, x) \notin S$

44. S એ સ્વવાચક અને સંમિત છે.

તથા $(x,y) \in s$, $(y,z) \in s$ $\Rightarrow$ $xy \ge 0$, $yz \ge 0$

$\Rightarrow (xy)(yz) \ge 0$

$\Rightarrow xy^2z \ge 0$

$\Rightarrow xz \ge 0 \quad (\because y^2 \ge 0)$

$\Rightarrow (x,z) \in s$

45. $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

$S' = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

લઈએ તો S અને S' સામ્ય સંબંધ છે.

46. $0^2 + 1^2 = 1$ અને $0^2 + (-1^2) = 1$ તેથી $(0,1) \in S_1$ અને $(0,-1) \in S_1$ S_1 વિધેય નથી

47. n એ m નો અવયવ હોય તો એવું જરૂરી નથી કે m એ n નો અવયવ થાય $\therefore$ R સંમિત નથી

48. $(1,2) \in R$ પરંતુ $(1,2) \notin (a)$ અથવા (b) અથવા (c)

49. $x = 8 - 2y$ લેતાં $R = \{ (2,3), (4,2), (6,1) \}$

50. ધારોકે $x = \tan\theta$, $x \in (-1,1) \Rightarrow \theta \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \tan^{-1}x = \theta$ હવે $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$

$\therefore \theta \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \dots (i)$

$\therefore f(x) = Sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta \qquad (\because (1))$

$\therefore f(x) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

51. ધારોકે $\therefore f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{(n-1)} x + a_n$ એ n કક્ષા વાળી બહુપદી છે.

હવે $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ આપેલ છે.

$\left[a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\right] \left[\frac{a_o}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right]$

$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1} x + a_n + \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n$

x ની સરખી ઘાતવાળા સહગુણકો સરખાવતા આપણને $a_n = 1$ અને $a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = \ldots\ldots\ldots a_1 = 0$

ઉપરાંત $a_0^2 = a_n^2 \quad \therefore a_0^2 = 1 \quad a_0 = \pm 1$

$f(x) = x^n + 1$ or $f(x) = -x^n + 1$

જો $f(x) = x^n + 1$ તો $f(3) = 3^n + 1 = 28 \Rightarrow n = 3$

જો $f(x) = -x^n + 1$ તો $f(3) = -3^n + 1 = 3^n = -27$

જે શક્ય નથી $\therefore f(x) = x^3 + 1 = 65$

52. ધારોકે $\frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7} = y$

$\Rightarrow x^2(1-y) + 2(17-y)x + (7y - 71) = 0$

$\therefore \Delta \geq 0$

$\Rightarrow (y-9)(y-5) \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 9 \;\; or \;\; y \leq 5$

53. x = 0 = y લેતાં $f(0) = f(0)\ f(0) - f(3)\ f(3)$

$1 = (1)(1) - (f(3))^2$

$\therefore \ f(3) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$f(6-x) = f(3-(x-3)) = f(3) f(x-3) - f(0)\ f(x) = -f(x)$ (1 પરથી)

54. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow f(f(x)) = f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = x$

$\therefore f(f(f(x))) = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$\left(\therefore fof\,of \ldots f_{\text{17વખત}}\right)(x) = \dfrac{x}{x-1}$

55. $\left[\dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{1000}\right] = \begin{cases} 0 \text{ જો } 1 < x < 800 \\ 1 \text{ જો } 800 < x < 999 \end{cases}$

$\therefore$ આપેલ બહુપદી ની કિંમત = 200

56. $f(2x+3y,\ 2x-3y) = 24xy = (2x+3y)^2 - (2x-3y)^2$

$\therefore f(x,y) = x^2 - y^2$

57. $\sum_{r=1}^{n} f(r) = f(1) + f(2) + \ldots\ldots\ldots + f(n)$

$= f(1) + (f(1) + f(1)) + (f(2) + f(1)) + \ldots\ldots\ldots + (f(n-1) + f(1))$

$= f(1) + 2f(1) + 3f(1) + \ldots\ldots\ldots + nf(1)$

$= f(1)\,(1 + 2 + 3 \ldots + n) = \dfrac{3}{2}\ \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \left(\therefore f(1) = 3/2\right)$

58. $\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & x(x-1)(x+1) \end{vmatrix} C_{13}(-1),\ C_{23}(-1)$

59. ધારો કે $f(x) = y = 2^{x(x-1)}$

$\Rightarrow \log_2 y = x(x-1)\log_2 2$

$\Rightarrow x^2 - x = \log_2^{y}$

$\Rightarrow \left(x - 1/2\right)^2 = \dfrac{1 + 4\ \log_2 y}{4}$

$\Rightarrow x = 1/2 \pm \dfrac{\sqrt{1 + 4\log_2 y}}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\ \log_2^{x}}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) \dfrac{= 1 + \sqrt{1 + 4\log_2^{x}}}{2} \quad \left(\therefore f^{-1}(x) \geq 1\right)$

60. જો x એ મહત્તમ પૂર્ણાંકભાગ વિધેય હોય તો x - [x] = P/q જ્યાં P અને q એ ધનપૂર્ણાંક છે અને P < q છે

$\therefore p + p < p + q \Rightarrow \frac{p}{p+q} < 1/2 \quad \therefore f(x) = \frac{p}{p+q} < 1/2$

61. $f(-x) = \sec(-x) + \tan(-x)$

$= \sec x - \tan x$

$\neq -f(x)$

$\therefore$ f એ યુગ્મ કે અયુગ્મ નથી

તેજ રીતે g (-x) = - g(x) $\therefore$ g અયુગ્મ વિધેય છે

62. $\log_{0.3}$ (x-1) < 0 x > 2 માટે ઉપરાંત $-x^2 + 2x + 8 > 0$ તો અને તોજ $x \in (-2, 4)$ $\therefore$ આપેલા વિધેયનો પ્રદેશ (2,4) છે.

63. $f(x) = \frac{(\sin\alpha)(x)}{x+1} \Rightarrow f0f(x) = \frac{x\sin^2\alpha}{x(\sin\alpha + 1) + 1}$

પરંતુ $f0f(x) = x$ આપેલ હોવાથી $\frac{x\sin^2\alpha}{x(\sin\alpha + 1) + 1} = x$

$\therefore \sin\alpha = -1$ or $x = 0$ or $\sin\alpha = 1 + x$

પરંતુ $f(x) \neq 0, f(x) \neq I(x) \quad \therefore \sin\alpha = -1$

64. $fog(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 5) = 2x^3 + 7$

હવે $y = 2x^3 + 7 \Rightarrow x^3 = \frac{y-7}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{y-7}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

65. $|\cos x| + \cos x > 0 \Rightarrow \cos x > 0$

$\Rightarrow 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{(4n-1)\pi}{2} < x < \frac{(4n+1)\pi}{2}$

66. $f(x) = \sin^2 x + \left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + \cos x\left(\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin^2 x + \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 + \cos x\left(\frac{\cos x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$= \frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{5}{4}\cos^2 x = \frac{5}{4}$

67. આપણે જાણીએ છીએ કે

જો $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ તો $fof(x) = x$

68. $f(x+y) + f(x-y) = \frac{3^{x+y} + 3^{-x-y}}{2} + \frac{3^{x-y} + 3^{-x+y}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)\left(\frac{3^y + 3^{-y}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\ f\ (x)\ f\ (y)$

69. ${}_{5-x}P_{x-1} = \frac{(5-x)!}{(6-2x)!}$

હવે $5-x > 0$, $x-1 \geq 0$ અને $5-x \geq x-1$

$\Rightarrow x < 5,\ x \geq 1,\quad x \leq 3$

$\therefore x = 1, 2, 3$

70. $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\ \cos x + 1$ આપેલ છે.

$= 2\left(\sin x . \frac{1}{2} - \cos x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1$

$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

71. $(x \neq 2)$ અને $x^3 - x > 0$ હશે ત્યારે f વ્યાખ્યાયિત થશે.

i e $x(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow x > 0$ અને $x^2 > 1$ or $x < 0$ અને $x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow\ x > 0$ અને $x > 1$ or $x < 0$ અને $x > -1$

f નો પ્રદેશ = $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

72. $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 10^{-5}$

$\Rightarrow \left|\frac{x+1-1}{x+1}\right| < 10^{-5}$

$$\Rightarrow 1-10^{-5} < \frac{1}{x+1} < 1+10^{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{100000}{99999} > x+1 > \frac{100000}{100001}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{100001} < x < \frac{1}{99999}$$

$$\Rightarrow -(100001)^{-1} < x < (99999)^{-1}$$

73. હવે x = y = 1 લેતાં

f(1) f(1) - f(1) = 1+1 $\Rightarrow f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$

$$\Rightarrow f(1) = 2 \quad (\because f(1) > 0)$$

હવે y = 1 લેતાં

$$f(x)f(1) - f(x) = x+1 \Rightarrow 2f(x) - f(x) = x+1$$

$$\therefore f(x) = x+1$$

74. $\cos x \geq \frac{1}{2}$, (6- x) (1+6x) > 0 or $\cos x \leq \frac{1}{2}$, (6-x) (1+6x) < 0

$$\therefore x \in \left(\frac{-1}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 6\right)$$

75. $2^m = 2^n + 48$

$$\Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^4 \times 3$$

$$2^{n-4}(2^{m-n} - 1) = 3$$

કારણ કે 3 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. $\Rightarrow$ n = 4

$\Rightarrow$ m = 6

76. $-1 \leq \log_3 \frac{x}{4} \leq 1$

$$\Rightarrow -\log 3 \leq \log \frac{x}{4} \leq \log 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{x}{4} \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 12$$

77. f એ $-4 \le x \le 3$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી g એ $x^2 - 16 \le 0$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી

$\therefore$ f અને g એ [-4,3] પર વ્યાખ્યાયિત નથી

78. $f(x) = x^4 + 2 = y \Rightarrow x = (y-2)^{1/4}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^{1/4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(83) = (81)^{1/4} = \pm 3$$

અને $f^{-1}(-2) = (-4)^{1/4} = \emptyset$

79. $21 - x > 0,\ 3x - 1 \ge 0,\quad 21 - x \ge 3x - 1$ અને $25 - 3x > 0$

$5x - 3 \ge 0,\ 25 - 3x \ge 5x - 3$

$\Rightarrow \frac{3}{5} < x \le \frac{7}{2}$

$\therefore$ નો પ્રદેશ = {1,2,3}

80. અહીં ત્રણ શક્યાતાઓ છે.

(i) (a,a), (b,c), (c,d), (d,b)

(ii) (a,a), (b,d), (c,c), (d,b)

(iii) (a,a), (b,d), (c,d), (d,c)

81. cos (log x) cos(log y) $-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\log\left(\frac{x}{y}\right) + \cos(\log(xy))\right)\right]$

$= 0$

$(\therefore \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y)$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$

82. $a^y = a - a^x > 0$ ઘાતાંકિય વિધેય પ્રમાણે

a^y હંમેશા ધન થશે.

$a^x < a$

$\Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

83. Case : 1 $x \le -2$ તો $-x \ge 2 \Rightarrow 2 - x \ge 4,\ 2 - x \ge 2 + x$

$(\therefore 2 + x \le 0)$

$\therefore \max\{2 - x, 2 + x, 4\} = 2 - x$

Case : 2 $-2 < x < 2$ ત્યારે $2 > -x > -2 \Rightarrow -2 < -x < 2$

$\Rightarrow 0 < 2 - x < 4$

હવે $-2 < x < 2 \Rightarrow 0 < 2 + x < 4$

$\therefore \max\{2-x, 2+x, 4\}$ is 4

Case : 3

$x \geq 2 \Rightarrow x+2 \geq 2+2$

$\Rightarrow x+2 \geq 4$

$x \geq 2 \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow 2-x \leq 0$

$\therefore \max\{2-x, 2+x, 4\}$ is $2+x$

84. જો $y = \frac{7^x - 7^{-x}}{7^x + 7^{-x}} \Rightarrow 7^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_7 \frac{y+1}{1-y}$

85. f(x) નું મુખ્ય આવર્તમાન $= \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ છે. પરંતુ f(x) નું મુખ્ય આવર્તમાન π છે.

$$\therefore \frac{\pi}{\sqrt{m}} = \pi \Rightarrow 1 = \sqrt{m} \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow [P] = 1 \quad \Rightarrow 1 \leq P < 2$$

86. વિધેય $f(x) = 3\sin\left[\sqrt{\frac{\pi^2}{9} - x^2}\right]$ આપેલ છે.

f ત્યારે જ વ્યાખ્યાયિત થશે જ્યારે $\frac{\pi^2}{9} - x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 \leq \frac{\pi^2}{9}$$

$$\Rightarrow |x| \leq \frac{\pi}{3}$$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0,\ f(0) = 3\sin \pi/3 = 3/2\ \sqrt{3}$

$\left[0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

87. f(x) નો પ્રદેશ $= \log_5 [\log_6[\log_8 x]]$ એ ત્યારેજ

વ્યખ્યાયિત થશે જ્યારે $\log_6[\log_8 x] > 0$

$\Rightarrow \log_8 x > 6^0$

$\Rightarrow x > 8$

88. g(x) = 1+ x- [x] = 1+{x} જ્યાં {x} એ x > 0 નો અપૂર્ણાંક ભાગ છે. તેથી f(g(x)) = 1 $x \in R$ માટે

89. D_f, |x|- x >0 $\Rightarrow |x| > x$ i.e. $x < |x|$

એ ત્યારેજ સાચું થશે જ્યારે $x < 0$ $D_f = (-\infty, 0)$

90. $(fog)(x) = 2[g(x)]$ અને $(g+g)(x) = 2[g(x)]$

$\therefore fog(x) = (g+g)(x)$

91. f નો પ્રદેશ અને સંયોજિત વિધેય gof નો પ્રદેશ સરખા (-1, 1) થશે,

92. $f(x) = 6^x + 3^x + 6^{-x} + 3^{-x} + 2 = \left(6^x + \frac{1}{6^x}\right) + \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) + 2$

$$\geq 2\sqrt{6^x \frac{1}{6^x}} + 2\sqrt{3^x \frac{1}{3^x}} + 2 \quad (\therefore AP > GF)$$

$$= 2 + 2 + 2 = 6$$

93. અહીં 2 f(x) + f(1-x) = x^2 (1)

x ની જગ્યાએ 1-x મુક્તાં

$2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$ મળશે (2)

1 અને 2 પરથી $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$ મળશે.

94. અહીં $3f(x) + 2f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) = 10x + 30$ (1)

હવે x = 7 અને x = 11 મૂકતાં આપણને બે સમીકરણ મળશે તેમને ઉકેલતા f(7) = 4 મળશે.

95. અહીં $f(x) = [x] + \sum_{r=1}^{100} \frac{\{x+r\}}{100}$

$$= [x] + \frac{1}{100} \sum_{r=1}^{100} ((x+r) - [x] - r)$$

($\therefore$ r પૂર્ણાંક છે)

$$= [x] + x - [x] \quad \left[\because \frac{1}{100} \sum_{r=1}^{100} 1 = 1\right]$$

$= x$

96. $f\left(3 + \sqrt[3]{x}\right) = 2 - \sqrt[3]{x} + x$ હવે $3 + \sqrt[3]{x} = y$ લેતા

$x = (y-3)^3$ અને $\sqrt[3]{x} = y - 3$

$\therefore\ f(y) = 2-(y-3)+(y-3)^3$

97. (0,1), (0,-1) માટે R_1 એક-એક નથી

(1,e) (-1,e) માટે R_2 એ એક-એક નથી

(0,3), (3,3) માટે R_3 એક-એક નથી.

98. અહીં $f^1(-2) = \{x \in R / f(x) = -2\}$

$= \{x \in R / x^2 + 1 = -2\} = \emptyset$

$f^{-1}(17) = \{x \in R / f(x) = 17\}$

$= \{x \in R / x^2 = 16\}$

$= \{\pm 4\}$

99. ધારોકે $y = \sin^{-1}\{4-(x-7)^3\}^{1/5}$

$\therefore\ 4-\sin^5 y = (x-7)^3$

$\therefore x = 7+(4-\sin^5 y)^{1/3}$

$\therefore\ f^{-1}(x) = 7+(4-\sin^5 x)^{1/3}$

100. $y = \sin(\tan^{-1}x) \Rightarrow y = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = f(x) = 1-2^{-x} \quad \therefore\ x = \log_2\frac{1}{1-y} = -\log_2(1-y)$

$y = 2\times+3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$

èíWËW

1	a	26	d	51	a	76	d
2	c	27	b	52	c	77	a
3	b	28	a	53	d	78	b
4	a	29	b	54	a	79	a
5	a	30	b	55	d	80	c
6	d	31	a	56	c	81	c
7	d	32	a	57	c	82	d
8	a	33	d	58	c	83	d
9	a	34	d	59	b	84	a
10	d	35	a	60	b	85	c
11	d	36	a	61	c	86	c
12	a	37	b	62	a	87	b
13	c	38	c	63	d	88	b
14	b	39	d	64	d	89	c
15	b	40	a	65	a	90	c
16	a	41	c	66	a	91	a
17	c	42	b	67	c	92	d
18	a	43	a	68	d	93	c
19	a	44	a	69	b	94	b
20	b	45	b	70	d	95	d
21	a	46	a	71	a	96	b
22	d	47	d	72	b	97	d
23	c	48	d	73	c	98	a
24	b	49	c	74	d	99	b
25	d	50	b	75	b	100	c

યુનિટ-5

ગાણિતિય અનુમાનનો સિધ્ધાંત

અગત્યના મુદ્દા

પ્રાકૃતિક ચલ $n \in N$ પરનાં વિધાન $P(n)$ ની સત્યાર્થતા ચકાસવા માટે ગણિતીય અનુમાનનો સિધ્ધાંત ઉપયોગી છે જે નીચે મુજબ છે.

<u>ગણિતીય અનુમાનનો સિધ્ધાંતઃ-</u>

પ્રાકૃતિક ચલ n પરનું વિધાન $P(n), n \in N$ છે.

$P(n)$ $n \in N$ માટે,

(1)આધારઃ $P(1)$ સત્ય હોય,

(2)આનુસંગિક સોપાનઃ જો $P(k), k \in N$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારી $P(k+1), k \in N$ સત્ય સાબિત થાય તો $P(n), \forall n \in N$ સત્ય થાય.

નોંધઃ- 1. ગણિતીય અનુમાનનો સિધ્ધાંત માત્ર પ્રાકૃતિક ચલ પર આધારિત વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસી આપે છે.

2. ગણિતીય અનુમાનનાં સિધ્ધાંતથી પ્રાકૃતિક ચલ પર આધારિત સૂત્ર મેળવી શકાતું નથી પરંતુ માત્ર તેની સત્યાર્થતા સકાસી શકાય છે.

<u>કેટલાંક વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારોમાં ગણિતીય અનુમાનના સિધ્ધાંતનો ઉપયોગઃ-</u>

(1) ચલ પ્રકાર 1:

જો વિધાન $P(n), k \geq k_0$, $n \in N$ આપેલ હોય અને કોઇક ધન પૂર્ણાંક k_0 માટે $P(k_0)$ સત્ય હોય તથા $k \geq k_0$, $k \in N$, માટે $P(k)$ સત્ય હોય $\Rightarrow P(k+1)$ પણ સત્ય બને, તો પ્રત્યેક $n \geq k_0$, $k \in N$ માટે સત્ય બને.

(2) ચલ પ્રકાર 2 :

જો વિધાન $P(n), n \in N$ આપેલ છે. જો $P(1)$ અને $P(2)$ સત્ય હોય તથા ધન પૂર્ણાંક k માટે, $P(k)$ અને $P(k+1)$ સત્ય હોય $\Rightarrow P(k+2)$ સત્ય બને, તો પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય થાય.

<u>પ્રશ્નબેન્ક</u>

(1) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $7^{2n} - 48n - 1$ એ ……. વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 25 (b) 26 (c) 1234 **(d) 2304**

(2) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $2.7^n + 3.5^n - 5$ એ ……. વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 64 (b) 676 (c) 17 **(d) 24**

(3) પ્રત્યેક $n \geq 2$ માટે, $n^2(n^4 - 1)$ એ ……. વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 60 (b) 50 (c) 40 (d) 70

(4) $n \in N$ માટે, જો ……. હોય તો $10^{n-2} > 81n$

(a) $n > 5$ **(b) $n \geq 5$** (c) $n < 5$ (d) $n > 6$

(5) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, એ ……. વિધાન સત્ય છે.

(a) $2^n < n$ (b) $n^2 > 2^n$ **(c) $n^4 < 10^n$** (d) $2^{3n} > 7n + 1$

(6) $n > 1, n \in N$ માટે, $a_n = 2^{2^n} + 1$ હોય તો a_n નો એકમનો અંક …….થાય.

(a) 3 (b) 5 (c) 8 **(d) 7**

(7) જો $P(n): 4^n/(n+1) < (2n)!/(n!)^2$, $n \in N$ હોય તો …….. માટે P(n) સત્ય છે.

(a) $n \geq 1$ (b) $n > 0$ (c) $n < 0$ **(d) $n \geq 2, n \in N$**

(8) ગણિતીય અનુમાનના સિધ્ધાંત દ્વારા પ્રત્યેક $n \in N$ માટે

$\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta.....\cos[(2^{n-1})\theta] = ...$

(a) $\sin2^n\theta / 2^n \sin\theta$ (b) $\cos2^n\theta / 2^n \sin\theta$

(c) $\sin2^n\theta / 2^{n-1} \sin\theta$ (d) આમાંથી એક પણ નહી

(9) ગણિતીય અનુમાનના સિધ્ધાંત દ્વારા પ્રત્યેક $n \in N$ માટે,

$1/(1.2.3) + 1/(2.3.4) + \ldots + 1/\{n(n+1)(n+2)\} = \ldots\ldots$

(a) $n(n+1)/4(n+2)(n+3)$ **(b) $n(n+3)/4(n+1)(n+2)$**

(c) $n(n+2)/4(n+1)(n+3)$ (d) આમાંથી એક પણ નહી

(10) ગણિતીય અનુમાનના સિધ્ધાંત દ્વારા પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, $5^{2n+1} + 3^{n+2} . 2^{n-1}$ એ .... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 19 (b) 18 (c) 17 (d) 14

(11) ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની ગુણાકાર ..... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 6 (b) 5 (c) 7 (d) 4

(12) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $a^n - b^n$ એ હમેંશાં.... વડે વિભાજ્ય છે. (જ્યાં a અને b ભિન્ન સંમેય સંખ્યાઓ છે).

(a) $2a - b$ (b) $a + b$ **(c) $a - b$** (d) $a - 2b$

(13) જો $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ એ $x+y$ વડે વિભાજ્ય હોય તો n એ ...... છે.

(a) ધન પૂર્ણાંક (b) ફક્ત યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક

(c) ફક્ત અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક (d) આમાંથી એક પણ નહી

(14) અસમતા $n! > 2^{n-1}$ એ ....માટે સત્ય છે.

(a) $n > 2, n \in N$ (b) $n < 2$ (c) $n \in N$ (d) આમાંથી એક પણ નહી

(15) નાનામાં નાના ધન પૂર્ણાંક n માટે $n! < \{(n+1)/2\}^n$ થાય તો $n = \ldots\ldots$

(a) 1 **(b) 2** (c) 3 (d) 4

(16) $\forall n \in N$ માટે, $(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$ એ કયા મોટામાં મોટા ધન પૂર્ણાંક વડે વિભાજ્ય છે ?

(a) 120 (b) 4 (c) 240 (d) 24

(17) જો $x(x^{n-1} - n\alpha^{n-1}) + \alpha^{n}(n-1)$ એ $(x-\alpha)^2$ વડે વિભાજ્ય હોય તો ....

(a) $n>1$ (b) $n>2$ **(c) પ્રત્યેક $n \in N$** (d) આમાંથી એક પણ નહીં

(18) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, $3^{2n} - 1$ એ ...... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) આમાંથી એક પણ નહીં

(19) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $2^{3n} - 7n - 1$ એ .... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 64 (b) 36 **(c) 49** (d) 25

(20) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $10^{2n-1} + 1$ એ .... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 11 (b) 13 (c) 9 (d) આમાંથી એક પણ નહી

(21) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, $2.4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ એ .... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 2 (b) 9 (c) 3 **(d) 11**

(22) જો $P(n): n^2 + n + 1$ એ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે અને $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k+1)$ સત્ય હોય તો $P(n)$ ..... માટે સત્ય છે.

(a) $n>1$ માટે (b) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે

(c) $n>2$ માટે **(d) આમાંથી એક પણ નહી**

(23) જો $P(n): 3^n < n!$, $n \in N$ હોય તો $P(n)$ ...... માટે સત્ય થાય.

(a) $n \geq 6$ માટે **(b) $n \geq 7$ માટે**

(c) $n \geq 3$ માટે (d) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે

(24) જો $P(n): 1+3+5+.......+(2n-1) = n^2$ એ .... માટે સત્ય છે.

(a) $n>1$ માટે સત્ય છે. **(b) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.**

(c) કોઈ પણ n માટે સત્ય નથી. (d) આમાંથી એક પણ નહી

(25) જો પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, $P(n)$ એ એવું વિધાન છે કે જેથી $k \in N$ માટે,

P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k+1) સત્ય હોય તો P(n) એ........ સત્ય છે.

(a) પ્રત્યેક $n>1$ માટે (b) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે

(c) પ્રત્યેક $n>2$ માટે **(d) કંઇ પણ કહી શકાય નહીં**

(26) જો $P(n) : 1+3+5+ \dots + (2n-1) = 3 + n^2$ નીચેનામાંથી કયું સાચું થાય ?

(a) P(1) સત્ય છે. **(b) P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k+1) સત્ય છે.**

(c) P(k) સત્ય હોય તો P(k+1) સત્ય નથી. (d) બંને (a) અને (b) સત્ય છે.

(27) જો શ્રેણિકો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in N$ માટે નીચેનામાંથી સાચું થાય ?

(ગણિતીય અનુમાનના સિધ્ધાંનો ઉપયોગ કરો)

(a) $A^n = n.A - (n-1) I$ (b) $A^n = 2^{n-1}.A + (n-1) I$

(c) $A^n = n.A + (n-1) I$ (d) $A^n = 2^{n-1}.A - (n-1) I$

(28) જો $S_n = 2.7^n + 3.5^n - 5$, $n \in N$ એ .... ના ગુણિત દ્વારા વિભાજ્ય છે.

(a) 5 (b) 7 **(c) 24** (d) આમાંથી એક પણ નહીં

(29) $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ એ .... દ્વારા વિભાજ્ય છે. જ્યાં $n \in N$

(a) 7 (b) 5 **(c) 9** (d) 17

(30) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, $(3+5^{1/2})^n + (3-5^{1/2})^n$ એ .... સંખ્યા છે.

(a) યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા (b) અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

(c) કોઇ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા (d) અસંમેય સંખ્યા

(31) 5^{99} ને 13 વડે ભાગતાં શેષ .... રહે.

(a) 6 **(b) 8** (c) 9 (d) 10

(32) પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે, $3^{3n} - 2n + 1$ એ ... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 12

P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k+1) સત્ય હોય તો P(n) એ........ સત્ય છે.

(a) પ્રત્યેક $n>1$ માટે (b) પ્રત્યેક $n\in N$ માટે

(c) પ્રત્યેક $n>2$ માટે **(d) કંઇ પણ કહી શકાય નહીં**

(26) જો $P(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1) = 3+n^2$ નીચેનામાંથી કયું સાચું થાય ?

(a) P(1) સત્ય છે. **(b) P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k+1) સત્ય છે.**

(c) P(k) સત્ય હોય તો P(k+1) સત્ય નથી. (d) બંને (a) અને (b) સત્ય છે.

(27) જો શ્રેણિકો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in N$ માટે નીચેનામાંથી સાચું થાય ?

(ગણિતીય અનુમાનના સિધ્ધાંતની ઉપયોગ કરો)

(a) $A^n = n.A - (n-1)I$ (b) $A^n = 2^{n-1}.A + (n-1)I$

(c) $A^n = n.A + (n-1)I$ (d) $A^n = 2^{n-1}.A - (n-1)I$

(28) જો $S_n = 2.7^n + 3.5^n - 5, n\in N$ એ .... ના ગુણિત દ્વારા વિભાજ્ય છે.

(a) 5 (b) 7 **(c) 24** (d) આમાંથી એક પણ નહી

(29) $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ એ .... દ્વારા વિભાજ્ય છે. જ્યાં $n\in N$

(a) 7 (b) 5 **(c) 9** (d) 17

(30) પ્રત્યેક $n\in N$ માટે, $(3+5^{1/2})^n + (3-5^{1/2})^n$ એ .... સંખ્યા છે.

(a) યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા (b) અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

(c) કોઇ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા (d) અસંમેય સંખ્યા

(31) 5^{99} ને 13 વડે ભાગતાં શેષ .... રહે.

(a) 6 **(b) 8** (c) 9 (d) 10

(32) પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે, $3^{3n} - 2n + 1$ એ ... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 12

જવાબો:-

(1) **(d) 2304** (2) (d) 24 (3) (a) 60 (4) **(b) $n \geq 5$**

(5) **(c) $n^4 < 10^n$** (6) (d) 7 (7) **(d) $n \geq 2, n \in N$**

(8) (a) $\sin 2^n\theta / 2^n \sin\theta$ (9) **(b) $n(n+3) / 4(n+1)(n+2)$**

(10) (a) 19 (11) **(a) 6** **(12) (c) a – b** (13) **(a)** ધન પૂર્ણાંક

(14) (a) $n > 2$ **(15) (b) 2** **(16) (a) 120** (17) **(c)** પ્રત્યેક **$n \in N$**

(18) (a) 8 (19) **(c) 49** (20) **(a) 11** (21) **(d) 11**

(22) (d) આમાંથી એક પણ નહી **(23) (b) $n \geq 7$** માટે

(24) **(b)** પ્રત્યેક **$n \in N$** માટે સત્ય છે. **(25) (d)** કંઇ પણ કહી શકાય નહી

(26) (b) P(k) સત્ય છે **$\Rightarrow$ P(k+1)** સત્ય છે. (27) **(a) $A^n - nA - (n-1)I$**

(28) (c) 24

(29) (c) 9 **(30) (a)** યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા **(31) (b) 8**

(32) (a) 2 **(33) (c) 133** **(34) (b) $n > 2$**

સૂચનો

(1)

$P(1): 0 = 0 \times 2304$ $\quad P(2): 2304 = 1 \times 2304$ $\therefore$ $P(1)$ અને $P(2)$ સત્ય છે. --(1)

ધારોકે $P(k): 7^{2k} - 48k - 1 = m \times 2304$, $m \in N$ અને

$P(k+1): 7^{2k+2} - 48(k+1) - 1 = m'(2304)$, $m' \in N$ સત્ય છે. ------- (2)

હવે, $P(k+2): 7^{2k+4} - 48(k+2) - 1 = 49 \times 7^{2k+2} - 48(k+1) - 49$

$= 49 \times 7^{2k+2} - 48(k+1) - 49 = 49(7^{2k+2} - 1) - 48(k+1)$

$= 49(2304m' + 48k + 48) - 48k - 48$ $\quad$ (.... (2))

$= 49 \times 2304m' + 49 \times 48k + 49 \times 48 - 48k - 48$

$= 49 \times 2304m' + 48 \times 48k + 48 \times 48 = 2304(49m' + k + 1)$

$= 2304 \times m''$, જ્યાં $m'' = 49m' + k + 1$ ધન પૂર્ણાંક છે.

$\therefore$ Ans. (d) 2304

(2)

$\forall n \in N$ માટે $P(n): 2.7^n + 3.5^n - 5$

$P(1): 24$, $P(2): 98 + 75 - 5 = 168 = 7 \times 24$

Ans. (a) 24

(3)

પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક $n > 2$, $P(n): n^2(n^4 - 1)$

$P(2): 4 \times 15 = 60$, $P(3): 9 \times 80 = 60 \times 12$

$\therefore$ વિકલ્પો પરથી, Ans. (a) 60

(4) $n \in N$ માટે, $P(n): 10^{n-2} > 81n$

P(1) : 0.1 > 81 સત્ય નથી, P(2): 1> 162 સત્ય નથી , P(3):10 > 243 સત્ય નથી, તેવી જ રીતે P(4) સત્ય નથી , પરંતુ P(5): 1000 > 405 સત્ય છે અને P(6): 10000 > 486 સત્ય છે $\therefore$ Ans. (b) $n \geq 5$

(5)

અહીં $n = 1$ માટે, $2^n < n$ સત્ય નથી,

$n^2 > 2^n$ સત્ય નથી,

$n^4 < 10^n$ સત્ય છે,

$n^{3n} > 7n + 1$ સત્ય નથી,

Ans. (c) $n^4 < 10^n$

(6)

$n = 2$ માટે, $a_2 = 2^{2^2} + 1 = 17 = 10 + 7$

ધારોકે $a_k = 2^{2^k} + 1 = 10m + 7$ સત્ય છે, જ્યાં $k > 1, m \in N$ ... (1)

હવે, $a_{k+1} = 2^{2^{k+1}} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^2 + 1 = (10m + 6)^2 + 1$ ((1) પરથી)

$= 10(10m^2 + 12m + 3) + 7$

$\therefore$ a_n ની એકમના સ્થાનનો અંક 7 છે.

$\therefore$ Ans. (c) 7

(7)

P(n): $4^n/(n+1) < (2n)!/(n!)^2$, $n \in N$

P(1) સત્ય નથી અને $n < 0$ શક્ય નથી.

$\therefore$ (a), (b), (c) વિકલ્પો શક્ય નથી. $\therefore$ Ans. **(d) $n \geq 2$,** $n \in N$

(8) n=1માટે, P(n):$\cos\theta \cos2\theta \cos4\theta \ldots \cos[(2^{n-1})\theta]$ પરથી,

$\therefore P(1): \cos\theta$

વિકલ્પ (a) માં n = 1 લેતાં, $\cos\theta$ મળે.. $\therefore$ Ans. **(a) $\sin 2^n\theta / 2^n \sin\theta$**

(9)

n = 1માટે,

$1/(1.2.3) = 1/6$

હવે n = 1માટે, ફક્ત વિકલ્પ **(b) $n(n+3)/4(n+1)(n+2)$** માંથી કિંમત 1/6

$\therefore$ Ans. **(b) $n(n+3)/4(n+1)(n+2)$**

(10)

n = 1માટે, $P(1): 5^{2+1} + 3^{1+2}.2^{1-1}$

$= 125 + 27 = 152 = 19 \times 8$

ધારોકે $P(k) = 5^{2k+1} + 3^{k+2}.2^{k-1} = 19m, m \in N$ ---- (1)

$P(k+1) = 5^{2k+3} + 3^{k+3}.2^{k} = 5^2.5^{2k+1} + 3.3^{k+2}.2.2^{k-1}$

$= 25(19m - 3^{k+2}.2^{k-1}) + 6.3^{k+2}.2^{k-1}$ (by (1))

$= 25.19m - 19.3^{k+2}.2^{k-1}$

$= 19(25m - 3^{k+2}.2^{k-1})$

$= 19m'$

$\therefore$ Ans. (a) 19

(11)

ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર $P(n): n(n+1)(n+2)$ લઇએ.

$P(1) = 6$ જે 6 વડે વિભાજ્ય છે.

P(2) = 24 જે 6 વડે વિભાજ્ય છે.

∴ Ans. (a) 6

(12)

પ્રત્યેક $n \in N$, $P(n) : a^n - b^n$

$P(1) = a - b$ અને $P(2) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

∴ Ans. (c) $a - b$

(13)

$P(n): x^{2n-1} + y^{2n-1} = \lambda(x+y)$ જ્યાં λ એ બહુપદી છે.

$P(1) : x + y$ એ $x+y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$P(2): x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

∴ Ans. **(a) ધન પૂર્ણાંક**

(14)

$P(n): n! > 2^{n-1}$

હવે, P(1) અને P(2) સત્ય નથી, પણ P(3) સત્ય છે.

ધારોકે $P(k): k! > 2^{k-1}$, $k>2$ સત્ય છે.

$P(k+1):(k+1)! > 2^k$

L.H.S of $P(k+1) = (k+1)! = k!(k+1)$

$> 2^{k-1}(k+1) = 2^k.(k+1)/2$

$> 2^k$

∴ Ans. (a) $n > 2$

(15) નાનામાં નાના ધન પૂર્ણાંક n માટે, $P(n):n! < \{(n+1)/2\}^n$,

P(1):1 < 1 સત્ય નથી, P(2):2 < 9/4 સત્ય છે. P(3):6<8 સત્ય છે. P(4) સત્ય છે.

$\therefore$ **Ans. (b) 2**

(16)

∀n∈N માટે, (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) એ કયા મોટામાં મોટા ધન પૂર્ણાંક વડે વિભાજ્ય છે ?

P(n): (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6), n∈N

P(1) = 3.4.5.6.7 = 120.21 P(2) = 4.5.6.7.8 = 120.56

P(3) = 5.6.7.8.9 = 120.126 P(4) = 6.7.8.9.10 =120.252

P(5) = 7.8.9.10 = 120.42 P(6) = 8.9.10.11.12 = 120.99.13

$\therefore$ Ans. **(a) 120**

(17)

$$P(n) : x(x^{n-1} - n\alpha^{n-1}) + \alpha^{n} (n-1) = g(x).(x - \alpha)^{2}$$

$$P(1) = 0$$

$$P(k) : x(x^{k-1} - k\alpha^{k-1}) + \alpha^{k} (k-1) = g(x).(x - \alpha)^{2}$$

$$P(k+1) : x(x^{k} - (k+1)\, \alpha^{k}) + \alpha^{k+1} (k) = g'(x).(x - \alpha)^{2}$$

$$L.H.S. = x[kx\alpha^{k-1} - (k-1)\, \alpha^{k} + g(x).(x - \alpha)^{2} - (k+1)\, \alpha^{k}] + \alpha^{k+1}k$$

$$= kx^{2}\alpha^{k-1} - 2kx\alpha^{k} + g(x).x.(x - \alpha)^{2} + k\, \alpha^{k+1}$$

$$= g(x).x.(x - \alpha)^{2} + (x^{2} - 2x\alpha + \alpha^{2})k\, \alpha^{k-1}$$

$$= (x - \alpha)^{2} [g(x).x + k\, \alpha^{k-1}]$$

$$= g'(x).(x - \alpha)^{2}$$

= R.H.S.

$\therefore$ Ans. **(c) all n∈N**

(18) પ્રત્યેક $n \in N$, $P(n) : 3^{2n} - 1$

$P(1) = 8,$ $P(2) = 80 = 10.8$ $\therefore$ Ans.**(a) 8**

(19)

પ્રત્યેક $n \in N$, , $P(n) : 2^{3n} - 7n - 1$

$P(1) = 0$ $P(2) = 49$ $P(3) = 512 - 21 - 1 = 490 = 49.10$

$\therefore$ Ans. **(c) 49**

(20)

પ્રત્યેક $n \in N$, , $P(n) : 10^{2n-1} + 1$

$P(1) = 11,$

$P(2) = 1001 = 11.91$

$\therefore$ Ans. **(a) 11**

(21)

$\forall n \in N$, $P(n) : 2.4^{2n+1} + 3^{3n+1}$

$P(1) = 209 = 11.19$

$P(2) = 11.385$

$\therefore$ Ans. **(d) 11**

(22) $P(n) : n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$

$P(1) : 3$ જે સત્ય છે.

$P(n) : n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ જે હંમેશાં અયુગ્મ સંખ્યા છે.

$\therefore$ Ans. **(b) $\forall n \in N$**

(23) $P(n) : 3^n < n!$, $n \in N$

$P(1) : 3^1 < 1$ જે સત્ય નથી. $P(3) : 3^3 < 3!$ જે સત્ય નથી.

$P(6) : 3^6 < 6!$ જે સત્ય નથી.

$P(7) : 3^7 < 7!$ જે સત્ય છે. $\therefore$ Ans. **(b) $n \geq 7$**

(24)

$P(1):1 = 1$

$P(k):1+3+5+.......+(2k-1) = k^2.$

$P(k+1):1+3+5+.......+(2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$

$L.H.S. = 1+3+5+.......+(2k-1) + (2k+1)$

$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = R.H.S.$

$\therefore$ Ans. **(b) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.**

(25)

P(1) સત્યાર્થતા ચકાસી શકાતી નથી કારણકે વિધાન P(n) આપેલ નથી.

$\therefore$ Ans. **(d) કંઇ પણ કહી શકાય નહી**

(26)

$P(1) : 1 = 4$ જે સત્ય નથી.

ધારોકે $P(k) : 1+3+5+ \dots + (2k - 1) = 3 + k^2$ સત્ય છે.

$P(k+1) = 1+3+5+ \dots + (2k - 1)+(2k+1)$

$= 3 + k^2 +2k+1 = (k+1)^2 +3 = R.H.S.$

$\therefore$ Ans.**(b) P(k)** સત્ય છે $\Rightarrow$ **P(k+1)** સત્ય છે.

(27)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P(1):A = A - (1-1) I = A$ $\therefore$ P(1) સત્ય છે.

P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ **P(k+1)** સત્ય છે, **k** $\in N$

$\therefore$ Ans. (a) $A^n = n.A-(n-1)I$

(28)

$S_n = 2.7^n + 3.5^n - 5, n \in N$

$S_1 = 2.7^1 + 3.5^1 - 5 = 24, n \in N$

$S_2 = 2.7^2 + 3.5^2 - 5 = 168 = 24.7$

$\therefore$ Ans.**(c) 24**

(29)

$P(n) : 10^n + 3(4^{n+2}) + 5, \ n \in N$

$P(1) : 10^1 + 3(4^{1+2}) + 5 = 207 = 9.23,$

$P(2) = 9.97$

$\therefore$ Ans.**(c) 9**

(30)

પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, $P(n):(3+5^{1/2})^n+(3-5^{1/2})^n$

$P(1): (3+5^{1/2})^1+(3-5^{1/2})^1$

= 6 જે યુગ્મ છે.

$P(2)= (3+5^{1/2})^2+(3-5^{1/2})^2$

=16 જે યુગ્મ છે.

$\therefore$ Ans. **(a) યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા**

(31)

$5^{99} = 5(5^2)^{49} = 5(25)^{49} = 5(26-1)^{49}$

= 5(ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા) – 5 or 26×5(ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા –1) + 13.9 + 8

$\therefore$ શેષ – 5 અથવા 8

$\therefore$ Ans.**(b) 8**

(32)

$\forall n \in N,\ P(n): 3^{3n} - 2n + 1$

$P(1) : 26 = 2 \times 13$

$P(2) : 726 = 2 \times 343$

$P(3) : 19683 - 6 + 1 = 19678 = 2 \times 9839$

$\therefore$ Ans.**(a) 2**

(33)

$\forall n \in N,\ P(n) = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$

$P(1) : 11^{1+2} + 12^{2+1} = 133 \times 23,$

$P(2) : 11^{2+2} + 12^{4+1} = 14641 + 248832 = 263473 = 133 \times 1981$

$\therefore$ Ans. **(c) 133**

(34)

For $n \in N,\ P(n) = 2^n (n-1)! < n^n$

$P(1) : 2 < 1$ સત્ય નથી.

$P(2) : 4 < 4$ સત્ય નથી.

$P(3) : 16 < 27$ સત્ય છે.

તેવી જ રીતે $P(4)$ સત્ય છે.

$\therefore$ Ans. **(b) $n > 2$**

એકમ - 6
દ્વિપદી પ્રમેય
<u>અગત્યના મુદ્દા</u>

- $C_r = nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
- $x, y \in$ R તથા $n \in N$ માટે,

  $(x+y)^n = nC_0 x^n y^0 + nC_1 x^{n-1} y + nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + nC_n x^0 y^n$

  $= \sum_{r=0}^{n} nC_r x^{n-r} y^r$

  $e.g. \sum_{r=0}^{10} 10C_r 2^{10-r} (-5)^r = (2-5)^{10} = 3^{10}$
- $(x + y)^n$ ના વિસ્તરણમાં r + 1 મું પદ.

  $T_{r+1} = nC_r x^{n-r} y^r$
- x, y $\in$ R તથા n $\in$ N માટે

  $(x-y)^n = nC_0 x^n y^0 - nC_1 x^{n-1} y^1 + nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + (-1)^n\ nC_n x^0 y^n.$

  $= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r nC_r x^{n-2} y^r$

  $(x - y)^n$ ના વિસ્તરણમાં r + 1 મું પદ,

  $T_{r+1} = (-1)^r nCr\, x^{n-r} y^r$
- $(x + y)^n$ કે $(x - y)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની કુલ સંખ્યા = n + 1.

  કોઈપણ પદમાં x અને y ની ઘાતનો સરવાળો n જ થાય.
- મધ્યમ પદ

  ★ જો n યુગ્ય હોય તો $\frac{n+2}{2}$ મું પદ મધ્યમપદ થાય.

  $r+1 = \frac{n+2}{2} \Rightarrow r = \frac{n}{2}$ લેતાં મધ્યમપદ = $nC_{n/2}\, x^{n/2}\, y^{n/2}$

  ★ જો n અયુગ્મ હોય તો $\frac{n+1}{2}$ મું પદ અને $\frac{n+3}{2}$ મું પદ મધ્યમપદ થાય.

  $r = \frac{n-1}{2}$ લેતાં મધ્યમપદ $nC_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} y^{\frac{n+1}{2}}$

  $r = \frac{n+1}{2}$ લેતાં મધ્યમપદ $nC_{(n+1)/2}\, x^{(n+1)/2} y^{(n-1)/2}$

- **મોટામાં મોટો સહગુણક**

  ★ જો n યુગ્મ હોય તો $(x + y)^n$ ના વિસ્તરણમાં સૌથી મોટો સહગુણક $nC_{n/2}$

  ★ જો n અયુગ્મ હોય તો $(x + y)^n$ ના વિસ્તરણમાં સૌથી મોટો સહગુણક $nC_{(n-1)/2}$ અને $nC_{(n+1)/2}$ થાય.

- **મોટામાં મોટું પદ**

  $(x + y)^n, x > 0, y > 0, n \in N$ ના વિસ્તરણમાં મોટામાં મોટું પદ શોધવા માટે $K = \dfrac{(n+1)y}{x+y}$ શોધો.

  જો k પૂર્ણાંક હોય તો k મું અને k + 1 મું પદ, અને જો k અપૂર્ણાંક હોય તો $\alpha = [K]$ શોધો. આ સંજોગોમાં $\alpha + 1$ મું પદ મોટામાં મોટું થાય.

- $(x+y)^n + (x-y)^n = 2[nC_0x^ny^0 + nC_2x^{n-2}y^2 + nC_4x^{n-4}y^4 + ... + \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ પદ સુધી.

  $(x+y)^n - (x-y)^n = 2\{nC_1x^{n-1}y + nC_3x^{n-3}y^3 + ... + \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ પદ સુધી}

  $e.g.\ (1+\sqrt{2}x)^9 + (1-\sqrt{2}x)^9$ ના વિસ્તરણમાં શૂન્યેતર પદોની સંખ્યા = $\left[\dfrac{9}{2}\right] + 1 = 5$

- $(1 + x)^n = nC_0x^0 + nC_1x^1 + nC_2x^2 + ... + nC_nx^n; n \in N$

  $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^r નો સહગુણક $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = nC_r$ કૌંસની

  ઘાત x ની ઘાત

  $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં r + 1 માં પદ નો સહગુણક= nC_r

- $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}.a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3}...a_m^{n_m}$

  જ્યાં $n_1, n_2, n_3... n = \in N$

  તથા $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m = n$.

  આ વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા = $(n + m - 1)\ C_{(m-1)}$

  e.g. $(x + y + z)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા = $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

  $(x + y + z)^n$ ના સહગુણકોનો સરવાળો = 3^n

- **સહગુણકો સંબંધિત પરિણામો**

  (1) $nC_0 + nC_1 + nC_2 + ...\ nC_n = 2^n$

  (2) $nC_0 + nC_2 + nC_4 + ... = 2^{n-1}$

  (3) $nC_1 + nC_3 + nC_5 + ... = 2^{n-1}$

(4) જો $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ સમાંતરણ શ્રેણીમાં હોય તો

$$a_0nC_0 + a_1nC_1 + a_2nC_2 + ... + a_nnC_n = (a_0 + a_n)2^{n-1}$$

(5) $nC_0 - nC_1 + nC_2 - .... + (-1)^n nC_n = 0$

(6) $(x + y)^n$, $n \in N$ ના વિસ્તરણમાં r માં, r + 1 માં, r + 2 માં પદના સહગુણકો સમાંતરણ શ્રેણીમાં હોય તો $r = \frac{1}{2}\left[n + \sqrt{n+2}\right]$.

(7) $(1 + x)^{2n}$ માં x^n નો સહગુણક = 2 $\{(1 + x)^{2n-1}$ માં x^n નો સહગુણક$\}$

(8) $(1 + x)^n (1+\frac{1}{x})^n$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{1}{x}$ નો સહગુણક $\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$

- x^n ને y વડે ભાગવાથી મળતી શેષ શોધવા x કે x ની અન્ય ઘાતવાળા પદને $ky \pm 1$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરવો.

પ્રશ્ન બેન્ક

(1) જો $\left(2+\frac{x}{3}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^7 અને x^8 ના સહગુણકો સમાન હોય તો n = ...

(a) 55 (b) 56 (c) 54 (d) 58

(2) $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9, x \neq 0$ ના વિસ્તરણમાં અચળ પદ .... છે.

(a) $\frac{5}{18}$ (b) $\frac{7}{18}$ (c) $\frac{5}{17}$ (d) $\frac{7}{17}$

(3) $\left(2-\frac{x^3}{3}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદના સહગુણકો .... છે.

(a) $-\frac{560}{27},-\frac{280}{81}$ (b) $\frac{560}{27},-\frac{280}{81}$ (c) $-\frac{560}{27},\frac{280}{81}$ (d) $\frac{560}{27},\frac{280}{81}$

(4) $\left(\frac{2}{x}-3xy\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદ .... છે.

(a) 14370048 y^6 (b) 14370024 y^6
(c) 43110144 y^6 (d) 43110124 y^6

(5) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદ kx^m હોય તો m = ...

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1

(6) $\left(x-\frac{x^3}{5}\right)^8$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદનો સહગુણક .... છે.

(a) $\frac{14}{625}$ (b) $\frac{70}{625}$ (c) $\frac{14}{125}$ (d) $\frac{70}{125}$

(7) $\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદનો ક્રમ .... છે.

(a) $\frac{n}{2}+1$ (b) $\frac{n+1}{2}$ (c) n + 1 (d) $\frac{n+3}{2}$

(8) $(x + y)^{13}$ ના વિસ્તરણમાં ત્રીજા અને .... મા પદનો સહગુણક સમાન છે.

(a) 12 (b) 11 (c) 8 (d) 13

(9) $(x - y)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં ($x^7 y^3$ નો સહગુણક) - ($x^3 y^7$ નો સહગુણક) = ...

(a) $10C_7$ (b) $2 \cdot 10C_7$ (c) $10C_7 + 10C_1$ (d) 0

(10) $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^{35}$, $a \neq b$ ના વિસ્તરણમાં a અને b ની ઘાત પૂર્ણાંક હોય તેવા પદોની સંખ્યા .... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(11) જો $\left(\frac{1}{x^{\frac{8}{3}}} + x^2 \log_{10} x\right)^8$ ના વિસ્તરણમાં છઠ્ઠું પદ 5600 હોય તો x=...........

(a) 2 (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{10}$ (d) 10

(12) જો P અને Q એ $(1 + x)^{2n}$ અને $(1 + x)^{2n-1}$ ના વિસ્તરણમાં x^n ના સહગુણકો હોય તો ....

(a) P = Q (b) P = 2Q (c) 2P = Q (d) P + Q = 0

(13) $\left(\frac{x+1}{x^{2/3} - x^{1/3} + 1} - \frac{x-1}{x - x^{1/2}}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં અચળપદ .... છે.

(a) 210 (b) 105 (c) 70 (d) 35

(14) જો $w \neq 1$ એ 1 નું ઘનમૂળ હોય તો $\sum_{r=0}^{100} 100C_r \left(2 + w^2\right)^{100-r} . W^r$

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

(15) $(1 - x + x^2)^5$ ના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક.............છે.

(a) -30 (b) -20 (c) -10 (d) 30

(16) $(1-\lambda x)^8$ અને $(1-\lambda x)^6$ ના મધ્યમપદના સહગુણકો સમાન હોય તો λ = ...

(a) $\frac{2}{7}$ (b) - $\frac{2}{7}$ (c) - $\frac{3}{7}$ (d) એકપણ નહિં.

(17) $(1 - x)^m (1 + x)^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$; $m, n \in N$ તથા $a_1 = a_2 = 10$ તો (m ,n) ....

(a) (45, 35) (b) (35, 20) (c) (35, 45) (d) (20, 45)

(18) $(x+\sqrt{x^3-1})^5 + (x-\sqrt{x^3-1})^5$ નું વિસ્તરણ એ .... કક્ષાની બહુપદી છે.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

(19) $S = (x + 3)^{n-1} + (x + 3)^{n-2} (x + 2) + (x + 3)^{n-3}. (x + 2)^2 + ... + (x + 2)^{n-1}$ ના વિસ્તરણમાં x^r નો સહગુણક .... છે.

(a) $nC_r(3^r - 2^r)$ (b) $nC_r(3^{n-r} - 2^{n-r})$

(c) $3^{n-r} - 2^{n-r}$ (d) $3^{n-r} + 2^{n-r}$

(20) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{10} + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^{10}$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા .... છે.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

(21) $(2x - 3y)^4$ માં મધ્યમપદનો સહગુણક .... છે.

(a) -96 (b) 216 (c) -216 (d) 96

(22) $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4$ ના વિસ્તરણમાં અચળપદ .... થાય.

(a) 5 (b) -5 (c) 4 (d) -4

(23) $(\sqrt{2}+1)^5+(\sqrt{2}-1)^5 =$ ....

(a) 58 (b) $58\sqrt{2}$ (c) -58 (d) $-58\sqrt{2}$

(24) $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં યુગ્ય પદોના સરવાળા ને E વડે અને અયુગ્મ પદોના સરવાળા ને O વડે દર્શાવીએ તો $O^2 - E^2 =$ ....

(a) $x^2 - a^2$ (b) $(x^2 - a^2)^n$ (c) $x^{2n} - a^{2n}$ (d) એકપણ નહિં.

(25) $\sum_{r=0}^{n} nC_r 4^r =$ ....

(a) 4^n (b) 5^n (c) 4^{-n} (d) 5^{-n}

(26) $(10.1)^5 =$ ....

(a) 105101.501 (b) 105101.0501

(c) 105101.00501 (d) 105101.05001

(27) $a, b \in N, a \neq b$ તો all $n \in N$ માટે $a^n - b^n$ એ .... વડે વિભાજ્ય છે.

(a) a - b (b) b - a (c) a and b both (d) એકપણ નહિં.

(28) $(1.1)^{10000}$ .... 1000.

(a) > (b) < (c) = (d) એકપણ નહિં.

(29) $\left(2x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{25}$ ના વિસ્તરણમાં 10મું પદ .... છે.

(a) $\frac{1760}{x^2}$ (b) $\frac{1760}{x^3}$ (c) $\frac{880}{x^2}$ (d) $\frac{880}{x^3}$

(30) $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^{25}$ ના વિસ્તરણમાં છેલ્લેથી 11મું પદ .... છે.

(a) $25C_{15}\frac{2^{10}}{x^{20}}$ (b) $-25C_{15}\frac{2^{10}}{x^{20}}$

(c) $-25C_{14}\frac{2^{11}}{x^{11}}$ (d) $25C_{14}\frac{2^{11}}{x^{11}}$

(31) $(2 + x)^{40}$ ના વિસ્તરણમાં 16મું અને 17મું પદ સમાન હોય તો x = ...

(a) $\frac{17}{24}$ (b) $\frac{17}{12}$ (c) $\frac{34}{13}$ (d) $\frac{34}{15}$

(32) $\left(\frac{1}{x}+x^{\log_{10} x}\right)^5$ ના વિસ્તરણમાં ત્રીજું પદ 1000 હોય તો x = ...

(a) 10 (b) 100 (c) 1000 (d) એકપણ નહિં.

(33) $\left\{x^{\sqrt{\frac{1}{\log x+1}}}+x^{\frac{1}{12}}\right\}^6$ ના વિસ્તરણમાં ચોથું પદ 200 હોય તથા x > 1 તો x = ...

(a) 10 (b) 100 (c) 1000 (d) એકપણ નહિ.

(34) $\left\{3^{\log_3 \sqrt{25^{x-1}+7}}+3^{-\frac{1}{8}\log_3(5^{x-1}+1)}\right\}^{10}$ ના વિસ્તરણનું 9 મું પદ 180 હોય તો x = ...

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0

(35) $\left(a-\frac{3}{a^2}\right)^m, m \in N, a \neq 0$ વિસ્તરણના પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 559 હોય તો m = ...

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13

(36) $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ ના વિસ્તરણમાં x^5 નો સહગુણક છે.

(a) 150 (b) 171 (c) 192 (d) 161

(37) $\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં અચળ પદ શોધો.

(a) 190 (b) 200 (c) 210 (d) 220

(38) $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં ત્રણ ક્રમિક પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1:7:42 હોય તો n = ...

(a) 35 (b) 45 (c) 55 (d) 65

(39) જો n યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદ .... છે.

(a) $\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)}$ (b) $\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$ (c) $\frac{2(n!)}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$ (d) $\frac{(n!)}{2\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$

(40) 5^{20} ને 48 વડે ભાગવાથી મળતી શેષ .... થાય.

(a) 46 (b) 47 (c) 48 (d) 49

(41) $2^{3n} - 7n + 4$ ને 49 વડે ભાગતાં મળતી શેષ .... છે.

(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 5

(42) $nC_0 + 2nC_1 + 3nC_2 + ... + (n+1). nC_n$ = ...

(a) $(n + 1)2^{n-1}$ (b) $(n + 2)2^{n-1}$

(c) $(n + 1)2^n$ (d) $(n + 1) 2^{n-1}$

(43) 17^{30} ને 5 વડે ભાગતાં મળતી ન્યૂનતમ ધન શેષ .... છે.

(a) 2 (b) 4 (c) 3 (d) 1

(44) $nC_1 - nC_2 + nC_3 + ... - (-1)^n nC_n = $ ....

(a) 0 (b) -1 (c) n (d) 1

(45) $13C_1 + 13C_2 + ... + 13C_6 = $ ....

(a) $2^{13}-1$ (b) 2^{13} (c) $2^{12}-1$ (d) $2^{14}-1$

(46) $10C_1 + 10C_2 + 10C_3 + ... + 10C_9 = $ ....

(a) 512 (b) 1024 (c) 2048 (d) 1023

(47) $(m^2x^2 + 2mx + 1)^{31}$ ના વિસ્તરણમાં સહગુણકોનો સરવાળો શૂન્ય હોય તો m = ...

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) -2

(48) $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ તો $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = $ ....

(a) $\frac{3^n-1}{2}$ (b) $\frac{1-3^n}{2}$ (c) $\frac{3^n+1}{2}$ (d) $\frac{3^{n+1}}{2}$

(49) $(1 + x)^{29}$ ના વિસ્તરણમાં છેલ્લા 15 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો .... થાય.

(a) 2^{15} (b) 2^{30} (c) 2^{29} (d) 2^{28}

(50) 2^{2000} ને 17 વડે ભાગતાં મળતી શેષ .... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 8 (d) 12

(51) $\sum_{r=0}^{100} 100C_r (x-5)^{100-r}.4^r$ માં x^{53} નો સહગુણક .... છે.

(a) $100\ C_{53}$ (b) $100\ C_{48}$ (c) $-100\ C_{53}$ (d) $100\ C_{51}$

(52) $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં મોટામાં મોટા સહગુણકવાળું પદ મોટામાં મોટું મૂલ્ય ધરાવતું હોય તો $x \in$ .... ; $x > 0$.

(a) $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n-1}\right)$ (b) $\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$ (c) $\left(\frac{n}{n+2}, \frac{n+2}{n}\right)$ (d) એકપણ નહિં.

(53) $nC_1 + 2.nC_2 + 3.nC_3 + ... + n.nC_n = $ ....

(a) $n.2^{n-1}$ (b) $(n-1)2^{n-1}$ (c) $(n+1)2^{n-1}$ (d) $(n-1)2^n$

(54) $x > -1$ માટે $(1 + x)^n > 1 + nx$ એ નીચેના પૈકી કયા વિકલ્પ માટે સાચું છે ?

(a) $\forall n \in N$ (b) $\forall n > 1$ (c) $\forall n > 1$ અને $x \neq 0$ (d) $\forall n \in R$

(55) $(1+x)^n = nC_0 + nC_1x + nC_2x^2 + ... + nC_nx^n$ અને

$\frac{nC_1}{nC_0} + 2.\frac{nC_2}{nC_1} + 3\frac{nC_3}{nC_2} + ... + n\frac{nC_n}{nC_{n-1}} = \frac{1}{k}n(n+1)$ તો k = ...

(a) 3 (b) 6 (c) 2 (d) 12

(56) $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{1}{x}$ નો સહગુણક .... છે.

(a) $2nC_n$ (b) $2nC_{n-1}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $2nC_0$

(57) $(1 + x + x^2 + x^3)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં x^4 નો સહગુણક .... છે.

(a) 330 (b) 990 (c) 1040 (d) 900

(58) $(1 + x)^{2n-1}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદોના સહગુણકોનો સરવાળો શોધો.

(a) $(2n - 1)C_n$ (b) $(2n - 1)\ C_{(n-1)}$

(c) $2n\ C_n$ (d) $2nC_{(n+1)}$

(59) $8^{2n} - 62^{2n+1}$ ને 9 વડે ભાગતાં મળતી શેષ .... છે.

(a) 0 (b) 2 (c) 7 (d) 8

(60) $(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})^6$ ના વિસ્તરણમાં સંમેય પદોની સંખ્યા .... છે.

(a) 22 (b) 12 (c) 11 (d) 7

(61) $(3 + 2x)^{50}$ ના વિસ્તરણમાં સૌથી મોટું પદ .... છે. જ્યાં $x=\frac{1}{5}$

(a) $50C_7 3^{43}\left(\frac{2}{5}\right)^7$ (b) $50C_6 3^{44}\left(\frac{2}{5}\right)^6$

(c) $50C_{43} 3^{7}\left(\frac{2}{5}\right)^{43}$ (d) $50C_{44} 3^{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{44}$

(62) જો A અને B એ $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^r અને x^{n-r} ના સહગુણકો હોય તો ....

(a) $A + B = n$ (b) $A = B$

(c) $A + B = 2^n$ (d) $A - B = 2^n$

(63) $(1 + x)^{18}$ ના વિસ્તરણમાં $(2r + 4)$ માં પદ અને $(r - 2)$ માં પદ ના સહગુણકો સમાન હોય તો $r =$ ....

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

(64) $(1 + px)^n = 1 + 24x + 252x^2 + \ldots$ તો ....

(a) $p = 3, n = 8$ (b) $p = 2, n = 6$

(c) $p = 3, n = 6$ (d) $p = 3, n = 5$

(65) $(1 + x - 3x^2)^{4331}$ ના વિસ્તરણના સહગુણકોનો સરવાળો .... થાય.

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2^{4330}

(66) $R=(3+\sqrt{5})^{2n}$ તથા $f = R - [R]$ જ્યાં, [ ] મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે તો $R(1-f) =$ ....

(a) 2^{2n} (b) 4^{2n} (c) 8^{2n} (d) 4^{2n}

(67) $R=(\sqrt{2}+1)^{2n+1}, n \in N$ અને $f = R - [R]$, જ્યાં [ ] મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે તો $Rf =$ ....

(a) 2^{2n+1} (b) 2^{2n-1} (c) $2^{2n} - 1$ (d) 1

(68) $\left(5^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{8}}\right)^{1024}$ ના વિસ્તરણમાં સંમેય પદોની સંખ્યા શોધો.

(a) 0 (b) 129 (c) 229 (d) 178

(69) $\left(4^{\frac{1}{5}}+7^{\frac{1}{10}}\right)^{45}$ ના વિસ્તરણમાં સંમેય પદોની સંખ્યા .... છે.

(a) 40 (b) 5 (c) 41 (d) 8

(70) $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{n}$ ના વિસ્તરણના સહગુણકોનો સરવાળો 256 હોય તો અચળ પદ શોધો.

(a)1120 (b) 512 (c) 1020 (d) 1050

(71) $\left(x-\frac{a}{x}\right)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં x^{-3} નો સહગુણક શોધો.

(a) $-792\ a^5$ (b) $-923\ a^7$ (c) $-792\ a^6$ (d) $-330\ a^7$

(72) $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં બીજા, ત્રીજા અને ચોથા પદના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો n શોધો.

(a) 28 (b) 14 (c) 7 (d) $\frac{7}{2}$

(73) $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની ≠ સંખ્યા કેટલી થાય ?

(a) $(n + 1)\ C_r$ (b) $(n + r - 1)\ C_{(r-1)}$

(c) $(n - r + 1)\ C_{(r-1)}$ (d) $(n + r - 1)\ C_r$

(74) $(3 + 5x)^{15}$ ના વિસ્તરણમાં સૌથી મોટું પદ .... છે. જ્યાં $x = \frac{1}{5}$

(a) $15C_3(3^{13})$ (b) $15C_4\ (3^{12})$ (c) $15C_4\ (3^{10})$ (d) $15C_4\ (3^{11})$

(75) $(1 + x)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં સૌથી મોટું પદ .... છે. જ્યાં $x = \frac{2}{3}$

(a) $210\left(\frac{3}{2}\right)^{6}$ (b) $210\left(\frac{2}{3}\right)^{6}$

(c) $210\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$ (d) $210\left(\frac{3}{2}\right)^{4}$

(76) $\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+...+\binom{n-1}{n-1}=.........;n>1$

(a) $2^n -1$ (b) 2^{n-2} (c) $2^{n-1} - 1$ (d) 2^{n-1}

(77) $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+5\binom{n}{2}+...+(2n+1)\binom{n}{n}=$ .... $n \in N$

(a) $(n+2)2^n$ (b) $(n+1)2^n$ (c) $n\ 2^n$ (d) $(n+1)2^{n+1}$

(78) $\left(\frac{a^{1/3}}{b^{1/6}}+\frac{b^{1/2}}{a^{1/6}}\right)^{21}$ ના (r + 1) માં પદમાં a અને b ની ઘાત સમાન હોય તો r = ...

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11

(79) $(1+x)^n$ ના વિસ્તરણમાં 5માં, 6ઠ્ઠાં અને 7માં પદના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો n ની કિંમતો શોધો.

(a) 7 કે 12 (b) -7 કે 14 (c) 7 કે 14 (d) -7 કે 12

(80) $\left[(\sqrt{2}+1)^8\right]=$__________, જ્યાં [ ] એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે.

(a) 1151 (b) 1152 (c) 1153 (d) 1154

(81) $\left[(\sqrt{3}+1)^6\right]=$.......... જ્યાં [ ] મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે.

(a) 415 (b) 416 (c) 417 (d) 418

(82) $\frac{19^3+6^3+3(19)(6)(25)}{3^6+6(243)(2)+(15)(81)(4)+(20)(27)(8)+(15)(9)(16)+(6)(3)(32)+2^6}=$.......

(a) 1 (b) 5 (c) 2 (d) 6

(83) $\left(ax^p+\frac{b}{x^q}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં અચળપદનું અસ્તિત્વ હોય તો તેનો ક્રમ ....

(a) $\frac{qn}{p+q}+1$ (b) $\frac{pn}{p-q}+1$ (c) $\frac{pn}{p+q}+1$ (d) $\frac{pn}{p-q}-1$

(84) $\left(2x^3+\frac{5}{x^2}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં r-મું પદ અચળપદ હોય તો r = ...

(a) 6 (b) 7 (c) 4 (d) 5

(85) $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં .... મું પદ અચળપદ છે.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

(86) $\left(px+\frac{1}{x}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં ચોથું પદ અચળપદ હોય તો n = ...

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

(87) $\left(2-\frac{x^3}{3}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમપદ $\frac{a}{27}x^9$ હોય તો a = ...

(a) 560 (b) -560 (c) $\frac{280}{3}$ (d) $-\frac{280}{3}$

(88) $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$; $x\neq 0$ માં r મું પદ અચળપદ હોય તો r = ...

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

(89) $\left(\frac{a}{x^q}+bx^p\right)^n$ માં અચળપદનું અસ્તિત્વ હોય તો તેનો ક્રમ .... છે.

(a) $\frac{qn}{p+q}+1$ (b) $\frac{pn}{p-q}+1$

(c) $\frac{pn}{p+q}+1$ (d) $\frac{pn}{p-q}-1$

(90) $\left(\frac{3}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{10}$, $x\neq 0$ ના વિસ્તરણમાં .... મું પદ અચળ પદ થશે.

(a) 4 (b) 7 (c) 8 (d) 9

(91) $(x + y)^n$ ના વિસ્તરણમાં સહગુણકોનો સરવાળો 4096 હોય તો આ વિસ્તરણ માં સૌથી મોટો સહગુણક .... થાય.

(a) 792 (b) 924 (c) 1594 (d) 2990

(92) $(x + 1)^{p+q}$ ના વિસ્તરણમાં x^r ના સહગુણકને a_r વડે દર્શાવીએ તો ....

(a) $a_p = a_q$ (b) $a_p = -a_q$ (c) $a_p a_q = 1$ (d) એકપણ નહિં.

(93) $n, r \in N, r > 1, n > 2$ માટે $(1 + x)^{2n}$ માં વિસ્તરણમાં r + 2 મા પદ અને 3r માં પદના સહગુણકો સમાન હોય તો n = ...

(a) 3r (b) 3r+1 (c) 2r (d) 2r+1

(94) $\left(3^{1/2}+5^{1/8}\right)^{256}$ ના વિસ્તરણમાં પૂર્ણાંક પદની સંખ્યા .... છે.

(a) 33 (b) 34 (c) 35 (d) 32

(95) s(k) : $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = 3 + k^2$ તો નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન સાચું છે ?

(a) $S(k) \not\Rightarrow S(k+1)$ (b) $S(k)\Rightarrow S(k+1)$

(c) S(1) (d) ગાણિતીય અનુમાન થી પરિણામ સાબિત કરી શકાય.

(96) $(1+\alpha x)^4$ સાચું છે અને $(1-\alpha x)^6$ ના મધ્યમપદોના x ની સમાન ઘાતવાળા પદોના સહગુણકો સમાન હોય તો $\alpha =$ ......

(a) $-\frac{3}{10}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) $-\frac{5}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

(97) $(1 + x)(1 - x)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક .... થાય.

(a) $(-1)^{n-1}(n-1)^2$ (b) $(-1)^n(1-n)$

(c) n-1 (d) $(-1)^{n-1}$ n

(98) $(1 + y)^m$ ના વિસ્તરણમાં r માં (r + 1) માં અને (r + 2) માં પદોના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો

(a) $m^2 - (4r + 1)m + 4r^2 - 2 = 0$ (b) $m^2 - (4r - 1)m + 4r^2 + 2 = 0$

(c) $m^2 - (4r - 1)m + 4r^2 - 2 = 0$ (d) $m^2 - (4r + 1)m + 4r^2 + 2 = 0$

(99) $\left(ax^2+\frac{a}{bx}\right)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં x^7નો સહગુણક અને $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં x^{-7} નો સહગુણક સમાન હોય તો

(a) $\frac{a}{b}=1$ (b) ab = 1 (c) a - b = 1 (d) a + b = 1

(100) જો x ની કિંમત ખૂબ જ નાની હોય તથા x^3 કે તેનાથી વધુ ઘાતવાળાં પદોને અવગણવામાં આવે તો

$\frac{(1+x)^{3/2}-\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ ની લગભગ કિંમત .... થાય.

(a) $-\frac{3}{8}x^2$ (b) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2$

(c) $1-\frac{3}{8}x^2$ (d) $3x+\frac{3}{8}x^2$

(101) $S = 20C_0 - 20C_1 + 20C_2 - 20C_3 + ... + 20C_{10} =$ ....

(a) $-20C_{10}$ (b) $\frac{1}{2}(20C_{10})$ (c) 0 (d) $20C_{10}$

(102) $n \geq 0$ માટે $(a - b)^n$ ના વિસ્તરણમાં 5માં અને 6ઠ્ઠા પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય તો $\frac{a}{b}=$.......

(a) $\frac{5}{n-4}$ (b) $\frac{6}{n-5}$ (c) $\frac{n-5}{6}$ (d) $\frac{n-4}{5}$

<u>સૂચનો</u>

1. $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$; $0 \leq r \leq n$

$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\frac{x}{3}\right)^r = \binom{n}{r} \frac{2^{n-r}}{3^r} x^r$$

x^7 નો સહગુણક = x^8 નો સહગુણક

$$\therefore \binom{n}{7} \frac{2^{n-7}}{37} = \binom{n}{8} \frac{2^{n-8}}{38}$$

$$\therefore \binom{n}{7} 2.3 = \binom{n}{8} \Rightarrow \frac{n-7}{8} = 6 \Rightarrow n = 55$$

2. $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$; $0 \leq r \leq n$

$$= \binom{9}{r} \left(\frac{3x^2}{2}\right)^{9-r} \left(-\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= \binom{9}{r} \frac{3^{9-2r}}{2^{9-r}} (-1)^r x^{18-3r} _________(1)$$

અચળ પદ માટે $18 - 3r = 0 \Rightarrow r = 6$

(1) પરથી $T_{6+1} = \binom{9}{6} \frac{3^{9-12}}{2^{9-6}} (-1)^6 = \binom{9}{6} \frac{3^{-3}}{2^3} (+1) = \frac{7}{18}$

3. $n=7$ હોવાથી $\frac{7+1}{2} = 4$ અને $\frac{7+3}{2} = 5 \Rightarrow T_4$ અને T_5 મધ્યમ પદ થશે

હવે $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$= \binom{7}{r}(2)^{7-r}\left(-\frac{x^3}{x}\right)^r = 7\,c_r\,\frac{2^{7-r}}{3^r}(-1)^r\,x^{3r}$

$\therefore T_4 = 7C_3\,\frac{2^4}{3^3}\,(-1)^3\,x^9 = -\frac{560}{27}x^9$

અને $T_5 = 7C_4\,\frac{2^3}{3^4}\,(-1)^4\,x^{12} = \frac{280}{81}x^{12}$

4. $n=12$ યુગ્મ હોવાથી $\frac{n-2}{2} = 7 \Rightarrow T_7$ મધ્યમ પદ થશે

$\therefore T4=7c_3\binom{12}{6}\,a^{12-6}\,b^6 = 12\,C_6\left(\frac{2}{x}\right)^6\,(-3xy)^6$

7. $\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)^n = \left\{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2\right\}^n = \left(1+\frac{a}{2}\right)^{2n}$

અહીં 2n યુગ્મ હોવાથી $\frac{2n+2}{2} = (n+1)$ મુ પદ મધ્યમ પદ થશે

8. અહીં $n = 13$,

$\therefore$ કુલ પદો = 13 + 1 = 14

$\therefore$ ત્રીજા પદનો સહગુણક = છેલેથી ત્રીજા પદનો સહગુણક

= 14-2

=12

10. $T_{r+1} = n\,C_r\,a^{n-r}\,b^r;\ 0 \le r \le n$

$= 35\ C_r \left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{n-r} \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{r}$

$= 35\ C_r\ a^{14-\frac{2r}{5}} \cdot b^{\frac{r}{3}}$

$\therefore$ r એ 5 અને 3 નો ગુણક હોવો જોઈએ

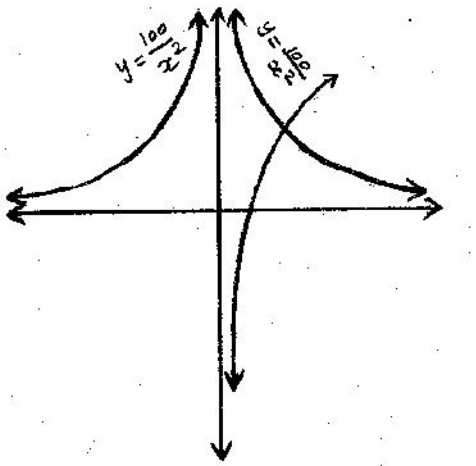
$\therefore$ r એ 15 નો ગુણક થશે

$\therefore r = 15\,K\ ; \quad 0 \le r \le 35$

$\therefore r = 0,\ 15,\ 30$

$\therefore$ 1લું, 16મું, 31મું પદ a અને b ની પુર્ણાંક ઘાત ધરાવે

11. $T_6 = t_{s+1} = 8\ C_5 \left(\dfrac{1}{\frac{8}{x^3}}\right)^{8-5} (x^2 \log_{10} x)^5$



$5600 = \dfrac{8!}{5!\ 3!} \left(\dfrac{1}{x^8}\right) x^2 \log_{10} x$

$5600 = 56\ x^2 (\log_{10} x)^5$

$\dfrac{100}{x^2} = (\log_{10} x)^5$ ________(1)

$\dfrac{100}{x^2} = y\ ;\ y = (\log_{10} x)^5$

આકૃતિ મુજબ વક્રો એકજ બિંદુમાં છેદે અને તે છેદ બિંદુ (10,1) થશે

$\therefore x=10$

અથવા સમીકરણમાં વિકલ્પો મુકી ચકાસી લેવું.

12. p = 2nC_n ; Q = (2n - 1) C_n

$$\therefore \frac{p}{Q} = \frac{2n\,C_n}{(2n\text{-}1)\,C_n} = \frac{(2n)!}{(n!)\,(n!)} \times \frac{n!\,(n\text{-}1)!}{(2n\text{-}1)!} = 2 \Rightarrow P = 2Q$$

13. $$\left\{\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+1^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right\}^{10}$$

$$= \left\{x^{\frac{1}{3}}+1-\left(1+x^{\frac{-1}{2}}\right)\right\}^{10}$$

$$= \left\{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{-1}{2}}\right\}^{10} \Rightarrow T_{r+1} = n\,C_r\,(a)^{n-r}\ \ b^r\,(-1)^r$$

$$= 10\,C_r \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-r} \left(x^{\frac{-1}{2}}\right)^{r} (-1)^r$$

$$= 10\,C_r\, x^{\frac{10-r}{3}}\, x^{\frac{-r}{2}} (-1)^r$$

$$= 10\,C_r\, x^{\frac{20-5r}{6}} (-1)^r$$

હવે $\frac{20-5r}{6} = 0 \Rightarrow r = 4$

14

$$S = (2+\omega^2+\omega)^{100}$$
$$= (1+1+\omega+\omega^2)^{100}$$
$$= (1+0)^{100} = 1$$

15. $(1-x+x^2)^5 = (1+x(x-1))^5$

$= 5\,C_o + 5C_1\, x\,(x-1) + 5\,C_2\, x^2\,(x-1)^2 + 5\,C_3\, x^3\,(x-1)^3 + \ldots$

x^3 નો સહગુણક = $-2\,.5C_2 - 5C_3$

$= -20-10$

$= -30$

17. $(1-x)^m\,(1+x)^n = (1 - mx + m\,C_2x^2 + \ldots\,)\,(1 + nx + nC_2\,x^2 + \ldots\,)$

$= 1 + (n-m)x + (nC_2+mC_2-mn)x^2 + \ldots$

$= 1 + a_1\,x + a_1\,x^2 + \ldots$

$\therefore$ $n - m = 10 \Rightarrow n = m + 10$

and $nC_2 + mC_2 - mn = 10 \Rightarrow \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}\,m(m-1)-mn = 10$

$\Rightarrow n(n-1) + m\,(m-1) -2mn = 20$

$\Rightarrow (m+10)\,(m+9) + m\,(m-1) -2m\,(m+10) = 20$

$\Rightarrow m^2 +19m + 90 +m^2 -m-2\,m^2 - 20m = 20$

$\Rightarrow\, -2m=-70 \Rightarrow\, m= 35$

$\therefore$ n=45

18 $(a+b)^5 + (a-b)^5 = 2\,[a^5 + 5\,C_2\,a^3\,b^2 + 5\,C_4\,ab^4]$

$$\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5 + \left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5 = 2\,[x^5 + 10\,x^3\,(x^3-1) + 5x\,(x^3-1)^2]$$

જે 7 ઘાતની બહુપદી થશે.

19. $S = \dfrac{(x+3)^{n-1}\left[1-\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{n}\right]}{1-\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)}$ $\left[\because\ S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\right]$

$= (3+x)^n - (2+x)^n$

$\therefore$ x^r નો સહગુણક $= n\,C_r\,(3^{\,n-r} - 2^{\,n-r})$

22. $\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^4 = \left\{1+\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)\right\}^4$

$= 4\,C_o + 4\,C_1\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right) + 4\,C_2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^2 + 4\,C_3\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^3 + 4\,C_4\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^4$

સાદું રુપ આપતાં,

$= -5-4x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{16}{x}+\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{32}{x^3}+\dfrac{16}{x^4}$

24. $O = n\,C_o\,x^n a^o + n\,C_2\,x^{n-2} a^2 + \ldots$

$E = n\,C_1\,x^{n-1} a + n\,C_3\,x^{n-3} a^3 + \ldots$

$\therefore O + E = (x+a)^n$

$O - E = (x-a)^n$

$\therefore (O+E)(O-E) = (x+a)^n (x-a)^n$

$O^2 - E^2 = (x^2 - a^2)^n$

25. $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} n\,C_r\,x^r$ જેમાં $x = 4$ મુકતાં,

$(1+4)^n = \sum_{r=0}^{n} n\ C_r\ 4^n$

26. $(10.1)^5 = (10+0.1)^5$ દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

32. $T_3 = T_{2+1} = 5\ C_2 \left(\frac{1}{x}\right)^{5-2} \left(x^{\log 10^x}\right)^2 = 1000$

$\Rightarrow 10\ x^{-3}\ x^{2\log}\ 10^x = 1000$

$\Rightarrow x^{2\log 10^{x-3}} = 10^2$

$\Rightarrow (2\ \log_{10}x\text{-}3)\ roy_{10}x = 2$

$\Rightarrow (2y\ \text{-}3)y = 2\ [\because \log_{10}x=y]$

$\Rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0$

$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow \log_{10}\text{-}x = 2 \Rightarrow x=10^2 \Rightarrow x=100$

33. $T_4 = 200$

$T_{3+1} = 200$

$$6\ C_3 \left\{ x\sqrt{\frac{1}{\log_{10} x+1}} \right\}^{6-3} \left(x^{\frac{1}{12}} \right)^3 = 200$$

$$20 \left\{ x^{\frac{1}{\log_{10} x+1}} \right\}^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{4}} = 200$$

$$x^{\frac{3}{2(\log_{10} x+1)}+\frac{1}{4}} = 10$$

$$\frac{3}{2\left(109_{10}x+1\right)}+\frac{1}{4}=109_{x}10=\frac{1}{109_{10}x}$$

$$\frac{3}{2(y+1)}+\frac{1}{4}=\frac{1}{y}$$

$y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1,-4$

$\log_{10}x=1$ [-4 શક્ય નથી.]

$\therefore x=10^1$

$\therefore \boxed{x=10}$

34. $T_9 = 10\,C_8 \left\{\sqrt{25^{x-1}+7}\right\}^{10-8}\left\{\left(5^{x-1}+1\right)^{\frac{-1}{8}}\right\}^{8}=180$

$\frac{25^{x-1}+7}{5^{x-1}+1}=4 \Rightarrow \frac{y^2+7}{y+1}=4$ $[\because y = 5^{x-1}]$

$\Rightarrow y^2-4y+3 = 0$

$\Rightarrow y = 3, -1$

$\Rightarrow x = \log_5 15$ અથવા $x = 1$

35. $m\,C_o + (-3)\,m\,C_1 + (9)\,m\,C_2 = 559$; $m \in N$

$1 - 3m + \frac{9}{2}m(m-1) = 559$

$3m^2 - 5m - 372 = 0$

$(m - 12)(3m + 31) = 0$

$\therefore m = 12$

38. $n\,C_{r-1} : n\,C_r : n\,C_{r+1} = 1 : 7 : 42$

$$\frac{n\,C_{r-1}}{n\,C_r} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{r}{n-r+1} = \frac{1}{7} \Rightarrow n - 8r + 1 = 0 \text{ ______(1)}$$

અને $\frac{n\,C_r}{n\,C_{r+1}} = \frac{7}{42} \Rightarrow \frac{r+1}{n-r} = \frac{1}{6} \Rightarrow n-7r - 6 = 0$ _____(2)

(1) અને (2) ઉકેલતાં

$n = 55, r = 7$

40. $5^4 = 625 = 13\,(48) + 1$

$\therefore 5^4 = ky + 1$; $k = 13, y = 48$

$\therefore (5^4)^5 = (ky + 1)^5$

$5^{20} = 1 + 48m,\ m \in N$

42. થીયરી જુઓ.

44. થીયરી જુઓ.

47. $(m^2 x^2 + 2mx+1)^{31} = (mx + 1)^{62} = a_0 + a_1x + a_2 x^2 +$-------

જેમાં $x=1$ મૂકતાં,

$(m+1)^{62} = a_0 + a_1 + a_2 +$ ------- $= 0$

$\therefore m+1 = 0 \Rightarrow m = -1$

48. $x = 1$ મૂકતાં, $1 = a_0 + a_1 + a_2 +$------- $+ a_{2n}$ _______(1)

$x = -1$ મૂકતાં, $3^n = a_0 - a_1 + a_2 -$.............$+ a_{2n}$ ________(2)

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$3^n - 1 = 2\,[a_0 + a_2 +$------- $+ a_{2n}]$

49. $S = 29\,C_{15} + 29\,C_{16} +$-----$+ 29\,C_{29}$

$S = 29\,C_{14} + 29\,C_{13} +$-----$+ 29\,C_o$

$\therefore 2S = 2^{29} \Rightarrow S = 2^{28}$

52. $2n\,C_{(n-1)}\ x^{n-1} < 2n\,C_n\, x^n$ અને $2n\,C_{(n+1)}\ x^{n+2} < 2n\,C_n\ x^n$

$$\therefore \frac{2n\,C_{(n-1)}}{2n\,C_n} < x < \frac{2n\,C_n}{2n\,C_{(n+1)}}$$

53. થીયરી જુઓ.

55. અહીં $r\,\frac{n\,C_r}{n\,C_4\text{-}1} = n - r + 1$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} r\frac{nC_r}{nC_{r-1}} = \sum_{r=1}^{n}\ [(n+1) - r]\ =\ n\,(n+1) - \frac{n}{2}\,(n+1)$$

$$= \frac{n}{2}\,(n+1)$$

56. $(1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$

$\therefore (1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^{-1} નો સહગુણક = $(1+x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમા x^{n-1} નો સહગુણક

$= 2n\,C_{(n-1)}$

57. $(1+x)^{11}\,(1+x^2)^{11}$ નુ સાદુ રુપ આપો

58. અહીં n મું અને (n+1)મું પદ મધ્યમ પદ થશે

$(2n\text{-}1)\,C_{(n-1)} + (2n\text{-}1)\,C_n = 2n\,C_n$

59. $8^{2n} - 62^{2n+1} = (9-1)^{2n} - (63-1)^{2n+1}$

60. વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ $= \frac{6\,!}{r!\ s!\ (6\text{-}r\text{-}s)!}(1)^{6-r-s}\left(\sqrt{2}\right)^r\left(\sqrt[3]{5}\right)^s$

$$= \frac{6\,!}{r!\; s!\; (6-r-s)!} 2^{\frac{r}{2}} 5^{\frac{s}{3}}$$

અહીં $2^{\frac{r}{2}}$ અને $5^{\frac{s}{3}}$ સંમેય બનવા જોઈએ.

$\therefore$ r એ 2 નો ગુણક અને s એ 3 નો ગુણક બનવો જોઈએ તથા

$\therefore 0 \le r \le 6$ અને $0 \le s \le 6$

i. e $0 \le r+s \le 6$

$\therefore$ જો $r = 0$ તો $s = 0, 3, 6 \Rightarrow$ આવાં 3 પદ

જો $r = 2$ તો $s = 0, 3, \Rightarrow$ આવાં 2 પદ

જો $r = 4$ તો $s = 0 \quad \Rightarrow$ આવું 1 પદ

જો $r = 6$ તો $s = 0 \quad \Rightarrow$ આવું 1 પદ

$\therefore$ કુલ પદ = 3+2+1+1 = 07

61. અહીં $K = \frac{(n+1)y}{x+y} = \frac{(50+1)2x}{3+2x} = \frac{(51)\left(\frac{2}{5}\right)}{3+\frac{2}{5}} = 6$

$\therefore$ સૌથી મોટા પદો T_6 અને T_7 થાય.

63. $18\,C_{(2r+3)} = 18\,C_{(r-3)}$

$\therefore 2r+3 = r-3$ અથવા $2r + 3 + r - 3 = 18$

$\therefore r = -6$ અથવા $r = 6$

66. $R = \left(3+\sqrt{5}\right)^{2n}$ ધારોકે $F = \left(3-\sqrt{5}\right)^{2n}$

હવે $0 < 3 - \sqrt{5} < 1 \Rightarrow 0 < F < 1$

$\therefore R + F = \left(3+\sqrt{5}\right)^{2n} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2n}$

= 2 {કોઈ પુર્ણાંક }

જે યુગ્મ પુર્ણાંક કિંમત છે.

$\therefore$ f + [R] + F યુગ્મ પુર્ણાંક કિંમત થશે.

હવે $0 \leq f < 1$ and $0 < F < 1 \Rightarrow 0 < f + F < 2$

$\therefore$ f + F = 1

$\therefore$ F = 1 -f

હવે R (1-f) = RF

$= \left(3+\sqrt{5}\right)^{2n}\left(3-\sqrt{5}\right)^{2n}$

$= (9-5)^{2n}$

$= 4^{2n}$

67. $F = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$

$\therefore$ R - F = 2m,

$\therefore$ [R] + f - F = 2m

f- F = 2m-[R] જે પુર્ણાંક છે

= 0

$\therefore$ f = F

68. $T_{r+1} = 1024\, C_r\; 5^{512-\frac{r}{2}}\; 7^{\frac{r}{8}}$

$= \{1024\, C_r\, 5^{512-r}\}\; 5^{\frac{r}{2}}\; 7^{\frac{r}{8}}$

$\therefore$ r એ 2 અને 8 નો ગુણક બનવો જોઈએ

r એ 8 નો ગુણક બનવો જોઈએ $0 \leq r \leq 1024$

$\therefore$ r ની આવી 129 કિંમતો મળે.

79. $T_{r+1} = 21\ Cr \left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}\right)^{21-r} \left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^{r}$

$= 21\ C_r\ a^{7-\frac{r}{2}}\ b^{\frac{2r}{3}-\frac{7}{2}}$

$\therefore\ 7-\dfrac{r}{2} = \dfrac{2r}{3} - \dfrac{7}{2} \Rightarrow r=9$

81. ધરોકે $R+f = \left(\sqrt{2}+1\right)^8$ જ્યાં R પુર્ણાંક અને $0 \le f < 1$

$\therefore R = \left[\left(\sqrt{2}+1\right)^8\right]$

તેમજ $0 < \left(\sqrt{2}+1\right) < 1 \Rightarrow 0 < F = \left(\sqrt{2}-1\right)^8$

$= 2\left[8C_o\left(\sqrt{2}\right)^8 + 8C_2\left(\sqrt{2}\right)^6 + 8C_4\left(\sqrt{2}\right)^4 + 8C_6\left(\sqrt{2}\right)^2 + 8C_8\left(\sqrt{2}\right)^0\right]$

$= 2[577] = 1154$

તેમજ $0 \le f < 1$ અને $0 < F < 1 \Rightarrow 0 < f + F < 2 \Rightarrow f + F = 1$

$\therefore R + 1 = 1154 \Rightarrow R = 1153$

83. $\dfrac{(19+6)^3}{(3+2)^6} = 1$

85. પદનો ક્રમ = $\dfrac{\text{n p}}{p+q}+1 = \dfrac{10\times3}{3+2}+1$ = 6+1 = 7 મું પદ

99. $r = \dfrac{1}{2}\left(n+\sqrt{n+2}\right)$ પરથી, $r = \dfrac{1}{2}\left(m+\sqrt{m+2}\right)$

$2r - m = \sqrt{m+2}$

$4r^2 - 4rm + m^2 = m+2$

$m^2 - 4rm - m + 4r^2 - 2 = 0$

$m^2 - m\,(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

જવાબો

1-A	2-B	3-C	4-C	5-A	6-B	7-C	8-A	9-D	10-C
11-D	12-B	13-A	14-C	15-A	16-B	17-C	18-C	19-B	20-A
21-B	22-B	23-B	24-B	25-B	26-C	27-C	28-A	29-B	30-B
31-B	32-B	33-A	34-A	35-C	36-B	37-C	38-C	39-B	40-C
41-D	42-B	43-B	44-D	45-C	46-A	47-B	48-C	49-D	50-A
51-C	52-B	53-A	54-C	55-C	56-B	57-B	58-C	59-B	60-D
61-B	62-B	63-C	64-A	65-B	66-B	67-D	68-B	69-C	70-A
71-D	72-C	73-B	74-D	75-C	76-C	77-B	78-B	79-C	80-C
81-B	82-A	83-C	84-B	85-C	86-D	87-B	88-B	89-A	90-D
91-B	92-A	93-C	94-A	95-B	96-A	97-A	98-A	99-B	100-A
101-D									

●●●

એકમ - 7
શ્રેણી અને શ્રેઢી
<u>અગત્યના મુદ્દા</u>

કોઈપણ વિધેય $f : N \rightarrow R$ ને વાસ્તવિક શ્રેણી કહેવાય.

કોઈપણ વિધેય $f : N \rightarrow C$ ને સંકર સંખ્યાઓની શ્રેણી કહેવાય.

કોઈપણ વિધેય $f : \{1, 2, 3...n\} \rightarrow x$ ને ગણ x ની શાંત શ્રેણી કહેવાય. $(x \neq \phi)$

શ્રેણીને સામાન્ય રીતે $\{f(n)\}$ અથવા $\{a_n\}$ અથવા $\{T_n\}$ અથવા $\{t_n\}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$f(n)$ અથવા a_n અથવા T_n અથવા t_n ને શ્રેણીનું n મું પદ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ સંમેય સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. જેનું n મું પદ $\frac{1}{n}$ છે. આ શ્રેણીને સામાન્ય રીતે $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ વડે લખવામાં આવે છે.

શ્રેઢી

કોઈપણ શ્રેણી $a_1, a_2, a_3...$ માટે $\{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\}$ ને શ્રેઢી કહેવાય. જ્યાં $a_i \in C, \forall i$ અથવા $a_i \in R, \forall i$.

નિશ્ચિત અથવા અનંત પદોના સરવાળાથી મળતી શ્રેઢી એ અનુક્રમે શાન્ત અથવા અનંત શ્રેઢી છે.

પ્રોગ્રેશન (શ્રેણી)

જેનાં પદો કોઈ ચોક્કસ ગાણિતીક નિયમને અનુસરતાં હોય તેવી શ્રેણીને પ્રોગ્રેશન કહેવાય.

સમાંતર શ્રેણી (A.P.)

જો દરેક $n \in N$ માટે $a_{n+1} - a_n$ = શૂન્યેતર અચળ હોય તો અને તો જ શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, ...$ ને સમાંતર શ્રેણી કહેવાય. અહીં આ શૂન્યેતર અચળ ને સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત કહેવાય. સામાન્ય તફાવતને સામાન્ય રીતે 'd' વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$a, a + d, a + 2d, ..., a + (n - 1)d..$ એ વ્યાપક સમાંતર શ્રેણી છે.

સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ $T_n = a + (n - 1)d$ છે. જ્યાં a એ સમાંતર શ્રેણીનુ પ્રથમ પદ તથા d એ સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત છે.

યાદ રાખો.

$d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = T_4 - T_3 = ...$

સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લેથી n મું પદ $= l-(n-1)d$ છે.

જ્યાં $l =$ છેલ્લુ પદ

સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનું સુત્ર :

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + [a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}(a+l)$$ જ્યાં $l = T_n =$ છેલ્લુ પદ

$n =$ પદોની સંખ્યા

$a =$ પ્રથમ પદ

- છેલ્લેથી n પદોનો સરવાળો $= \frac{n}{2}[2l-(n-1)d]$
- સમાંતર શ્રેણીનાં બધા જ પદોમાં કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે કે બાદ કરવામાં આવે કે કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા વડે બધા જ પદોને ગુણવામાં કે ભાગવામાં આવે તો તે શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી જ રહે છે.
- સમાંતર શ્રેણીના પહેલા અને છેલ્લા પદથી સમાન અંતરે આપેલાં પદોનો સરવાળો અચળ રહે છે.

  એટલે કે $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$
- સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ ક્રમીક સંખ્યાઓ $a-d, a, a+d$ લેવામાં આવે છે. (સરળતા માટે)
- સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલી ચાર ક્રમીક સંખ્યાઓ $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ લેવામાં આવે છે. (સરળતા માટે)
- સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલી પાંચ ક્રમીક સંખ્યાઓ $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ લેવામાં આવે છે. (સરળતા માટે)
- સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલી છ ક્રમીક સંખ્યાઓ $a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$ લેવામાં આવે છે. (સરળતા માટે)

સમાંતર મધ્યક (A.M.)

જો a, A, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો A ને a અને b વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક કહેવાય.

અહીં $A = \frac{a+b}{2}$ તથા $a < A < b$

a અને b વચ્ચે n સમાંતર મધ્યક

જો $a, A_1, A_2, ...A_n, b$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો અને તોજ $A_1, A_2, A_3...A_n$ ને a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો કહેવાય.

તેથી $A_1 = a + d$

$A_2 = a + 2d$

$A_3 = a + 3d$

$A_n = a + nd$

જ્યાં $d = \frac{b-a}{n+1}$ ટૂંકમાં $A_m = a + \frac{m(b-a)}{n+1}$ $m = 1, 2, ...n$

અહીં $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = nA$ જ્યાં $A = \frac{a+b}{2}$

સ્વરિત શ્રેણી

જો $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ... \frac{1}{a_n} ...$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો અને તોજ શૂન્યેતર સંખ્યાઓ $a_1, a_2, a_3 ... a_n$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે તેમ કહેવાય.

સ્વરિત મધ્યક (H.M.)

જો a, H, b સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય તો H ને a અને b વચ્ચેનો સ્વરિત મધ્યક કહેવાય અહીં $H = \frac{2ab}{a+b}$

a અને b વચ્ચેના n સ્વરિત મધ્યકો

જો $a, H_1, H_2, ..., H_n, b$ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય તો $H_1, H_2, ...H_n$ ને a અને b વચ્ચેના n સ્વરિત મધ્યકો કહેવાય.

સમગુણોત્તર શ્રેણી (G.P.)

જો દરેક $n \in N$ માટે $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} =$ અચળ હોય તો શૂન્યેતર સંખ્યાઓ $a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે તેમ કહેવાય.

અહીં આ અચળ સંખ્યાને સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર કહેવાય તેને 'r' વડે દર્શાવાય.

$a, ar, ar^2, ... ar^{n-1} ...$ એ વ્યાપક સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મુ પદ $T_n = ar^{n-1}$ છે.

સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો

S_n = સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો

$= a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

$= a\dfrac{(r^n - 1)}{r - 1}$ જો $r > 1$ આ બંને સુત્રો સમાન જ છે.

$= a\dfrac{(1 - r^n)}{1 - r}$ જો $r < 1$ પરંતુ સરળતા માટે બે વિકલ્પ લખ્યા છે.

$= na$ જો $r = 1$

$S = S_\infty =$ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળો $= \dfrac{a}{1 - r}$ જ્યાં $-1 < r < 1$

સમગુણોત્તર મધ્યક (G.M.)

જો ત્રણ ધન સંખ્યાઓ a, G, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો G ને a અને b વચ્ચેનો સમગુણોત્તર (ગુણોત્તર) મધ્યક કહેવાય.

અહીં $G = \sqrt{ab}$ $\therefore G^2 = ab$

n સમગુણોત્તર મધ્યક

જો ધન સંખ્યાઓ $a, G_1, G_2, ... G_n, b$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો $G_1, G_2, ... G_n$ ને a અને b વચ્ચેના n સમગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય.

જો આ સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર r હોય તો $r = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ અને

$G_1 = ar, G_2 = ar^2, ... G_n = ar^n$ અહીં $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 ... G_n = \left(\sqrt{ab}\right)^n = (ab)^{\frac{n}{2}} = G^n$

- જો સમગુણોત્તર શ્રેણીના દરેક પદને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણવામાં કે ભાગવામાં આવે તો તે શ્રેણી સમગુણોત્તર શ્રેણી જ રહે છે.
- સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓ સરળતા માટે $\dfrac{a}{r}, a, ar$ લેવામાં આવે છે.
- સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી ચાર સંખ્યાઓ સરળતા માટે $\dfrac{a}{r^3}, \dfrac{a}{r}, ar, ar^3$ લેવામાં આવે છે.
- સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી પાંચ સંખ્યાઓ સરળતા માટે $\dfrac{a}{r^2}, \dfrac{a}{r}, a, ar, ar^2$ લેવામાં આવે છે.

સમાંતર - સમગુણોત્તર શ્રેઢી (A. G. P.)

જો $P_1, P_2, P_3, \dots$ સમાંતર શ્રેણી અને $q_1, q_2, q_3 \dots$ સમગુણોત્તર શ્રેણી હોય તો $p_1 q_1,\ p_2 q_2,\ p_3 q_3, \dots$ ને સમાંતર- સમગુણોત્તર શ્રેણી કહેવાય.

$a, (a + d)r, (a+2d)r^2, (a + 3d)r^3, \dots$ વ્યાપક સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

આ સમાંતર સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો

$$S_n = \sum\left\{ \left(a + (n-1)d\right).\, r^{n-1} \right\} = \frac{a}{1-r} + \frac{dr\left(1 - r^{n-1}\right)}{(1-r)^2} - \frac{\left\{a + (n-1)d\right\}r^n}{1-r}, (r \neq 1)$$

$$S\infty = \lim_{n \to \infty} Sn = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$ જ્યાં $-1 < r < 1$

T_n = સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ = $\left\{a+(n-1)d\right\} r^{n-1}$

ઘાતશ્રેઢી (પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેઢી)

$$\sum n = \sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum n^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum n^3 = \sum_{r=1}^{n} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\sum n\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- જો શ્રેઢી સૂત્ર S_n આપેલું હોય તો મૂળ શ્રેણી $\{a_n\}$ નું સૂત્ર નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

  $a_1 = s_1$ અને દરેક $n \geq 2$ માટે $a_n = s_n - s_{n-1}$
- જો શ્રેણીનું શ્રેણીસૂત્ર n નું સુરેખ વિધેય હોય તો અને તોજ તે શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે.
- જો કોઈ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી અને સમગુણોત્તર શ્રેણી હોય તો તે અચળ શ્રેણી છે.
- સમાંતર શ્રેઢીનું શ્રેઢી સૂત્ર $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ એ n નું દ્વિઘાત સમીકરણ છે. જેમાં અચળ પદ હોય નહી.
- $A \geq G \geq H$
- જો $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots =$ અચળ
- જો $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો $a_1.a_n = a_2.\, a_{n-1} = a_3.a_{n-2} =$ અચળ
- n સંખ્યાઓ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ નો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$

- ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $G = (a_1 a_2 a_3 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$
- જો $a_1, a_2, a_3, ...$ અને $b_1, b_2, b_3, ...$ સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ હોય તો, $a_1b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, ...$ પણ સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.
- જો $a_1, a_2, a_3 ... a_n$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો

  $a_2 = \sqrt{a_1 a_3}, a_3 = \sqrt{a_2 a_4}, a_4 = \sqrt{a_3 a_5}, ... a_{n-1} = \sqrt{a_{n-2} . a_n}$ તથા $a_r = \sqrt{a_{r-k} . a_{r+k}}$

  જ્યાં $k = 0, 1, 2.... n-r$ અને $r = 1, 2, ... n-1$ અને $k \le r-1$

પ્રશ્નબેંક

1. એક ગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 1 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો $s_1 + s_3 + s_5 + ...+ s_{2n-1} =$ ....

(a) $\frac{1}{3}\left(2^{2n} - 5n + 4\right)$ (b) $\frac{1}{3}\left(2^{2n+1} - 5n\right)$

(c) $\frac{1}{3}\left(2^{2n+1} - 3n - 2\right)$ (d) $\frac{1}{3}\left(2^{2n+1} - 5n^2\right)$

2. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + ...100$ પદ = ...

(a) $2^{100} + 99$ (b) $2^{-100} + 99$ (c) $2^{-101} + 100$ (d) $2^{-99} + 99$

3. જેની પરિમિતિ 37 સેમી હોય તેવા ત્રિકોણની બાજુઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. તથા તેની સૌથી નાની બાજુનું માપ 9 સેમી છે. તો બાકીની બે બાજુઓનાં માપ......... અને .... છે.

(a) 12, 16 (b) 14, 14 (c) 10, 18 (d) 15, 13

4. 2 અને 18 વચ્ચે ત્રણ સંખ્યાઓ a, b, c એવી શોધો કે જેથી, $a + b + c = 25$ હોય, 2, a, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા b, c, 18 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

(a) 5, 8, 12 (b) 4, 8, 13 (c) 3, 9, 13 (d) 5, 9, 11

5. ચાર સંખ્યાઓ એવી શોધો કે જેથી પ્રથમ ત્રણ સંખ્યાઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, છેલ્લી ત્રણ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય કે જેનો સામાન્ય તફાવત 6 હોય તથા પ્રથમ અને છેલ્લી સંખ્યા સમાન હોય.

(a) 8, 4, 2, 8 (b) -8, 4, -2, -8 (c) 8, -4, 2, 8 (d) -8, -4, -2, -8

6. જો બે સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક તેના સમગુણોત્તર મધ્યક કરતાં $\sqrt{10}$ ગણો હોય તો $\frac{a-b}{a+b} =$ ....

(a) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (b) $3\sqrt{10}$ (c) $\frac{9}{10}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

7. જો બે સંખ્યાઓ a અને b નો સ્વરિત મધ્યક 4 હોય અને સમગુણોત્તર મધ્યક $3\sqrt{2}$ હોય તો અંતરાલ [a, b] = ...

(a) [3, 6] (b) [2, 7] (c) [4, 5] (d) [1, 8]

8. સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓનો સમાતંર મધ્યક $\frac{14}{3}$ છે. જો પહેલી બે સંખ્યાઓમાં 1 ઉમેરવામાં આવે અને ત્રીજી સંખ્યામાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે તો મળતી ત્રણ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો તે ત્રણેય સંખ્યાઓના વર્ગનો સરવાળો......... છે.

(a) 91 (b) 80 (c) 84 (d) 88

9. જો a અને c નો સ્વરિત મધ્યક b હોય, b અને d નો ગુણોત્તર મધ્યક c હોય તથા c અને e નો સમાંતર મધ્યક d હોય તો a અને e નો ગુણોત્તર મધ્યક......... છે.

(a) b (b) c (c) d (d) ae

10. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા ac અને ab, ab અને bc, ca અને cb ના ગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે d, e, f હોય તો d^2, e^2, f^2 .... શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) ગુણોત્તર

(c) સ્વરિત (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર

11. çkMï Þky kp તથા q ની વચ્ચે બે સમાંતર મધ્યક A_1, A_2, બે સમગુણોત્તર મધ્યક G_1, G_2 અને બે સ્વરિત મધ્યક H_1, H_2 દાખલ કરવામાં આવે તો ....

(a) $\frac{G_1 G_2}{H_1 H_2} = \frac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2}$ (b) $\frac{G_1 + G_2}{H_1 + H_2} = \frac{A_1 A_2}{H_1 H_2}$

(c) $\frac{G_1 G_2}{H_1 H_2} = \frac{A_1 - A_2}{H_1 - H_2}$ (d) $(A_1+A_2)(H_1+H_2) = G_1 G_2 H_1 H_2$

12. $\Sigma\left(\Sigma\ 2^{1-n}\right) =$ ....

(a) $2n - 2 + 2^{1-n}$ (b) $2n - 2 + 2^{n-1}$ (c) $2n - 2 + 2^{-n}$ (d) $2n - 2 + 2^{n+1}$

13. જો $(666....\ n\ \text{વખત})^2 + (888....n\ \text{વખત}) = (444...K\ \text{વખત})$ તો K = ...

(a) n+1 (b) n (c) 2n (d) n^2

14. એક સમાંતર શ્રેણીનાં m+1, n+1 અને r+1 માં પદ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. તથા m, n અને r સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. તો તે શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત........... છે.

(a) $\frac{-a}{n}$ (b) $\frac{-n}{2a}$ (c) $\frac{2a}{n}$ (d) $\frac{-2a}{n}$

15. 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + ...100 પદ = ...

(a) $\frac{1020300}{3}$ (b) $\frac{1030200}{3}$ (c) $\frac{1003200}{3}$ (d) $\frac{1023200}{3}$

16. સમાંતર શ્રેણી a_n નું એક પણ પદ શૂન્ય ન હોય તથા $d \neq 0$ તો $\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{a_r\ a_{r+1}} =$ ....

(a) $\frac{n}{a_1 a_n}$ (b) $\frac{n-1}{a_1 a_n}$ (c) $\frac{n+1}{a_1 a_n}$ (d) $\frac{2n}{a_1 a_n}$

17. જેનાં પ્રથમ પદ 1, 2, 3.....n હોય અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n+1}$ હોય તેવી સમગુણોત્તર શ્રેણીઓનાં અનંત પદોનો સરવાળો અનુક્રમે s_1, s_2, s_3...s_n હોય તો $\sum_{i=1}^{n} s_i$ = ...

(a) $\frac{n(n+3)}{2}$ (b) $\frac{n(n+4)}{2}$ (c) $\frac{n(n-3)}{2}$ (d) $\frac{n(n+1)}{2}$

18. 1 + 3 + 7 + 13 + ...100 પદ = ...

(a) $\frac{1010000}{2}$ (b) $\frac{1000200}{3}$ (c) $\frac{1015050}{3}$ (d) $\frac{1051050}{3}$

19. 1 + 5 + 14 + 30 + ... n પદ = ...

(a) $\frac{(n+2)(n+3)}{12}$ (b) $\frac{n(n+1)(n+5)}{12}$

(c) $\frac{n(n+2)(n+3)}{12}$ (d) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

20. 4 + 18 + 48 + ... n પદ = ...

(a) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$ (b) $\frac{n(n+1)(n+2)(5n+3)}{12}$

(c) $\frac{n(n+1)(n+2)(7n+1)}{12}$ (d) $\frac{n(n+1)(n+2)(9n-1)}{12}$

21. 2 + 12 + 36 + 80 + ... n પદ = ...

(a) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{24}$ (b) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

(c) $\frac{n(n+1)(n+3)(n+5)}{24}$ (d) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}$

22. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \ldots$ અનંતપદ = ...

(a) 0.8 (b) 0.9 (c) 1 (d) 0.99

23. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{2}+\frac{1^3+2^3+3^3}{3}+\ldots$ n પદ = ...

(a) $\frac{n(n+1)(n+2)(5n+3)}{48}$ (b) $\frac{n(n+1)(n+3)(n+5)}{24}$

(c) $\frac{n(n+1)(n+2)(7n+1)}{48}$ (d) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{48}$

24. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+2}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3}+\ldots$ 15 પદ = ...

(a) 446 (b) 680 (c) 600 (d) 540

25. $\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\ldots$ 100 પદ = ...

(a) $\frac{25}{160}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{25}{151}$ (d) $\frac{25}{152}$

26. $1+3+7+15+\ldots$10 પદ = ...

(a) 2012 (b) 2046 (c) 2038 (d) 2036

27. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\ldots+\tan^{-1}\frac{1}{9703}=$ ....

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\tan^{-1}(0.98)$

28. n = ... માટે a અને b નો સમાંતર મધ્યક $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ થાય.

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 0

29. n = ... માટે a અને b નો ગુણોત્તર મધ્યક $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ થાય. $(a, b \in R^+ \ \ a \neq b)$

(a) 0 (b) 1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) -2

30. n = ...માટે ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ a અને b નો સ્વરિત મધ્યક $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ થાય.

(a) 0 (b) -1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) -2

31. શ્રેણી $\log a, \log\left(\frac{a^2}{b}\right), \log\left(\frac{a^3}{b^2}\right), \ldots$ એ એક .... છે. $(a \neq b)$

(a) સમગુણોત્તર શ્રેણી (b) સમાંતર શ્રેણી

(c) સ્વરિત શ્રેણી (d) સમાંતર - સમગુણોત્તર શ્રેણી

32. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, ac અને ab તથા ab અને bc તથા ca અને cb ના ગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે d, e, f હોય તો e + f, f + d અને d + e.......... શ્રેણીમાં છે.

(a) સમગુણોત્તર (b) સમાંતર

(c) સ્વરિત (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર

33. જેમનો સરવાળો 13 હોય તથા વર્ગોનો સરવાળો 91 હોય તેવી સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓ શોધો.

(a) 3, 1, 9 (b) 1, 3, 9 (c) 1, 9, 3 (d) $\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{13}{3}$

34. જેનુ પ્રથમ પદ 1, 2, 3, ... n હોય અને સામાન્ય તફાવત અનુક્રમે 1, 3, 5,..., (2n-1) હોય તેવી n સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો અનુક્રમે $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ હોય તો $\sum_{r=1}^{n} S_r$ = ...

(a) $\frac{n^3(n+1)}{2}$ (b) $\frac{n^2(n^2-1)+2}{2}$

(c) $\frac{n(n^3+1)}{2}$ (d) $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$

35. 0.4 + 0.44 + 0.444 + ... 2n પદ સુધી = ...

(a) $\frac{4}{81}\left(18n+1+100^{-n}\right)$ (b) $\frac{4}{81}\left(18n-1+100^{-n}\right)$

(c) $\frac{4}{81}\left(18n-1+10^{-n}\right)$ (d) $\frac{4}{81}\left(18n-1+100^{n}\right)$

36. કોઈપણ સમગુણોત્તર શ્રેણીનુ 11 મું, 13 મું અને 15 મું પદ............ શ્રેણીમાં છે.

(a) સમગુણોત્તર (b) સમાંતર

(c) સ્વરિત (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર

37. જો $\frac{b+c-a}{a}, \frac{c+a-b}{b}, \frac{a+b-c}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો a, b, c .... શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) સમાંતર-સમગુણોત્તર

(c) સ્વરિત (d) સમગુણોત્તર

38. એક સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ 101 પદોનો સરવાળો 0 હોય તથા તેનુ પ્રથમ પદ 1 હોય તો, પછીનાં 100 પદોનો સરવાળો .... છે.

(a) -101 (b) 201 (c) -201 (d) -200

39. 0 ū7 અને $\frac{1}{7}$ વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો A_1 અને A_2 હોય તો $(2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1) =$ ....

(a) 49 (b) $\frac{48}{7}$ (c) $\frac{50}{7}$ (d) 1

40. એક સમાંતર શ્રેણી માટે જો $S_{100} = 3S_{50}$ હોય તો $S_{150} : S_{50} =$ ....

(a) 8 (b) 3 (c) 6 (d) 10

41. જો $1, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, 31$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને $A_7 : A_{n-1} = 5 : 9$ હોય તો $n =$ ....

(a) 28 (b) 14 (c) 15 (d) 13

42. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું છેલ્લુ પદ 1024 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 છે. તો તેનું છેલ્લેથી 20 મું પદ .... છે.

(a) $\frac{1}{512}$ (b) $\frac{1}{1024}$ (c) $\frac{1}{256}$ (d) 512

43. $1 + 2\cdot2 + 3\cdot2^2 + 4\cdot2^3 + ... + 50\cdot2^{49} =$ ....

(a) $1+49\cdot2^{49}$ (b) $1+49\cdot2^{50}$

(c) $1+50\cdot2^{49}$ (d) $1+50\cdot2^{50}$

44. 2n પદોની એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને છેલ્લુ પદ ℓ હોય તો તેનાં બધાં જ પદોનો ગુણાકાર .... છે.

(a) $(a\ell)^{\frac{n}{2}}$ (b) $(a\ell)^{n+1}$ (c) $(a\ell)^n$ (d) $(a\ell)^{2n}$

45. શ્રેઢી $1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n! =$ ....

(a) $(n+1)! - n$ (b) $(n+1)! - 1$

(c) $n! - 1 + n$ (d) $n! + 1 - n$

46. એક સમાંતર શ્રેણીમાં $T_{35} = -50$ અને $d = -3$ હોય તો $S_{35} =$ ....

(a) 35 (b) 38 (c) 32 (d) 29

47. એક સમાંતર શ્રેણીનું p મું અને q મું પદ અનુક્રમે $\frac{1}{qr}$ અને $\frac{1}{pr}$ છે. તો તેનું r મું પદ .... છે.

(a) $\frac{1}{pqr}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{pq}$ (d) pq

48. જો $A = \{3, 7, 11, ... 407\}$ અને ગણ $B = \{2, 9, 16, ... 709\}$ હોય તો $n(A \cap B) =$ ....

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16

49. એક સમાંતર શ્રેણી માટે $S_n = an + bn^2$ હોય તો તેનો સામાન્ય તફાવત .... છે. જ્યાં a અને b અચળ છે.

(a) 2b (b) a + b (c) 2a (d) a - b

50. જો $\{a_n\}$ એક સમાંતર શ્રેણી હોય તો $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{99}^2 - a_{100}^2 =$ ....

(a) $\frac{50}{99}\left(a_1^2 - a_{100}^2\right)$ (b) $\frac{100}{99}\left(a_{100}^2 - a_1^2\right)$

(c) $\frac{50}{51}\left(a_1^2 - a_{100}^2\right)$ (d) આમાંથી એકપણ નહી

51. સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજોનો સરવાળો તેનાં બીજોના વર્ગોના વ્યસ્તના સરવાળા બરાબર હોય તો bc^2, ca^2, ab^2 ....માં છે.

(a) સમાંતર શ્રેણી (b) સમગુણોત્તર શ્રેણી

(c) સ્વરિત શ્રેણી (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેણી

52. એક સમાંતર શ્રેણીનું પહેલુ, બીજુ અને છેલ્લુ પદ અનુક્રમે a, b અને 3a છે. તો આ શ્રેઢીનો સરવાળો .... છે.

(a) $\frac{4a^2}{b-a}$ (b) $\frac{2a^2 + 2ab}{b-a}$

(c) $\frac{2ab + a^2}{b-a}$ (d) $\frac{2a^2 - 2ab}{a+b}$

53. પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી બે સંખ્યાઓ એક સાથે પસંદ કરી તેમના ગુણાકારોનો સરવાળો કરવામાં આવે તો .... મળે.

(a) $\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}$ (b) $\frac{n(n+1)^2(3n+2)}{72}$

(c) $\frac{n^2(n+1)(3n+2)}{48}$ (d) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+2)}{96}$

54. $\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2 + 2^2} + \frac{7}{1^2 + 2^2 + 3^2} + ...$ n પદ સુધી = ...

(a) $\frac{6n^2}{n+1}$ (b) $\frac{6n}{n+1}$

(c) $\frac{6(2n-1)}{n+1}$ (d) $\frac{3(n^2+1)}{n+1}$

55. શ્રેણી $\frac{1}{1+\sqrt{x}}, \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-\sqrt{x}}, \cdots$નું n મું પદ .... છે.

(a) $\frac{1+\sqrt{x}\left(n^2-2\right)}{1-x}$ (b) $\frac{1+\sqrt{x}\,(n-1)}{1+\sqrt{x}}$

(c) $\frac{1+\sqrt{x}\,(n-2)}{1-x}$ (d) $\frac{3-\sqrt{x}\,(n+2)}{3\,(1-x)}$

56. $a-(a+d)+(a+2d)-(a+3d)+\ldots-50$ પદ સુધી = ...

(a) $-50\,d$ (b) $25\,d$ (c) $a+50\,d$ (d) $-25\,d$

57. સમાંતર શ્રેણી a, b, c, ..., x માં પદોની સંખ્યા .... છે.

(a) $\frac{x+b+a}{c-b}$ (b) $\frac{x+b-2a}{c-b}$

(c) $\frac{x+b+2a}{c-b}$ (d) $\frac{x-b+2a}{c-b}$

58. જો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના માપ સમાતંર શ્રેણીમાં હોય તો તેના બે લઘુકોણના sines ના સરવાળાનું મૂલ્ય .... છે.

(a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{8}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{6}{5}$

59. જો $\log_3 2, \log_3\left(2^x-5\right)$ અને $\log_3\left(2^x-\frac{7}{2}\right)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો x = ...

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 2 અથવા 3

60. જો ધન સંખ્યાઓની સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ a_n હોય તથા $\sum_{n=1}^{100} a_{2n}=\alpha, \sum_{n=1}^{100} a_{2n-1}=\beta$ એવા હોય કે જેથી $\alpha \neq \beta$, તો તે સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર .... છે.

(a) $\frac{\alpha}{\beta}$ (b) $\frac{\beta}{\alpha}$ (c) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ (d) $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

61. જો સંખ્યાઓ p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $2^{p^2}, 2^{pq}, 2^{pr}$ .... શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) સમગુણોત્તર

(c) સ્વરિત (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર

62. જો ΔABCના ખૂણાનાં માપ A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને $A < B < C$ તો ....

(a) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ (b) $c^2 = a^2 + b^2$

(c) $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ (d) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

63. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \dots$ અનંત પદ $=$..........

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{7}{8}$ (d) $\frac{5}{8}$

64. $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + \dots$ અનંત પદ $=$ ....

(a) $\frac{16}{35}$ (b) $\frac{11}{8}$ (c) $\frac{35}{16}$ (d) $\frac{7}{16}$

65. જો $\sec(x-y)$, $\sec x$ અને $\sec(x+y)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $\cos x \,.\, \sec\left(\frac{y}{2}\right) =$ ....

$(y \neq 2n\pi, n \in I)$

(a) $\pm\sqrt{2}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) ± 2 (d) $\pm\frac{1}{2}$

66. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \dots$ n પદ $=$ ....

(a) $n + 2^{-n} - 1$ (b) $2^{-n} - n + 1$

(c) $\frac{2^n - n + 1}{4}$ (d) $2^{-n} + n^2 - 1$

67. જો $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો, $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) =$ ....

(a) $\frac{4b^2 - 3ac}{abc}$ (b) $\frac{4}{ac} - \frac{3}{b^2}$

(c) $\frac{4}{ac} - \frac{5}{b^2}$ (d) $\frac{4b^2 + 3ac}{4b^2c}$

68. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots 11$ પદ $=$.............

(a) $\frac{120}{121}$ (b) $\frac{143}{144}$ (c) 1 (d) $\frac{144}{143}$

69. જો ΔABC ની બાજુઓનાં માપ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા સૌથી મોટા ખૂણાનું માપ સૌથી નાના ખૂણાના માપ કરતાં બમણું હોય તો ΔABCની બાજુઓનો ગુણોત્તર .... છે.

(a) 3 : 4 : 5 (b) 5 : 12 : 13 (c) 4 : 5 : 6 (d) 5 : 6 : 7

70. શ્રેણી $\frac{7}{3}, \frac{35}{6}, \frac{121}{12}, \frac{335}{24}, \ldots$ નું છઠ્ઠુ પદ .... છે.

(a) $\frac{2113}{96}$ (b) $\frac{2112}{96}$ (c) $\frac{865}{48}$ (d) $\frac{2111}{96}$

71. જો શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ માટે $\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right) \le \sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i\, x_{i+1}\right)$ હોય તો $x_1, x_2, x_3,$ $\ldots, x_n$ ________ શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) સમગુણોત્તર (c) સ્વરિત (d) આમાંથી એકપણ નહિ

72. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$ થાય તેવી n ની મોટામાં મોટી કિંમત............ છે. $(n \in N)$

(a) 100 (b) 10 (c) 1000 (d) એકપણ નહિ

73. $(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+10)$ ના ગુણાકાર (વિસ્તરણ)માં x^8 નો સહગુણક............ છે.

(a) 1024 (b) 1300 (c) 1320 (d) 1360

74. $12 + 16 + 24 + 40 + \ldots$ 20 પદ = ...

(a) 8335 (b) 8348 (c) 8356 (d) 8363

75. જો $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{2b-x}, \frac{1}{b-a}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $a-\frac{x}{2}, b-\frac{x}{2}, c-\frac{x}{2}$ .... શ્રેણીમાં છે.

(a) સમાંતર (b) સમગુણોત્તર

(c) સ્વરિત (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર

76. જો $1, \log_y x, \log_z y, -15\log_x z$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો તેનો સામાન્ય તફાવત .... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) -2 (d) 3

77. જો વિધેય f માટે $f(x+y) = f(x)\, f(y)\ \forall x, y \in N$ અને $f(1) = 3$ તથા $\sum_{r=1}^{n} f(a+r) = \frac{81}{2}(3^n - 1)$ હોય તો a = ...

(a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) 3

78. સમાંતર શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે જો $a_1 + a_5 + a_{15} + a_{26} + a_{36} + a_{40} = 210$ હોય તો S_{40} = ...

(a) 2100 (b) 700 (c) 1400 (d) એકપણ નહિ

79. જો a, 4, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને a, 2, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો, $\frac{1}{a}, 1, \frac{1}{b}$ .... શ્રેણીમાં છે.

(a) સમગુણોત્તર (b) સમાંતર

(c) સ્વરિત (d) સમાંતર-સમગુણોત્તર

80. દરેક $x, y \in R^+$ માટે $\frac{(1+x+x^2)(1+y+y^2)}{xy}$ ....

(a) < 9 (b) ≤ 9 (c) > 9 (d) ≥ 9

81. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પહેલુ, બીજુ અને છેલ્લુ પદ અનુક્રમે a, b અને c હોય તો આ બધા જ પદોનો સરવાળો .... છે.

(a) $\frac{c^2 - ab}{c - a}$ (b) $\frac{b^2 - ac}{b - c}$ (c) $\frac{a^2 - bc}{a - b}$ (d) $\frac{a^2 - bc}{a + b}$

82. જો $a_1, a_2, \dots a_{10}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \dots \frac{1}{h_{10}}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને $a_1 = h_1 = 2$, $a_{10} = h_{10} = 3$ તો $a_4 h_7 =$ ....

(a) $\frac{1}{6}$ (b) 6 (c) 3 (d) 2

83. જો $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $\frac{H+a}{H-a} + \frac{H+b}{H-b} =$ ....

(a) 2 (b) 4 (c) 0 (d) 1

84. જો એક સમાંતર શ્રેણી માટે $S_m : S_n = m^2 : n^2$ હોય તો p^2 મા અને q^2 મા પદનો ગુણોત્તર .... છે.

(a) $\frac{2p^2+1}{2q^2+1}$ (b) $\frac{2p^2-1}{2q^2-1}$ (c) $\frac{2p-1}{2q-1}$ (d) $\frac{p^2-2}{q^2-2}$

85. નીચેની ગોઠવણીમાં n મી હારમાં આવેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો .... છે.

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

....

(a) $n^3 + (n+1)^3 - 8$ (b) $n^3 - (n+1)^3 + 8$

(c) $n^3 + (n-1)^3$ (d) $(2n-1)^3$

86. જો a અને b વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક A હોય તો $\frac{A-2b}{A-a}+\frac{A-2a}{A-b}=$ ....

(a) -8 (b) 2 (c) 4 (d) -4

87. જો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, a, x, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને b, y, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=$ ....

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 4

88. $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\ldots$ અનંત પદ = ...

(a) $\frac{5}{16}$ (b) $\frac{35}{16}$ (c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{7}{16}$

89. જો એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું p મું અને q મું પદ અનુક્રમે x અને y હોય તો તેનુ n મું પદ .... છે.

(a) $\left(\frac{x^{n-p}}{y^{n-q}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ (b) $\left(\frac{x^{n+q}}{y^{n+p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ (c) $\left(\frac{x^{n-q}}{y^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ (d) $\left(\frac{x^{n-q}}{y^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$

90. એક સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ P^2 અને પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S^2 હોય તો તેનું પ્રથમ પદ .... છે.

(a) $\frac{p^2n+2s^2}{n}$ (b) $\frac{2s^2+p^2n}{n^2}$ (c) $\frac{ps^2-p^2s}{n}$ (d) $\frac{2s^2-p^2n}{n}$

91. જો કોઈ એક સમાંતર શ્રેણી માટે a = 1 અને $S_n : (S_{2n}-S_n)$ = અચળ, $\forall\ n \in N$ તો તેનો સામાન્ય તફાવત d = ...

(a) 4 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 3

92. જો $ax^2-bx+c=0$ નાં બીજ α, β હોય અને $px^2-qx+r=0$ નાં બીજ γ, δ હોય તથા $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો તેનો સામાન્ય તફાવત.......... છે.

(a) $\frac{aq-bp}{8ap}$ (b) $\frac{aq-bp}{4ap}$ (c) $\frac{bp-aq}{4ap}$ (d) $\frac{bp-aq}{8ap}$

93. જો $ax^2-bx+c=0$ નાં બીજ α, β હોય અને $px^2-qx+r=0$ નાં બીજ γ, δ હોય તથા $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો તેનો સામાન્ય ગુણોત્તર .... છે.

(a) $\left(\frac{ar}{cp}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $\left(\frac{ar}{cp}\right)^{\frac{1}{8}}$ (c) $\left(\frac{ap}{cr}\right)^{\frac{1}{4}}$ (d) $\left(\frac{ar}{cp}\right)^{-\frac{1}{4}}$

94. ΔABC માં A, B, C વધતી સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને $\sin(B + 2C) = -\frac{1}{2}$ હોય તો A =............

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

95. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનું સૂત્ર $S_n = (a-2)n^3 + (b-1)n^2 + (c-3)n + d$ હોય તો સામાન્ય તફાવત d =............ જ્યાં a, b, c, n પર આધારિત નથી.

(a) $b-1$ (b) $2(b-1)$ (c) $2(b+1)$ (d) $2(b-3)$

96. જો ત્રણ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા abc = 64 તો b ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3

97. જો ΔABC માં a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2} =$ ....

(a) 2 (b) -3 (c) 3 (d) -2

98. જો 2, b, c, 23 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો $(b-c)^2 + (c-2)^2 + (23-b)^2 =$ ....

(a) 625 (b) 525 (c) 441 (d) 442

સૂચનો

1. અહીં સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $a=1$ અને $r=2$

$$\therefore\ S_1 + S_3 + S_5 + \dots\dots\dots + S_{2n-1} = 1 + 1\,\frac{\left(1-2^3\right)}{1-2} + \frac{\left(1-2^5\right)}{1-2} + \dots n \text{ પદ}$$

$$= 1 + 1\left(2^3-1\right) + \left(2^5-1\right) + \dots n \text{ પદ}$$

$$= (2+2^3+2^5+\dots n \text{ પદ}) - (1+1+1+\dots., n \text{ પદ})$$

$$= 2\,\frac{\left(2^{2n}-1\right)}{2^2-1} - n \qquad \because r = 2^2$$

$$= \frac{2^{2n+1}-2-3n}{3} = \frac{1}{3}\left(2^{2n+1}-3n-2\right)$$

2. માગેલ સરવાળો $= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \dots 100$ પદ

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(1-\frac{1}{8}\right) + \dots 100 \text{ પદ}$$

$$= (1+1+1+\dots, 100 \text{ પદ}) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots 100 \text{ પદ}\right)$$

$$= 100 - \frac{1}{2}\,\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 100 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 2^{-100} + 99$$

3. ત્રિકોણની બાજુઓના માપ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી ધારો કે આ માપ $9, 9r$ અને $9r^2$ છે. $(r>1)$

હવે પરિમિતિ $= 9 + 9r + 9r^2 = 37$

$\therefore\ 9r^2 + 9r - 28 = 0 \qquad \therefore\ (3r+7)(3r-4) = 0$

$\therefore\ r = \frac{-7}{3}$ અથવા $r = \frac{4}{3}$ પરંતુ $r > 1$

હોવાથી $r = \frac{-7}{3}$ શક્ય નથી. $\therefore\ r = \frac{4}{3}$

$\therefore$ બાકીની બે બાજુઓના માપ 12 અને 16

4. આપેલ શરતો પરથી $a + b + c = 25$.....(1), $2a = 2 + b$......(2) અને $c^2 = 18b$ ....(3)

(1) અને (2) પરથી $\frac{2+b}{2} + b + c = 25 \Rightarrow 3b + 2c = 48$ ....(4)

(3) અને (4) પરથી $3\left(\frac{c^2}{18}\right) + 2c = 48 \Rightarrow c^2 + 12c - 288 = 0$

$\Rightarrow (c-12)(c+24) = 0 \Rightarrow c = 12$ અથવા $c = -24$ પરંતુ $c < 0$ શક્ય નથી.

$\therefore c = 12$ $\therefore 144 = 18b$ $\therefore b = 8$ અને $a = 5$

$\therefore a = 5, b = 8, c = 12$

5. માગેલ સંખ્યાઓ $a+6, a-6, a, a+6$ લો.

$\therefore (a-6)^2 = (a+6)\,a \Rightarrow a = 2$

$\therefore$ માંગેલ સંખ્યાઓ $8, -4, 2, 8$

6. $A.M. = \sqrt{10}\,(G.M) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{10}\sqrt{ab}$

$\Rightarrow (a+b)^2 = 40ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 38ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2ab} = 19$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab} = \frac{18}{20} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

7. અહીં $H = 4$ અને $G = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} = 4$ અને $ab = G^2 = 18$

$\Rightarrow 2(18) = 4(a+b) \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow a = 3, b = 6$

$\Rightarrow [a, b] = [3, 6]$

8. G.P. માં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓ a, ar, ar^2 લો.

$A = \frac{14}{3} \Rightarrow \frac{a + ar + ar^2}{3} = \frac{14}{3} \Rightarrow a + ar + ar^2 = 14$ ....(1)

તથા $a+1, ar+1, ar^2-1$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\Rightarrow a + 1 + ar^2 - 1 = 2(ar + 1)$

$\Rightarrow a + ar^2 = 2ar + 2 \Rightarrow ar^2 - 2ar + a = 2$ ....(2)

હવે (1) $\div$ (2) $\Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r^2-2r+1} = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Rightarrow r = 2$ અથવા $r = \dfrac{1}{2}$

જો $r = 2$ તો (1) પરથી $a = 2$

$\therefore$ માગેલી સંખ્યાઓ 2, 4, 8

$\therefore\ a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 4 + 16 + 64 = 84$

9. અહીં $b = \dfrac{2ac}{a+c}$, $c^2 = bd$ અને $\dfrac{c+e}{2} = d$

$\therefore c^2 = \left(\dfrac{2ac}{a+c}\right) \cdot \left(\dfrac{c+e}{2}\right) \Rightarrow c\,(a+c) = a\,(c+e) \Rightarrow c^2 = ae$

$\therefore$ a અને e વચ્ચેનો સમગુણોત્તર મધ્યક $= c$

10. ac અને ab વચ્ચેનો ગુણોત્તર મધ્યક d છે. $\therefore d^2 = ac \cdot ab = a^2bc$

આજ રીતે $e^2 = ab^2c$ અને $f^2 = abc^2$

હવે a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow a^2bc, ab^2c, abc^2$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow d^2, e^2, f^2$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

11. અહીં p, A_1, A_2, q સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\Rightarrow A_1 + A_2 = p + q$

અને p, G_1, G_2, q ગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. $\Rightarrow G_1\,G_2 = pq$

તથા p, H_1, H_2, q સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. $\Rightarrow \dfrac{1}{H_1} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{H_2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{H_2 + H_1}{H_1H_2} = \frac{q+p}{pq} = \frac{A_1 + A_2}{G_1G_2}$$

$$\Rightarrow \frac{G_1G_2}{H_1H_2} = \frac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2}$$

12. $\Sigma\left\{\Sigma\, 2^{1-n}\right\} = \Sigma\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots n \text{ પદ}\right)$

$$= \Sigma\, 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2\left(\Sigma 1 - \Sigma \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2n - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= 2n - \frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2n - 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2n - 2 + 2^{1-n}$$

13. $(6 + 60 + 600 + ...n$ પદ$)^2 + (8 + 80 + 800 + ...n$ પદ$)$

$= 36(1 + 10 + 100 + ...n$ પદ$)^2 + 8(1 + 10 + 100 + ...n$ પદ$)$

$$= 36\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right)^2 + 8\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right)$$

$$= 36\left(\frac{10^{2n} - 2.10^n + 1}{9 \times 9}\right) + 8\left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(10^{2n} - 2.10^n + 1 + 2.10^n - 2\right) = \frac{4}{9}\left(10^{2n} - 1\right)$$

$= 4\left(\frac{10^{2n} - 1}{10 - 1}\right) = 4\ (1 + 10 + 100 + ...2n$ પદ$)$

$= 4 + 40 + 400 + ...2n$ પદ

$= 444...2n$ પદ $\qquad = 444...k$ વખત

$\therefore k = 2n$

14. સમાંતર શ્રેણી $\{T_n\}$ માટે T_{m+1}, T_{n+1} અને T_{r+1} સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore T^2_{n+1} = T_{m+1} \cdot T_{r+1}$

$\therefore (a + nd)^2 = (a + md)(a + rd)$

$\therefore (2n - m - r)a = (mr - n^2)d \quad ....(1) \qquad \because d \neq 0$

તથા m, n, r સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. $\Rightarrow n = \dfrac{2mr}{m+n} \Rightarrow mr = \dfrac{n(m+r)}{2}$

હવે (i) $\Rightarrow (2n - m - r)a = \left\{\dfrac{n(m+r)}{2} - n^2\right\} d = \dfrac{n}{2}(m + r - 2n)d$

$\Rightarrow a = \dfrac{-n}{2} d \qquad \Rightarrow d = \dfrac{-2a}{n}$

15. $2 + 6 + 12 + 20 + \ldots 100$ પદ

$= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \ldots 100$ પદ

$= \left[\sum n^2 + \sum n\right]_{n=100} = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]_{n=100}$

$= \dfrac{100 \times 101 \times 102}{3}$

$= \dfrac{1030200}{3}$

16. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{a_r\, a_{r+1}} = \frac{1}{d}\sum_{r=1}^{n-1} \frac{d}{a_r \cdot a_{r+1}} = \frac{1}{d}\sum_{r=1}^{n-1} \frac{a_{r+1} - a_r}{a_r\, a_{r+1}}$

$= \displaystyle\frac{1}{d}\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_{r+1}}\right)$

$= \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}\right)$

$= \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{a_n - a_1}{a_1\, a_n}\right) = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{(n-1)d}{a_1\, a_n}\right) = \dfrac{n-1}{a_1\, a_n}$

17. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{1-\frac{1}{4}} + \ldots + \frac{n}{1-\frac{1}{n+1}}$

$= 2 + 3 + 4 + \ldots + (n+1)$

$= \dfrac{n}{2}\left[4 + (n-1)\right] = \dfrac{n(n+3)}{2}$

18. $S_n = 1 + 3 + 7 + 13 + ... + a_n$

$S_n = \quad 1 + 3 + 7 + ... + a_{n-1} + a_n$

$\underline{- \qquad - \quad - \quad - \qquad - \qquad -}$

$0 = 1 + 2 + 4 + 6 + ... + (a_n - a_{n-1}) - a_n$

$\therefore a_n = 1 + [2 + 4 + 6 + ... (n-1)$ પદ$]$

$= 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)[4 + (n-2)\,2] = 1 + (n-1)(n)$

$= n^2 - n + 1$

$\therefore Sn = \Sigma\left(n^2 - n + 1\right)$

$= \frac{n\left(n^2 + 2\right)}{3}$

$\therefore 1 + 3 + 7 + 13 + ... 100$ પદ $= 100\,\frac{(10000 + 2)}{3} = \frac{1000200}{3}$

19. $1 + 5 + 14 + 30 + ... n$ પદ

$= 1^2 + \left(2^2 + 1^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) + ... n$ પદ

$= \Sigma\left(\Sigma n^2\right) = \Sigma\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

20. $4 + 18 + 48 + 100 + ... n$ પદ

$= \Sigma\, n(n+1)^2 = \Sigma\left(n^3 + 2n^2 + n\right) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$

21. $2 + 12 + 36 + 80 + ... n$ પદ

$= \Sigma n^2 (n+1)$

$= \Sigma\, n^3 + \Sigma n^2$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

22. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + ... \infty$

$= \frac{3}{(1\times 2)^2} + \frac{5}{(2\times 3)^2} + \frac{7}{(3\times 4)^2} + \frac{9}{(4\times 5)^2} + ... \infty$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \times 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \times 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \times 4^2} + \ldots\infty$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots\infty$$

$$= 1$$

23. માગેલો સરવાળો $= \Sigma\left(\frac{\Sigma n^3}{n}\right) = \Sigma \frac{n^2(n+1)^2}{4n}$

$$= \frac{1}{4}\Sigma\left(n^3 + 2n^2 + n\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{48}$$

24. $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{1 + 2 + 3 \ldots + n} = \frac{\Sigma n^3}{\Sigma n} = \frac{(\Sigma n)^2}{\Sigma n} = \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore \Sigma a_n = \Sigma \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

માગેલો સરવાળો $= [\Sigma a_n]_{n=15} = \left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]_{n=15}$

$$= \frac{1}{6} \times 15 \times 16 \times 17 = 5 \times 8 \times 17$$

$$= 680$$

25. $a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3} \times \frac{(3n+2)-(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)}$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right]$$

$$\Sigma a_n = \frac{1}{3}\Sigma\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right] = \frac{n}{2(3n-2)}$$

$\therefore$ માગેલો સરવાળો $= \left[\frac{n}{2(3n+2)}\right]_{n=100} = \frac{100}{2\,(302)} = \frac{25}{151}$

26. $S_{10} = 1 + 3 + 7 + 15 + ...10$ પદ

$= (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + ...10$ પદ

$= (2 + 2^2 + 2^3 + ...10$ પદ$) - (1 + 1 + 1 + ... + 1 \quad 10$ પદ$)$

$= 2\,\frac{(2^{10} - 1)}{2 - 1} - 10 = 2^{11} - 2 - 10 = 2048 - 12$

$= 2036$

27. $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{2-1}{1 + 2\cdot 1} = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1$

$\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 2$

$\tan^{-1}\frac{1}{9703} = \tan^{-1}\frac{99-98}{1+99\cdot 98} = \tan^{-1} 99 - \tan^{-1} 98$

$\therefore$ માગેલો સરવાળો $= \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 2 + ... + \tan^{-1} 99 - \tan^{-1} 98$

$= \tan^{-1} 99 - \tan^{-1} 1$

$= \tan^{-1}\frac{99-1}{1+99\cdot 1} = \tan^{-1}\frac{98}{100} = \tan^{-1}(0.98)$

28. અહીં a અને b નો સમાંતર મધ્યક $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ છે.

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$

$\Rightarrow a^{n+1} + a\cdot b^n + b\cdot a^n + b^{n+1} = 2a^{n+1} + 2b^{n+1}$

$\Rightarrow ab^n + ba^n = a^{n+1} + b^{n+1}$

$\Rightarrow ab^n - b^{n+1} = a^{n+1} - ba^n$

$\Rightarrow b^n(a - b) = a^n(a - b)$

$\Rightarrow b^n = a^n \Rightarrow n = 0$

29. અહીં a અને b નો ગુણોત્તર મધ્યક $= \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}\right)^2 = ab$$

$$\Rightarrow a^{2n+2} + b^{2n+2} + 2(ab)^{n+1} = ab\left(a^{2n} + b^{2n} + 2a^n b^n\right)$$

$$\Rightarrow a^{2n+2} + b^{2n+2} + 2a^{n+1} b^{n+1} = a^{2n+1} \cdot b + b^{2n+1} \cdot a + 2a^{n+1} b^{n+1}$$

$$\Rightarrow a^{2n+1}(a-b) = b^{2n+1}(a-b)$$

$$\Rightarrow a^{2n+1} = b^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2n + 1 = 0 \quad \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \qquad (\because a \neq b)$$

30. અહીં a તથા b નો સ્વરિત મધ્યક $= \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$

$$\therefore \frac{2ab}{a+b} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$$

$$\therefore 2a^{n+1} b + 2a\, b^{n+1} = a^{n+2} + ab^{n+1} + ba^{n+1} + b^{n+2}$$

$$\therefore b^{n+1}(a-b) = a^{n+1}(a-b)$$

$$\therefore b^{n+1} = a^{n+1}$$

$$\therefore n+1 = 0$$

$$\therefore n = -1$$

31. અહીં $T_n = \log\left(\dfrac{a^n}{b^{n-1}}\right)$ અને $T_{n+1} = \log\left(\dfrac{a^{n+1}}{b^n}\right)$

$$\therefore T_{n+1} - T_n = \log\left(\frac{a^{n+1}}{b^n} \times \frac{b^{n-1}}{a^n}\right) = \log\frac{a}{b} \neq 0$$

$\therefore \{T_n\}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

32. ac અને ab નો ગુણોત્તર મધ્યક d હોવાથી $d^2 = a^2 bc$

આજ રીતે $e^2 = ab^2c$, અને $f^2 = abc^2$

હવે a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow$ $a^2bc,\ ab^2c,\ abc^2$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow$ d^2, e^2, f^2 સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow$ $d^2 + de + ef + df, e^2 + de + ef + df, f^2 + de + ef + df$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow$ $(d+e)(d+f), (e+d)(e+f), (f+d)(f+e)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{e+f}, \frac{1}{d+f}, \frac{1}{d+e}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow$ $e+f, f+d, d+e$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

33. ધારો કે માગેલી ત્રણ સંખ્યાઓ $\frac{a}{r}, a, ar$ છે.

હવે $\frac{a}{r} + a + ar = 13 \ldots\ldots (i)$ અને $\frac{a^2}{r^2} + a^2 + a^2r^2 = 91 \ldots\ldots (ii)$

(i) $\Rightarrow \left(\frac{a}{r} + a + ar\right)^2 = 169$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{r^2} + a^2 + a^2r^2\right) + 2\left(\frac{a^2}{r} + a^2 + a^2r\right) = 169$$

$$\Rightarrow 91 + 2a\left(\frac{a}{r} + a + ar\right) = 169$$

$$\Rightarrow 2a(13) = 78 \Rightarrow 26a = 78 \Rightarrow a = 3$$

(i) માં $a = 3$ મૂકતાં $\frac{3}{r} + 3 + 3r = 13$

$\Rightarrow 3r^2 + 3r - 13r + 3 = 0$

$\Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$

$\Rightarrow (r-3)(3r-1) = 0$

$\Rightarrow r = 3$ અથવા $r = \frac{1}{3}$

જો $a = 3, r = 3$ તો માગેલી સંખ્યાઓ 1, 3, 9

જો $a = 3$ $r = \frac{1}{3}$ તો માગેલી સંખ્યાઓ 9, 3, 1

$\therefore$ સાચો જવાબ (B) 1, 3, 9 છે.

34. $S_1 = \frac{n}{2}\left[2+(n-1)\right],\ S_2 = \frac{n}{2}\left[4+(n-1)3\right].....S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)(2n-1)\right]$

$\therefore \sum_{r=1}^{n} S_r = \frac{n}{2}\left[2+4+6...+2n\right]+\frac{n(n-1)}{2}\left[1+3+5...+(2n-1)\right]$

$= \frac{n}{2}2\Sigma n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n}{2}\left[1+2n-1\right]$

$= n\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}n^2 = \frac{n^2}{2}\left[n+1+n^2-n\right] = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$

35. $0.4 + 0.44 + 0.444 + ...2n$ પદ

$= 4\left[0.1 + 0.11 + 0.111 + ...2n\right]$ પદ]

$= \frac{4}{9}\left[0.9 + 0.99 + 0.999 + ...2n\right]$ પદ]

$= \frac{4}{9}\left[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+...2n\right.$ પદ]

$= \frac{4}{9}\ [2n-(0.1+0.01+0.001+...2n$ પદ)]

$= \frac{4}{9}\left[2n-0.1\ \frac{\left(1-(0.1)^{2n}\right)}{1-0.1}\right]$

$= \frac{4}{9}\left[2n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{100^n}\right)\right] = \frac{4}{9}\ \frac{\left[18n-1+100^{-n}\right]}{9}$

$= \frac{4}{81}\left[18n-1+100^{-n}\right]$

36. સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે T_{11}, T_{13}, T_{15} અનુક્રમે $T_{11} = ar^{10}$ $T_{13} = ar^{12}$ $T_{15} = ar^{14}$ છે.

હવે, $T_{11}\cdot T_{15} = a^2r^{24} = \left(ar^{12}\right)^2 = \left(T_{13}\right)^2$

તેથી T_{11}, T_{13}, T_{15} સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

37. $\frac{b+c-a}{a},\quad \frac{c+a-b}{b}\quad ,\frac{a+b-c}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ \frac{b+c-a}{a}+2,\qquad \frac{c+a-b}{b}+2,\quad \frac{a+b-c}{c}+2$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \dfrac{b+c+a}{a}, \quad \dfrac{c+a+b}{b}, \quad \dfrac{a+b+c}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore$ a, b, c સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

38. અહીં $a = 1, \; S_{101} = 0 \Rightarrow \dfrac{101}{2}[2 + 100d] = 0 \Rightarrow d = -\dfrac{1}{50}$

$\therefore$ પછીનાં 100 પદોનો સરવાળો $= S_{201} - S_{101} = S_{201} - 0 = S_{201}$

$= \dfrac{201}{2}\left[2(1) + 200\left(-\dfrac{1}{50}\right)\right] = \dfrac{201}{2}(2-4) = -201$

39. અહીં $7, A_1, A_2, \dfrac{1}{7}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\Rightarrow A_1 - 7 = A_2 - A_1 = \dfrac{1}{7} - A_2$

$\Rightarrow 2A_1 - A_2 = 7$ અને $2A_2 - A_1 = \dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1) = 7.\dfrac{1}{7} = 1$

40. સમાંતર શ્રેણી માટે $S_{100} = 3S_{50} \Rightarrow \dfrac{100}{2}[2a + 99d] = 3.\dfrac{50}{2}[2a + 49d]$

$\Rightarrow 2a = 51d$

$\therefore \dfrac{S_{150}}{S_{50}} = \dfrac{\dfrac{150}{2}(51d + 149d)}{\dfrac{50}{2}(51d + 49d)} = \dfrac{3(200d)}{100d} = 6$

41. $d = \dfrac{b-a}{n+1} = \dfrac{31-1}{n+1} = \dfrac{30}{n+1}$................(1)

તથા $\dfrac{A_7}{A_{n-1}} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow \dfrac{1+7d}{31-2d} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow d = 2$.........(2)

(1) અને (2) પરથી $\dfrac{30}{n+1} = 2 \Rightarrow n+1 = 15 \Rightarrow n = 14$

42. જો a, ar, ar^2,...$\frac{\ell}{r}$, ℓ સમગુણોત્તર શ્રેણી હોય તો $\ell, \frac{\ell}{r}, \frac{\ell}{r^2} \ldots ar^2, ar, a$ પણ સમગુણોત્તર શ્રેણી થાય જેનુ

પ્રથમ પદ $= \ell = 1024$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $= \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ થાય.

$\therefore$ માગેલુ પદ $= \ell\left(\frac{1}{r}\right)^{20-1} = 1024\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{512}$

43. ધારોકે $S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots + 50.2^{49} \ldots\ldots\ldots(1)$

$\therefore 2S = 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + 49.2^{49} + 50.2^{50} \ldots\ldots\ldots(2)$

(2) - (1) $\Rightarrow S = -1 - (1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + \ldots 49$ પદ $) + 50.2^{50}$

$= -1 - 2\,\frac{(2^{49} - 1)}{2 - 1} + 50.2^{50} = -1 - 2^{50} + 2 + 50.2^{50}$

$= 1 + 49.2^{50}$

44. જો સામાન્ય ગુણોત્તર r હોય તો પ્રથમ 2n પદોનો ગુણાકાર

$= p = a\,(ar)\,(ar^2)\ldots\left(\frac{\ell}{r}\right).\,\ell \ldots\ldots\ldots(1)$

તથા $p = \ell\left(\frac{\ell}{r}\right)\left(\frac{\ell}{r^2}\right)\ldots(ar)\,a \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) $\times$ (2) $\Rightarrow p^2 = (a\ell)\,(a\ell)\,(a\ell)\ldots 2n$ અવયવ $\Rightarrow p = (a\ell)^n$

45. $n = 1$ લેતાં $1 \times 1! = 1$

(A) $(n+1)! - n = 2! - 1 = 1$

(B) $(n+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$

(C) $n! - 1 + n = 1 - 1 + 1 = 1$

(D) $n! + 1 - n = 1 + 1 - 1 = 1$

$n = 1$ માટે ચારેય વિકલ્પ સત્ય છે.

$n = 2$ માટે

(A) $(n+1)! - n = 3! - 2 = 4 \neq 5$

(B) $(n+1)! - 1 = 3! - 1 = 5$

(C) $n! - 1 + n = 2 - 1 + 2 = 3$

(D) $n! + 1 - n = 2 + 1 - 2 = 1$

$n = 2$ માટે ફક્ત વિકલ્પ B સત્ય છે.

માટે સાચો જવાબ (B) છે.

બીજી રીત

માગેલ સરવાળો $= \sum n\, n!$

$= \sum [(n+1)-1]n!$

$= \sum (n+1)! - n!$

$= \sum (n+1)! - \sum n!$

$= [(n+1)! + n! + (n-1)! + ...2! + 1] - [n! + (n-1)! + ... + 2! + 1!]$

$= (n+1)! - 1$

46. અહીં $n = 35,\ d = -3,\ \ell = -50$

$\therefore\ \ell = a + (n-1)d = a + 34(-3) = a + (-102)$

$\therefore\ -50 + 102 = a \qquad \therefore\ a = 52$

હવે $S_{35} = \frac{35}{2}[2(52) + 34(-3)] = \frac{35}{2}[104 - 102] = 35$

47. અહીં $a + (p-1)d = \frac{1}{qr}$ અને $a + (q-1)d = \frac{1}{pr}$

$\therefore\ a = d = \frac{1}{pqr}$

$\therefore\ a + (r-1)d = \frac{1}{pqr} + (r-1)\frac{1}{pqr} = \frac{1}{pq}$

48. અહીં $A = \{4k - 1 / 1 \le k \le 102, k \in N\}$ અને

$B = \{7k - 5 / 1 \le k \le 102, k \in N\}$

જો $x \in A \cap B$ તો કોઈક $n, m \in N$ માટે $4n - 1 = 7m - 5$

$\therefore\ m = \frac{4n+4}{7}$, $m, n = 1, 2...102$

$\therefore\ n = 6, 13, 21...98 \qquad \therefore\ n(A \cap B) = \frac{98}{7} = 14$

49. સામાન્ય તફાવત $= T_2 - T_1 = (T_1 + T_2) - 2T_1 = S_2 - 2S_1$

$= (2a + 4b) - 2(a + b)$

$= 2b$

50. માગેલ સરવાળો $= - d\,(a_1 + a_2) - d\,(a_3 + a_4) - \dots - (a_{99} + a_{100})$

$$= = -d\frac{1}{100}(a_1 + a_{100}) \times \frac{a_1 - a_{100}}{a_1 - a_{100}}$$

$$= \frac{-50d(a_1^{\,2} - a_{100}^2)}{a_1 - (a_1 + 99d)}$$

$$= \frac{50}{99}(a_1^2 - a_{100}^2)$$

51. જો બીજ α, β હોય તો $\alpha+\beta = \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}} \qquad \Rightarrow ab^2 + bc^2 = 2a^2c$$

$\therefore\ bc^2,\ ca^2,\ ab^2$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

55. આપેલ શ્રેણી $\frac{1}{1+\sqrt{x}}, \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-\sqrt{x}}, \dots$ છે.

$\therefore\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, \frac{1}{1-x}, \frac{1+\sqrt{x}}{1-x} \dots$ જે સમાંતર શ્રેણી છે.

જેનો સામાન્ય તફાવત $d = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ અને $T_1 = a = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ છે.

$\therefore\ T_n = a + (n-1)\,d = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} + (n-1)\frac{\sqrt{x}}{1-x}$

$= \frac{1+\sqrt{x}\,(n-2)}{1-x}$

56. $a - (a+b) + (a+2d) - (a+3d) + \dots 50$ પદ

$= (-d) + (-d) + (-d) + \dots 25$ પદ

$-25d$

57. અહીં પ્રથમ પદ $= a$, છેલ્લુ પદ $= x$ અને સામાન્ય તફાવત $= b - a$

$\therefore\ \ell = a + (n-1)\,D \Rightarrow n = \frac{x-a+D}{D} = \frac{x-a+b-a}{c-b} = \frac{x+b-2a}{c-b}$

58. ધારોકે ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ $a-d, a, a+d$ $d>0$ છે.

$\therefore (a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \Rightarrow a = 4d$

$\therefore$ ત્રણ બાજુઓનાં માપ 3d, 4d, 5d થાય.

$\therefore \sin A + \sin C = \frac{4d}{5d} + \frac{3d}{5d} = \frac{7}{5}$

59. અહીં $2\log_3 (2^x - 5) = \log_3 2 + \log_3 \left(2^x - \frac{7}{2}\right)$

$\Rightarrow (2^x - 5)^2 = 2\left(2^x - \frac{7}{2}\right)$

$\Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0$ $\quad \because 2^x = t$

$\Rightarrow t = 4, 8 \quad \Rightarrow x = 2, 3$

પરંતુ $x = 2$ શક્ય નથી.

$\therefore x = 3$

60. ધારોકે a, ar, ar^2 સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

$\therefore \alpha = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{200} = ar + ar^3 + ar^5 + ... + ar^{199}$

$= ar\ (1 + r^2 + r^4 + ... + r^{198})$.........(1)

અને $\beta = a\ (1 + r^2 + r^4 + ... + r^{198})$...........(2)

$(1) \div (2) \Rightarrow r = \frac{\alpha}{\beta}$

61. p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી $2q = p + r \Rightarrow (2^p)^{2q} = (2^p)^{p+r}$

$\Rightarrow 2^{2pq} = 2^{p^2} \cdot 2^{pr} \Rightarrow (2^{pq})^2 = 2^{p^2} \cdot 2^{pr}$

$\therefore 2^{p^2}, 2^{pq}, 2^{pr}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

62. A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\therefore 2B = A + C = 180^\circ - B \Rightarrow B = 60^\circ$

$\therefore \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac$

63. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ...$ અનંત પદ

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots \text{અનંત પદ} \right) + 2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots \text{અનંત પદ} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} + \frac{2\left(\frac{1}{9}\right)}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

64. ધારો કે $S = 1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + \dots\infty\dots\dots(i)$

$$\therefore \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \dots\infty\dots\dots(ii)$$

$$(i) - (ii) \Rightarrow \frac{4}{5}S = 1 + \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore S = \frac{7}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{35}{16}$$

65. $\sec(x-y), \sec x, \sec(x+y)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$$\Rightarrow \frac{2}{\cos x} = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{\cos(x-y)\cos(x+y)}$$

$$\Rightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 y) = \cos x\,(2\cos x \cos y)$$

$$\Rightarrow \cos^2 x\,(1-\cos y) = \sin^2 y$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 2\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) \qquad \because \cos y \neq 1$$

$$\Rightarrow \cos x \sec\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{2}$$

66. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{15}{16} + \dots n$ પદ

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{16}\right) + \dots n \text{ પદ}$$

$$= n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots n \text{ પદ}\right)$$

$$= n - \frac{a\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= n - \frac{1}{2}\frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$= n - 1 + 2^{-n}$$

67. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = \left\{\frac{1}{b} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right\}\left\{\frac{1}{b} - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b^2} - \left\{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{4}{ac}\right\}$$

$$= \frac{1}{b^2} - \left(\frac{2}{b}\right)^2 + \frac{4}{ac} = \frac{4}{ac} - \frac{3}{b^2}$$

68. $$a_n = \frac{3 + (n-1)2}{\{n(n+1)\}^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore s_{11} = \sum_{i=1}^{11} a_i = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{11^2} - \frac{1}{12^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{144} = \frac{143}{144}$$

69. ધારોકે ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ $a-d, a, a+d$ છે. $a, d > 0$ અને સૌથી નાના ખૂણાનું માપ A છે. તેથી સૌથી મોટા ખૂણાનું માપ 2A અને ત્રીજા ખુણાનું માપ $180^\circ - 3A$ છે.

$$\therefore \frac{a-d}{\sin A} = \frac{a}{\sin(180^\circ - 3A)} = \frac{a+d}{\sin 2A}$$

$\therefore 3 - 4\sin^2 A = \dfrac{a}{a-d}$ અને

$$2\cos A = \frac{a+d}{a-d}$$

$$\therefore a = 5d, a-d = 4d, a+d = 6d$$

$$\therefore a-d : a : a+d = 4:5:6$$

70. આપેલ શ્રેણી $2+\frac{1}{3}, 6-\frac{1}{6}, 10+\frac{1}{12}, \ldots$ છે.

$$\therefore T_6 = 22 - \frac{1}{96} = \frac{2111}{96}$$

71. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$

$(a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}\, b_n - a_n\, b_{n-1})^2$ પરથી

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\, x_{i+1}\right)^2 \le 0$$

$$\Rightarrow (x_1\, x_3 - x_2 \cdot x_2)^2 + (x_2\, x_4 - x_3 \cdot x_3)^2 + \ldots + (x_{n-2}x_n - x_{n-1}\, x_{n-1})^2 \le 0$$

$$\Rightarrow x_1 x_3 = x_2^2, x_2 x_4 = x_3^2 \ldots x_{n-2}x_n = x_{n-1}^2$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}, x_n$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

72. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots + \frac{1}{2^n} = \dfrac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$= 2 - \frac{1}{2^n} < 2 \quad \forall\, n$ $\quad\quad$ ∴ D સાચો જવાબ છે.

73. x^8 નો સહગુણક $= 12 + 1.3 + ... + 9.10 = \sum_{r=1}^{9} r(r+1)$

$= \frac{1}{2}\left[(1+2+3+...+10)^2 - (1^2+2^2+3^2+...+10^2)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 - \frac{10(11)(21)}{6}\right] = 1320$

75. $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{2b-x}$ અને $\frac{1}{b-a}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી $\frac{2}{2b-x} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-a}$

$\therefore ac - \frac{ax}{2} - \frac{cx}{2} = b^2 - bx$

$\therefore ac - a\frac{x}{2} - c\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} = b^2 - bx + \frac{x^2}{4}$

$\therefore \left(a-\frac{x}{2}\right)\left(c-\frac{x}{2}\right) = \left(b-\frac{x}{2}\right)^2$

$\therefore a-\frac{x}{2}, b-\frac{x}{2}, c-\frac{x}{2}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

76. સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત d હોય તો

$\log_y x = 1 + d, \log_z y = 1 + 2d$ અને $\log_x z = \frac{1+3d}{-15}$

$\therefore \frac{\log x}{\log y} \times \frac{\log y}{\log z} \times \frac{\log z}{\log x} = (1+d)(1+2d)\frac{1+3d}{-15}$

$\therefore (1+d)(1+2d)(1+3d) = -15$

$\therefore 6d^3 + 11d^2 + 6d + 16 = 0 \qquad \therefore d = -2$

77. દરેક $x, y \in N$ માટે $f(x+y) = f(x)f(y)$ હોવાથી

$f(n) = f(1+1+1+...+1$ પદ$)$

$= f(1).f(1).f(1)...f(1)$ n અવયવ

$= 3^n \ \forall \ n \in N \qquad \because f(1) = 3$

$\therefore \sum_{r=1}^{n} f(a+r) = \sum_{r=1}^{n} 3^{a+r} = 3^a \cdot \frac{3(3^n-1)}{3-1} = 3^{a+1}\frac{(3^n-1)}{2} = \frac{81}{2}(3^n-1)$

$\therefore 3^{a+1} = 81 \qquad \therefore a = 3$

78. અહીં $a_1 + a_5 + a_{15} + a_{26} + a_{36} + a_{40} = 210$

$\Rightarrow (a_1 + a_{40}) + (a_5 + a_{36}) + (a_{15} + a_{26}) = 210$

$\Rightarrow 3(a_1 + a_{40}) = 210$

$\Rightarrow a_1 + a_{40} = 70$

$\therefore S_{40} = \frac{40}{2}(a_1 + a_{40}) = 20 \times 70 = 1400$

79. અહીં $\frac{a+b}{2} = 4$ અને $\sqrt{ab} = 2$ અને $\therefore a + b = 8$ અને $ab = 4$

$\therefore \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 2$ $\qquad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2(1)$

$\therefore \frac{1}{a}, 1, \frac{1}{b}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

80. આપણે જાણીએ છીએ કે $\forall\ a > 0$ માટે $a + \frac{1}{a} \geq 2$ થાય

હવે $\frac{(1+x+x^2)(1+y+y^2)}{xy} = \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(y + \frac{1}{y} + 1\right) \geq (2+1)(2+1)$

≥ 9

81. અહીં $r = \frac{b}{a},\ \ell = c = ar^{n-1} \Rightarrow ar^n = cr$

$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a-ar^n}{1-r} = \frac{a-cr}{1-r} = \frac{a-c\left(\frac{b}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a^2-bc}{a-b}$

82. $n = 1, 2, ...9$ માટે $a_{n+1} - a_n = d$ અને $\frac{1}{h_{n+1}} - \frac{1}{h_n} = D$ લેતાં

$a_{10} = 3 \Rightarrow a_1 + 9d = 3 \Rightarrow 9d = 3 - 2 = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{9}$

$\therefore a_4 = 2 + 3d = \frac{7}{3}$

ફરીથી $\frac{1}{h_{10}} = \frac{1}{h_1} + 9D \Rightarrow 9D = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow D = -\frac{1}{54}$

$\therefore \dfrac{1}{h_7} = \dfrac{1}{h_1} + 6D = \dfrac{1}{2} + 6\left(-\dfrac{1}{54}\right) = \dfrac{7}{18} \Rightarrow h_7 = \dfrac{18}{7}$

$\therefore a_4 h_7 = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{18}{7} = 6$

83. અહીં $\dfrac{2}{H} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{H}{2} = \dfrac{ab}{a+b} \Rightarrow \dfrac{H}{a} = \dfrac{2b}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{H+a}{H-a} = \frac{a+3d}{b-a} \qquad ...(1)$$

આજ રીતે $\dfrac{H+b}{H-b} = \dfrac{3a-b}{a-b} = -\left(\dfrac{3a+b}{b-a}\right)$

$(i) + (ii) \Rightarrow \dfrac{H+a}{H-a} + \dfrac{H+b}{H-b} = \dfrac{2b-2a}{b-a} = 2$

84. અહીં $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2} \Rightarrow \dfrac{\frac{m}{2}\left[2a + (m-1)d\right]}{\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]} = \dfrac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow \dfrac{a + \left(\frac{m-1}{2}\right)d}{a+\left(\frac{n-1}{2}\right)d} = \dfrac{m}{n}, \qquad \dfrac{m-1}{2} = p^2 - 1, \quad \dfrac{n-1}{2} = q^2 - 1$ લેતાં

$m = 2p^2 - 1$ અને $n = 2q^2 - 1$

$\therefore \dfrac{a + \left(p^2-1\right)d}{a + \left(q^2-1\right)d} = \dfrac{2p^2-1}{2q^2-1} \Rightarrow \dfrac{p^2 \text{ મું પદ}}{q^2 \text{ મું પદ}} = \dfrac{2p^2-1}{2q^2-1}$

85. અહીં n મી હાર 2n-1 પદોની સમાતંર શ્રેણી છે. જેમાં સામાન્ય તફાવત = 1 અને છેલ્લુ પદ $\ell = n^2$ છે.

$\therefore$ માગેલો સરવાળો $= \dfrac{n}{2}\left(2\ell - (n-1)d\right)$

$= \dfrac{2n-1}{2}\left(2n^2 - (2n-1-1)1\right)$

$= (2n-1)\left(n^2 - n + 1\right) = n^3 + (n-1)^3$

86. અહીં $\frac{A-2b}{A-a}=\frac{\frac{a+b}{2}-2b}{\frac{a+b}{2}-a}=\frac{a-3b}{b-a}$ અને $\frac{A-2a}{A-b}=\frac{b-3a}{a-b}$

$\therefore\ \frac{A-2b}{A-a}+\frac{A-2a}{A-b}=\frac{a-3b}{b-a}+\frac{b-3a}{a-b}=-4$

88. $S\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{3\left(\frac{1}{5}\right)}{\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)\right]^2}=\frac{5}{4}+\frac{15}{16}=\frac{35}{16}$

89. અહીં $ar^{p-1}=x, ar^{q-1}=y \Rightarrow \frac{x}{y}=r^{p-a} \Rightarrow r=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

હવે $t_n=ar^{n-1}=ar^{p-1}\cdot r^{n-p}=x\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n-p}{p-q}}=x\left(\frac{x^{n-p}}{y^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

$=\left(\frac{x^{p-q}\cdot x^{n-p}}{y^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}=\left(\frac{x^{n-q}}{y^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

90. આપેલ છે કે $t_n=p^2$ અને $S_n=s^2 \Rightarrow \frac{n}{2}\left(a+p^2\right)=s^2$

$\Rightarrow a+p^2=\frac{2s^2}{n} \Rightarrow a=\frac{2s^2}{n}-p^2=\frac{2s^2-p^2n}{n}$

91. અહીં $\frac{S_1}{S_2-S_1}=\frac{S_2}{S_4-S_2} \Rightarrow S_1\ S_4=S_2^2 \Rightarrow a\left[\frac{4}{2}(2a+3d)\right]=(a+a+d)^2$

$\Rightarrow 2ad=d^2 \Rightarrow d=2a=2(1)=2 \qquad \therefore\ d=2$

92. $\alpha=a-3d, \beta=a-d, \gamma=a+d, \delta=a+3d$ લો.

$\therefore\ \alpha+\beta=2a-4d=\frac{b}{a}$............(1) $\gamma+\delta=2a+4d=\frac{q}{p}$....(2)

$(ii)-(i) \Rightarrow 8d=\frac{q}{p}-\frac{b}{a}=\frac{aq-bp}{ap} \Rightarrow$ સા.ત. $=2d=\frac{aq-bp}{4ap}$

93. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ની કિંમત $\frac{a}{r_1^3}, \frac{a}{r_1} ar_1, ar_1^3$ લો.

હવે $\alpha\beta = \frac{a^2}{r_1^4} = \frac{c}{a}$ ...(1) તથા $\gamma\delta = a^2 r_1^4 = \frac{r}{p}$..........(ii)

$(ii) \div (i) \Rightarrow r_1^8 = \frac{r}{p} \times \frac{a}{c} \Rightarrow r_1^2 = \left(\frac{ar}{cp}\right)^{\frac{1}{4}}$ = સામાન્ય ગુણોત્તર

94. A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી $A + C = 2B \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$

હવે $\sin(B + 2C) = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6} \Rightarrow B + 2C = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow C = \frac{5\pi}{12}$

$\therefore A = \pi - (B + C) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12}\right) = \pi - \frac{9\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

95. $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ એ અચળ પદ ન હોય તેવુ n નું દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

$\therefore a = 2, d = 0$

$\therefore Sn = (b-1)\,n^2 + (C-3)\,n$

હવે $t_n = S_n - S_{n-1} = (b-1)n^2 + (C-3)n - (b-1)(n-1)^2 - (C-3)(n-1)$

$= (b-1)(2n-1) + (c-3)$

$\therefore\ d = t_n - t_{n-1} = (b-1)(2n-1) + (C-3) - \left[(b-1)(2n-3) + (C-3)\right]$

$= (b-1)(2n-1-2n+3)$

$= (b-1)(2)$

$= 2(b-1)$

96. $A \ge G$ હોવાથી $\frac{a+b+c}{3} \ge (abc)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \frac{3b}{3} \ge (64)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \because a + c = 2b$

$\Rightarrow\ b \ge 4$

$\therefore$ b ની ન્યૂનતમ કિંમત 4 છે.

97. અહીં $2b = a + c \Rightarrow 4R\sin B = 2R\,(\sin A + \sin C)$

$$\Rightarrow\ 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow\ 2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)-\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)} = \frac{3}{-1} \Rightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$$

98. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર r હોય તો $b = 2r,\ c = 2r^2,\ 23 = 2r^3$

$$\therefore\ (b-c)^2 + (c-2)^2 + (23-b)^2 = (2r-2r^2)^2 + (2r^2-2)^2 + (23-2r)^2$$

$$= 4\,(r-r^2)^2 + 4\,(r^2-1)^2 + (23-2r)^2$$

$$= 4\left[r^2 + r^4 - 2r^3 + r^4 + 1 - 2r^2\right] + 529 - 92r + 4r^2$$

$$= 8r^4 - 8r^3 - 4r^2 + 4 + 529 - 92r + 4r^2$$

$$= 8r^4 - 8r^3 - 92r + 533$$

$$= 8r\left(\frac{23}{2}\right) - 8\left(\frac{23}{2}\right) - 92r + 533 \qquad \because r^3 = \frac{23}{2}$$

$$= 92r - 92 - 92r + 533$$

$$= 441$$

જવાબો

1	(C)	21	(B)	41	(B)	61	(B)	81	(C)
2	(B)	22	(C)	42	(A)	62	(C)	82	(B)
3	(A)	23	(D)	43	(B)	63	(D)	83	(A)
4	(A)	24	(B)	44	(C)	64	(C)	84	(B)
5	(C)	25	(C)	45	(B)	65	(A)	85	(C)
6	(D)	26	(D)	46	(A)	66	(A)	86	(D)
7	(A)	27	(D)	47	(C)	67	(B)	87	(C)
8	(C)	28	(D)	48	(B)	68	(B)	88	(B)
9	(C)	29	(C)	49	(A)	69	(C)	89	(C)
10	(A)	30	(B)	50	(A)	70	(D)	90	(D)
11	(A)	31	(B)	51	(A)	71	(B)	91	(C)
12	(A)	32	(C)	52	(B)	72	(D)	92	(B)
13	(C)	33	(B)	53	(A)	73	(C)	93	(A)
14	(D)	34	(D)	54	(B)	74	(B)	94	(B)
15	(B)	35	(B)	55	(C)	75	(B)	95	(B)
16	(B)	36	(A)	56	(D)	76	(C)	96	(C)
17	(A)	37	(C)	57	(B)	77	(D)	97	(C)
18	(B)	38	(C)	58	(A)	78	(C)	98	(C)
19	(D)	39	(D)	59	(B)	79	(B)		
20	(A)	40	(C)	60	(A)	80	(D)		

●●●

એકમ - 8
લક્ષ અને સાતત્ય
અગત્યના મુદ્દા

વાસ્તવિક ચલનું વિધેય :

જો $f : A \to B$ (જ્યાં $A \subset R$ અને $B \subset R$)

વ્યાખ્યાયિત હોય તો તેને વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

કેટલાક અગત્યના વાસ્તવિક ચલના વાસ્તવિક વિધેયો :

(1) અચળ વિધેય:

$f : A \to B, f(x) = c, \forall x \in A$ (જ્યાં $A \subset R$, $B \subset R$ તથા $A \neq \phi, B \neq \phi$) વ્યાખ્યાયીત હોય તો તેને અચળ વિધેય કહે છે. (અત્રે c એ ગણ B નો નિશ્ચિતઘટક છે.)

N.B. : $R_f = \{c\}$ = એકાકીગણ

(2) તદેવ વિધેય (એકમ વિધેય)

$I_A : A \to A, I_A(x) = x, \forall x \in A$ વડે વ્યાખ્યાયીત વિધેય ને તદેવ વિધેય કહે છે.

N.B. : તદેવ વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય જ.

(3) માનાંક વિધેય :

$f : R \to R^+ \cup \{0\}$

$f(x) = |x| = \left.\begin{matrix} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{matrix}\right\}$ વડે વ્યાખ્યાયીત વિધેયને માનાંક વિધેય કહે છે.

(4) અધિક્તમ પૂર્ણાંક વિધેય : Integer part function Floor funrction)

(A) $f : R \to z$, $f(x) = x$ થી અધિક ન હોય તેવો અધિક્તમ પૂર્ણાંક

તેને સંકેતમાં [x] અથવા $\lfloor x \rfloor$ વડે દર્શાવાય છે.

$f(-3.1) = [-3.1] = \lfloor -3.1 \rfloor = -4, f(\sqrt{7}) = [\sqrt{7}] = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2$

(B) ન્યૂનત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય :

$f : R \to Z, f(x) = x$ થી નાનો ન હોય તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક.

તેને સંકેતમા $\lceil x \rceil$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$f(-3.1) = \lceil -3.1 \rceil = -2, \lceil \sqrt{7} \rceil = 3$

(5) ઘાતાંકિય વિધેય : (Exponential Function)

$f : R \to R^+, f(x) = a^x, a \in R^+$ સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયીત છે.

N.B. :

1. જો $a = 1$ તો $R_f = \{1\}$ એટલે કે વિધેય f અચળ વિધેય થાય.
2. જો $0 < a < 1$ માટે ઘાતાંકીય વિધેય ઘટતું વિધેય છે.
3. જો $a > 1$ માટે ઘાતાંકીય વિધેય વધતું વિધેય છે.
4. ઘાતાંકીય વિધેયનો આલેખ બિંદુ (0,1) માંથી પસાર થાય છે.

(6) લઘુગુણકીય વિધેય :

$f : R^+ \to R,\ f(x) = \log_a x,\ a \in R^+ - \{1\}$, સ્વરૂપે લઘુગુણકીય વિધેય વ્યાખ્યાયિત છે.

N. B. :

1. ઘાતાંકીય અને લઘુગુણકીય વિધેયો એક બીજાના પ્રતિવિધેયો છે.
2. કાર્ય નિયમો

(A) ઘાતાંકીય વિધેય

જો $a, b \in R^+ \{1\}, x, y \in R$

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(ii) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(v) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(vi) $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$

(vii) $a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in R^+$

(B) લઘુગુણકીય વિધેય

જો $a, b \in R^+ - \{1\}, x, y \in R^+$ તો

(i) $\log_a (xy) = \log_a x + \log y$

(ii) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(iii) $\log_a x^n = n \log_a x, n \in R$

(iv) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

(v) $\log_a 1 = 0$

(vi) $\log_a a = 1$

(7) બહુપદી વિધેય :

$f : A \to R,\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_0;$

$a_i \in R,\ (i = 0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots n,\ a_n \neq 0)$ વ્યાખ્યાયીત વાસ્તવિક વિધેયને વાસ્તવિક બહુપદી વિધેય કહે છે.

$(A \subset R,\ A \neq \phi,\ n \in N \cup \{0\})$

(8) સંમેય બહુપદી વિધેય :

$f : A \to R, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ જ્યાં $p(x)$ અને $q(x)$ વાસ્તવિક બહુપદી વિધેયો (A પરના) અને

$q(x) \neq 0, \forall x \in A,$ ને સંમેય બહુપદી વિધેય કહે છે.

(9) ચિહ્ન વિધેય :

$f : R \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$ ને ચિહ્ન વિધેય કહે છે.

N. B. : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$

(10) ત્રિકોણમિતિય વિધેયો — ત્રિકોણમિતિય વિધેયોના પ્રતિવિધેયો

વિધેયો	**પ્રદેશગણ**	**વિસ્તારગણ**	**વિધેયો**	**પ્રદેશગણ**	**વિસ્તારગણ**
Sine	R	[-1, 1]	Sin^{-1}	[-1, 1]	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Cosine	R	[-1, 1]	Cos^{-1}	[-1, 1]	$[0, \pi]$
Tangent	$R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in Z\right\}$	R	tan^{-1}	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Co-tangent	$R - \{k\pi / k \in Z\}$	R	Cot^{-1}	R	$(0, \pi)$
Secant	$R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in Z\right\}$	R R-(-1,1)	Sec^{-1}	R-(-1, 1)	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
Cosecant	$R - \{k\pi / k \in Z\}$	R R-(-1,1)	$Cosec^{-1}$	R-(-1, 1)	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

(11) યુગ્મ વિધેય : (Even function) :

જો $f : A \rightarrow R, (A \subset R, A \neq \phi)$ કોઈ વિધેય માટે $x \in A \Rightarrow -x \in A$ અને $f(-x) = f(x), \forall x \in A,$ તો વિધેય f ને યુગ્મ વિધેય કહે છે.

ઉ.દા. $f(x) = x^2 / x^4 / x^{-2} / \cos x / \cos^n x / \sin^{2n} x / \tan^{2n} x / \cot^{2n} x$

(જ્યાં $n \in z - \{0\}$) યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત યુગ્મ વિધેયો છે.

(12) અયુગ્મ વિધેય : (Odd function)

જો $f : R \rightarrow R, (A \subset R, A \neq \phi)$ કોઈ વિધેય માટે $x \in A \Rightarrow -x \in A$ અને $f(-x) = -f(x), \forall x \in A,$ તો વિધેય f ને અયુગ્મ વિધેય કહે છે.

$f(x) = \frac{x^{2n+1}}{\sin^{2n+1} x} \Big/ \tan^{2n+1} x \ldots\ldots (n \in Z - \{0\})$

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત અયુગ્મ વિધેયો છે.

- **વિધેયનું લક્ષ :**

વિધેય f(x) એ a ના છિદ્રીત સામિપ્યને સમાવતા કોઈ અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયીત હોય તથા જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ ને સંગત $\delta > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી, $a-\delta < x < a+\delta, x \neq a, x \in D_f \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$ થાય તો જેમ $x \to a$ તેમ વિધેય f(x) નું લક્ષ l થાય. તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ વડે દર્શાવાય છે.

- **વિધેયનું ડાબી બાજુનું લક્ષ :**

વિધેય f એ અંતરાલ $(a-h, a), (h>0)$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય અને જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$, ને સંગત $\delta > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in (a-\delta, a)$ (જ્યાં $\delta < h$) થાય તો વાસ્તવિક સંખ્યા ℓ ને વિધેય f(x) નું ડાબીબાજુ નું લક્ષ કહે છે.

તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$ વડે દર્શાવાય છે.

- **વિધેયનું જમણી બાજુનું લક્ષ :**

વિધેય f એ કોઈ અંતરાલ $(a, a+h), (h>0)$ પર વ્યાખ્યાયીત છે. જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ ને સંગત $\delta > 0$ એવાં અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in (a, a+\delta)$ (જ્યાં $\delta < h$) તો વાસ્તવિક સંખ્યા ℓ ને વિધેય નું જમણી બાજુનું લક્ષ કહે છે. તેને સંકેતમાં તેને $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$

વિધેયના લક્ષના કાર્યનિયમો :

જો $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ હોય તો,

(1) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) + g(x)\}$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને

$\lim\limits_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell + m$ થાય.

(2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)g(x))$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને

$\lim\limits_{x \to a} (f(x)\,g(x)) = \left\{\lim\limits_{x \to a} f(x)\right\}\left\{\lim\limits_{x \to a} g(x)\right\} = \ell m$ થાય.

(3) જો $m \neq 0$ તો $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\ell}{m}$ થાય.

જો $f(x) = c$ (C = અચળ) તો અચળ વિધેય f માટે $\lim_{x \to a} f(x) = c$ or $\lim_{x \to a} c = c$ થાય.

પ્રમેય : (1) $\lim_{x \to a} x^n = a^n, n \in N$

પ્રમેય : (2) જો પ્રત્યેક $\ell = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots n$ માટે $\lim_{x \to a} f_i(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે તો

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right)^{x \to a} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to a} f_i(x)$$

સંમયે વિધેયનું લક્ષ

જો f(x) અને g(x) બહુપદી વિધેયો a ને સમાવતા પ્રદેશપર વ્યાખ્યાયિત હોય તો

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = h(a)$$

N.B. :

1. જો સમેય વિધેય $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ તેમજ f(x) અને g(x) બહુપદીનો સામાન્ય અવયવ(વો) $(x - a)^k$ $(k \in N)$ તો તે અવયવ અવગણતા બાકીના સંમેય બહુપદી વિધેયમાં $x = a$ મૂકતા લક્ષ મળે છે.

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^k p(x)}{(x-a)^m q(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} (x - a)^{k-m} \frac{p(x)}{q(x)}, k > m$$

$= 0,$; જો $k > m$

$= \frac{p(a)}{q(a)}$ જો $k = m$

= લક્ષ અસ્તિત્વ ન ધરાવે. જો $k < m$

2. $\lim_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n.\, a^{n-1}, \left(n \in N\left(x \neq a\right), x\, a \in R\right)$

N. B.: ઉપરોક્ત પ્રમાણિત સૂત્ર $n \in R$, તો $x \in R^+, a \in R^+, x \neq a$ માટે પણ સત્ય છે.

સંયોજીત વિધેયનું લક્ષ :

ધારોકે $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે, તથા $\lim_{x \to a} f(x) = b$ અને $\lim_{y \to b} g(y)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$ તો $\lim_{x \to a} g(f(x)) = \ell$ થાય.

જો અગત્યના પરિણામો :

1. જો $f(x) < g(x)$ (જ્યાં f તથા g સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોય) અને $\lim_{x \to a} f(x)$ અને $\lim_{x \to a} g(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તો $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ થાય.

(2) સેન્ડવીચ પ્રમેય :

જો $f_1(x) < f(x) < f_1(x), \forall x \in D_f = D_{f_1} = D_{f_2}$ અને જો $\lim_{x \to a} f_1(x)$ અને $\lim_{x \to a} f_2(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને $\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) = \ell$ તો $\lim_{x \to a} f(x)$ નું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવે અને તેપણ l જ થાય.

ત્રિકોણમિતિય વિધેયોના લક્ષ અંગેના અગત્યના પરિણામો :

(1) $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1, \ \forall x, 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$

(2) $|\sin x| \leq |x|, \forall x \in R$

(3) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1, \forall x \in R$

લક્ષ અંગેના પરિણામો :

(1) $\lim_{x \to a} |x| = 0$ તથા જો $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$ તો $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

(3) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

(4) $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ અને $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a.\ (a \in R)$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

★ $x \to \infty$ અને $x \to -\infty$ માટે વિધેયનું લક્ષ :

(1) $\lim_{x \to \infty} f(x)$: જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$, ને સંગત $M \in R$ નું અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી

$x > M,\ x \in R \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ તો $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ થાય.

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$, સંગત $M \in R$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $x < M,\ x \in R \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$,

તો $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ થાય.

અનંતનું લક્ષ :

(1) જો $x \to 0_+$ તો $a^{\frac{1}{x}} \to \infty$; $(a > 1)$

(2) જો $x \to 0_-$ તો $a^{\frac{1}{x}} \to 0$; $(a > 1)$

(3) જો $x \to 0_+$ તો $a^{\frac{1}{x}} \to 0$; $(0 < a < 1)$

(4) જો $x \to 0_-$ તો $a^{\frac{1}{x}} \to \infty$; $(0 < a < 1)$

પ્રમેય : જો $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ હોય તો અને તોજ પ્રત્યેક શ્રેણી $\{(a_n)\}$, $a_n \in D_f$, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ નું પ્રેરણ $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$ થાય.

અગત્યના લક્ષના સૂત્રો :

(1) $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$; $|r| < 1$

(2) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (જ્યાં $e =$ અસંમેય સંખ્યા $2 < e < 3$)

(3) $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log_e a \; ; a \in R^+ - \{1\}$

(4) $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

સાતત્ય : જો વિધેય f એ અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત હોય તેમજ $c \in (a, b)$ હોય તથા $\lim_{x \to c} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે f(c) ની બરાબર હોય તો વિધેય f એ x = c આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

જો વિધેય f એ વિભિન્ન (Isolated) બિંદુઓ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય તો તે પ્રત્યેક. બિંદુઓ આગળ સતત થાય. એટલેકે શાન્તગણ $\{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત છે તેમ કહેવાય.

[a, b] અંતરાલ પર વિધેયનું સાતત્ય :

જો વિધેય f એ [a, b] પર વ્યાખ્યાયિત હોય તો,

(1) f એ (a,b) ના દરેક બિંદુએ સતત હોય,

(2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

(3) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ તો વિધેય f એ [a, b] પર સતત છે તેમ કહેવાય.

N. B.:જો $f(x) = [x]$ અને $f(x) = \lceil x \rceil$ વિધેયો $\forall\, x \in R - z$ પર સતત હોય અને $\forall n \in z$ આગળ અસતત થાય.

પ્રમેય : જો f અને g વિધેયો $x = c, c \in (a, b)$ આગળ સતત હોય તો,

(1) f + g પણ x = c આગળ સતત થાય.

(2) kf એ x = c આગળ સતત થાય.

(3) f - g એ x = c આગળ સતત થાય.

(4) f x g એ x = c આગળ સતત થાય.

(5) $\frac{k}{g}$ એ x = c આગળ સતત થાય.(જ્યાં $g(c) \neq 0$)

(6) $\frac{f}{g}$ એ x = c આગળ સતત થાય. (જ્યાં $g(c) \neq 0$)

સાતત્ય અંગેના અગત્યના પરિણામો :

(1) સંમેય બહુપદી વિધેય તેના પ્રદેશગણ પર સતત છે.

$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = h(a).\ (q(a) \neq 0)$

(2) Sine અને Cosine વિધેયો R પર સતત છે.

(3) Tangent અને Secant વિધેયો $R - \left\{ \begin{matrix} (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ k \in z \end{matrix} \right\}$ પર સતત છે.

(4) Co-tangent અને Cosecant વિધેયો $R - \left\{ \begin{matrix} k\pi \\ k \in z \end{matrix} \right\}$ પર સતત છે.

સંયોજીત વિધેયનું સાતત્ય :

જો $f: (a, b) \to (c, d)$ અને $g: (c, d) \to (e, f)$ બે વિધેયો માટે gof વ્યાખ્યાયિત છે. જો f એ $x_1 \in (a, b)$ આગળ સતત હોય અને g એ $f(x_1) \in (c, d)$ આગળ સતત હોય તો gof એ $x_1 \in (a, b)$ આગળ સતત થાય.

$$\lim_{x \to x_1} gof(x) = \lim_{x \to x_1} g(f(x_1)) = g\left(\lim_{x \to x_1} f(x) = g(x_1)\right)$$

«&™ çkLf

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4\text{-}8x + 5x^2 - x^3}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} = ?$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) -3

(2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{4x + 3}}{x^4 - 81} = ?$

(a) $\frac{1}{24\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{72\sqrt{15}}$ (c) $\frac{1}{72\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{24\sqrt{15}}$

(3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{\pi \cot 2x - 4x \cot 2x} = ?$ ([x] = x)

(a) [-1.3] (b) $\|[-0.75]\|$ (c) [o. 75] (d) $\frac{[1.3]}{3}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x - \tan 2x}{x^3} = ?$

(a) 4 (b) -8 (c) -4 (d) 8

(5) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x \cdot \cos\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4}\cos x}{\pi + 4x} = ?$

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{35}{4}$ (c) $-\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{35}$

(6) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left\{2x \sin x \left((4k+1)\frac{\pi}{2} + \pi cosec\left((4K-1)\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left((4k-1)\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\right\}}{sec(2k\pi - x).cos\left((4k-1)\frac{\pi}{2}+x\right)} = ?$$

(a) $\frac{\pi}{2}\left(Sin^2\frac{\pi}{2} + Cos^2\frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\left|\tan^2\pi - Sec^2\pi\right|$

(c) $\frac{1}{2}\left(tan^2\pi + sec^2\pi\right)$ (d) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

(7) $\lim_{x \to 1} \{10 (1 - x^{10})^{-1} - 9 (1 - x^9)^{-1}\} = ?$

(a) 0.5 (b) 0.05 (c) 45 (d) -45

(8) $\lim_{x \to \infty} \frac{m \operatorname{Sin} x - n \operatorname{Cos} x}{x - \infty} = ?$ (જ્યાં $m \sin\alpha - n \cos\alpha = 0$, $m, n \in N$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$)

(a) $\sqrt{m^2+n^2}$ (b) $\sqrt{m^2-n^2}$

(c) $-\sqrt{m^2+n^2}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$

(9) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{365} - 365x + 364}{(x-1)^2} = ?$

(a) 66,430 (b) 64,340 (c) 66,630 (d) 64,430

(10) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+99x)^{100} - (1+100x)^{99}}{x^2} = ?$

(a) -4950 (b) 4950 (c) 9950 (d) -9900

(11) $\lim_{x \to \pi} \frac{25 - \sqrt{626 + Cosx}}{(\pi - x)^2} = ?$

(a) 0.1 (b) -0.02 (c) -0.01 (d) -0.1

(12) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^3} sin\left(\pi^2 + 2x\right) - \frac{3}{x^3} sin\left(\pi^2 + x\right) - \frac{1}{x^3} sin\left(\pi^2 + 3x\right) + \frac{1}{x^3} sin\left(\pi(1+x)\right) = ?$

(a) $Cos\pi^2$ (b) $-Cos\pi^2$ (c) $-\pi$ (d) π

(13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3}}{x^3} = ?$

(a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{1}{54}$ (c) $\frac{4}{27}$ (d) $\frac{5}{27}$

(14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) - 2\tan\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) + \tan\frac{\pi}{3}}{x} = ?$

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $-8\sqrt{3}$ (c) $-4\sqrt{3}$ (d) -8

(15) $\lim\limits_{x \to \pi} (x - [x-3] - [3-x] = ?$

(Where ∵ t t π,..: X Varies in the) $(\pi - 0.1,\ \pi + 0.1) - \{\pi\}$

(a) π (b) $-(\pi+1)$ (c) $\pi+1$ (d) $\pi-1$

(16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos\left(1 - \cos\left(1 - \cos\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)\right)\right)}{x^{16}} = ?$

(a) $\frac{1}{2^{16}}$ (b) $\frac{1}{2^{31}}$ (c) $\frac{1}{2^{15}}$ (d) $\frac{1}{2^{32}}$

(17) ò¦ $\frac{a}{2}$ yLk $\frac{b}{2}$ y¦ $lx^2 + mx + n = 0$ Lkk çk r¼Õk rçks nkÞ íkk

$\lim\limits_{x \to \frac{a}{2}} \dfrac{1 - \cos\left(\ell x^2 + mx + n\right)}{(2x - a)^2} = ?$ (ßÞk $l \neq 0$, a, b $\in$ R)

(a) $\dfrac{\ell^2}{8(a-b)^2}$ (b) $\dfrac{\ell^2}{32}(a^2 - b^2)$

(c) $\dfrac{\ell^2}{32}(a - b)^2$ (d) $\dfrac{\ell^2}{16}(a^2 - b^2)$

(18) જો શ્રેઢીનું k મું પદ $t_k = \dfrac{k}{1 + k^2 + k^4}$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે તો

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} t_k = ...$ is :

(a) 0 . 25 (b) 0 . 50 (c) 1 (d) શ્રેઢી લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

(19) $\lim_{h \to 0} \dfrac{h^{\frac{7}{6}} \left\{a^2 - (h-a)^2\right\}^{\frac{1}{3}}}{\left(2\sqrt{2ah - h^2} + 2\sqrt{2ha}\right)^3} = ?$

(a) $\dfrac{1}{128a^{\frac{4}{3}}}$ (b) $\dfrac{1}{128\sqrt{2}a^{\frac{5}{3}}}$

(c) $\dfrac{1}{128\sqrt[3]{2}a^{\frac{7}{6}}}$ (d) $\dfrac{1}{128\sqrt[6]{2}a^{\frac{7}{6}}}$

(20) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{16\sqrt{2} - (\text{Sim x} + \text{Cos x})^9}{1 - \text{Sim } 2\text{ x}} = ?$

(a) $9\sqrt{2}$ (b) $18\sqrt{2}$ (c) $36\sqrt{2}$ (d) $16\sqrt{2}$

(21) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,x}}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = ?$ (જ્યાં $a_i \in R^+ - \{1\}$ i = 1, 2, 3, ... n)

(a) $\left(\sum_{i=1}^{n} a\right)^3$ (b) $(a_1, a_2, a_3, ...a_n)^{\frac{1}{3}}$

(c) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{3}}$ (d) $(a_1, a_2, a_3, ...a_n)^3$

(22) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 2013}{x^2} \right)^{7x} = ?$

(a) e^7 (b) e^{14} (c) e^{21} (d) e^{49}

(23) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{100} (x+i)^n}{x^n + 10^n} \right) = ?$ $(n \in N - \{1\})$

(a) n (b) 100 (c) 100n (d) 10n

(24) $\lim_{x \to 0+} \frac{\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \tan^4 x + \text{........}\infty}{\pi x}$ wher o < 1*1 < $\frac{\pi}{4}$)

(a) $\frac{1}{\pi}$ (b) $\frac{1}{\pi^n}$ (c) π (d) 0

(25) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{108}(107x)}{\log\left(1 + x^{108}\right)} = ?$

(a) $\frac{107}{108}$ (b) $(107)^{108}$ (c) $(107)^{-108}$ (d) $-\frac{107}{108}$

(26) $\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{3}} - (1-2x)^{\frac{1}{4}}}{x + x^2} = ?$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{12}$

(27) $\lim_{n \to \infty} (0.2)^{\log_{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right)} = \text{.......}$

(a) 4 (b) $(0.2)^{\log_e 5}$ (c) $-\log_e (0.5)$ (d) $e\log_{(0.2)}{}^5$

(28) જો $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2(m-1)-(m+n)x-2013}{x+1} = 1$ તો

m = ... અને n = ...

(a) m = 1, n = o (b) m = 1, n = - 2

(c) m = 1, n = 1 (d) m = 1, n= - 1

(29) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{-m} - x^{m}}{x^{-m} - 2^{m}} & ; x \neq 0.5 \\ +0.0625 & \end{cases}$

જો f એ x=0.5 આગળ સતત હોય તો m=.........

(a) 0.5 (b) 2 (c) -2 (d) - 0.5

(30) જો $2 - \delta < x < 2 + \delta$, $x \in D_f \Rightarrow 12.99 < f(x) < 13.01$ જ્યાં f(x) = 5x+3, લક્ષ = 13 δ ની મહત્તમ કિંમત ....છે. (δ>o)

(a) 2×10^{-1} (b) 2×10^{-2} (c) 2×10^{-3} (d) 5×10^{-2}

(31) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^4}{n^5} = ?$

(a) 0.5 (b) 0.4 (c) 0.2 (d) 0.1

(32) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\left(\text{Sin } x^{o} + x \text{ Sin } x^{o}\right)}{\text{tun}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{o}} = ?$

(a) 2 (b) $(3)^0$ (c) 2^0 (d) 3^0

(33) $\lim_{y \to 0+} \dfrac{\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{y} + \sqrt{y} + \sqrt[4]{y^3}}$

(a) -1 (b) લક્ષનુ અસ્તિત્વ નથી.

(c) 1 (d) 0

(34) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\left\{\sum_{i=1}^{4} x^i\right\} - 30}{x^3 - 8} = ?$

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{49}{12}$ (d) $\frac{43}{12}$

(35) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1 - Cos2(x-1)}}{x-1} = ?$

(a) $\sqrt{2}$ (b) 1 (c) લક્ષનુ અસ્તિત્વ નથી. (d) $-\sqrt{2}$

(36) $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\text{Sin } 3\,[x]}{[x]} = ?$ (જ્યાં [ ] = મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય $x \in (\pi - 0.01, \pi + 0.01)$

(a) 3 (b) $\frac{Sin3}{9}$ (c) $\frac{Sin9}{3}$ (d) Sin9

(37) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan\left(7x^3 + 6x^2 - 5x\right)}{x} = ?$

(a) -7 (b) -6 (c) -5 (d) -8

(38) $\lim_{x \to 0} (\pi)^{e^x} (e)^{-\pi^x} = ?$

(a) $\frac{e}{\pi}$ (b) $\frac{\pi}{e}$ (c) 1 (d) લક્ષ નું અસ્તિત્વ નથી.

(39) $\lim_{x \to 1} \dfrac{Sin\left(n\left(\sqrt{x} - 1\right)\right)}{\left(\sqrt[4]{x} - 1\right)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(n \in R^+, x > 0)$

(a) $\frac{n}{2}$ (b) 2 n (c) n (d) $\frac{n}{4}$

(40) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5 \tan x + 55 \text{ Sin } x - 555\, x}{5 \tan x - 55 \text{ Sin } x + 555\, x} = ?$

(a) $\frac{101}{99}$ (b) $-\frac{99}{101}$ (c) $-\frac{101}{99}$ (d) $\frac{99}{101}$

(41) જો $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to m} \frac{m^3 - x^3}{x^2 - m^2}$ તો m = ...

(a) $-\frac{4}{3}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $-\frac{8}{3}$ (d) $-\frac{4}{3}$

(42) $\lim_{x \to 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x^i - 1)}{x - 1} = ?$

(a) n (b) $\frac{n(n-1)}{2}$ (c) $\frac{n(n+1)}{2}$ (d) $\frac{n+1}{2}$

(43) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cot x} - \sqrt[3]{\cot x}}{\operatorname{cosec} x^2 - 2} = ?$

(a) $-\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) 0

(44) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x) \cos x}{\sin x - \operatorname{cosec} x} = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. (d) -1

(45) $\lim_{\frac{1}{x} \to 0} \frac{(2 + 3x)^{40} (4 + 3x)^5}{(2 - 3x)^{45}} = ?$

(a) $\frac{40}{9}$ (b) - 35 (c) - 1 (d) $\frac{8}{9}$

(46) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{3} - 1} = ?$

(a) $\frac{-3}{2}$ (b) $\frac{-2}{3}$ (c) $\frac{-9}{4}$ (d) $\frac{-4}{9}$

(47) $\lim\limits_{\frac{1}{x} \to 0} x.\cos\left(\frac{\pi}{12x}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12x}\right) = ?$ (x > 0)

(a) $\frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{3}{\pi}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{12}{\pi}$

(48) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-1)^3\ (1-\cos 15x)}{(1-\cos 5x)} = ?$

(a) 3 (b) -9 (c) -3 (d) 9

(49) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x} = ?$

(a) 0.25 (b) 0.50 (c) 0.75 (d) 0.66

(50) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(2-3x)^{-5} - 2^{-5}}{x} = ?$

(a) $\frac{3}{32}$ (b) $\frac{10}{-64}$ (c) $\frac{15}{64}$ (d) $\frac{-32}{3}$

(51) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{5+x^5} - \sqrt{5-x^5}}{x^5} = ?$

(a) 5 (b) 25 (c) $\left(\sqrt{5}\right)^{-1}$ (d) $\sqrt[4]{5}$

(52) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{\text{Sin}\,x - \text{Sin}\,\frac{\pi}{8}}{8x-\pi} = ?$

(a) $\frac{1}{16}\left(2+\sqrt{2}\right)$ (b) $\frac{1}{16}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{16}\left(2-\sqrt{2}\right)$ (d) $\frac{1}{16}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

(53) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{2x+a} - \sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{8a+x} - \sqrt[3]{9x}} = ?$

(a) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{3}$ (b) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{6}$ (c) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{9}$ (d) $\frac{1}{8}\sqrt{3}$

(54) $\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} (\sin 4x)^{\tan^2 4x} = ...$

(a) $e^{1/4}$ (b) $e^{-1/2}$ (c) $e^{-1/4}$ (d) $e^{1/2}$

(55) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8h^3 + h^4}} - \frac{1}{2h} \right) = ?$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{68}$ (c) $-\frac{1}{12}$ (d) $-\frac{1}{48}$

(56) $\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{1-x} - 3} = ?$

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $+\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{8}$

(57) $\lim_{x \to 2} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}} = ?$

(a) -12 (b) 8 (c) -8 (d) 6

(58) $\lim_{\theta \to 0} 2 \left(\frac{\sqrt{3} \text{ Sin}\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) - \text{Cos}\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}{\sqrt{3}\, \theta \left(\sqrt{3} \text{ Cos}\theta - \text{Sin}\theta\right)} \right) = ?$

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$

(59) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + 5x)^{\frac{3}{n}} - 1}{x} = ?$ જ્યાં $n \in R^+$

(a) $\frac{5}{n}$ (b) $\frac{10}{n}$ (c) $\frac{15}{n}$ (d) $\frac{1}{5n}$

(60) $\lim_{x \to \pi} \frac{1 + \text{Cos}\left((2m+1)x\right)}{1 + \text{Cos}\left((2n-1)x\right)} = ?$ (જ્યાં m, n $\in$ N-{1})

(a) $\left(\frac{2m+1}{2n-1}\right)^4$ (b) $\left(\frac{2m+1}{2n-1}\right)^2$ (c) $\left(\frac{2n-1}{2m+1}\right)^2$ (d) $\left(\frac{2n-1}{2m+1}\right)^4$

(61) $\lim_{h \to 5} \frac{(2h+5)^{\frac{5}{2}} - (15)^{\frac{5}{2}}}{h^3 - 125} = ?$

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{125}$ (c) $\sqrt{15}$ (d) $(15)^{\frac{5}{2}}$

(62) $\lim_{x \to \frac{-\pi}{4}} \frac{\text{Sn}3x - \text{Cos}3x}{4x + \pi} = ?$

(a) $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (c) $-\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (d) $+\frac{3}{2\sqrt{2}}$

(63) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{17 + Cosx} - 4}{(\pi - x)^2} = ?$

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{16}$ (c) $\frac{1}{24}$ (d) $\frac{1}{64}$

(64) $\lim_{x \to 1} \frac{\left(\sum_{i=1}^{3} (x+i)^2\right) - 29}{x-1} = ?$

(a) 9 (b) 12 (c) 18 (d) 30

(65) $\lim_{x \to 1} \frac{\left(\sum_{i=1}^{3} (x+i)^i\right) - 75}{x-1} = ?$

(a) 75 (b) 65 (c) 55 (d) 45

(66) જો $f(x) = \dfrac{\left|x^3 - 3x^2 + 2x\right|}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ હોય તો નીચેનામાંથી કયા ગણના ઘટકો માટે

$\lim\limits_{x \to a}$ f(x) નું અસ્તિત્વ નથી.

(a) {o} (b) {-1, 0, 1} (c) {0, 1, 2} (d) {-2, -1, 0, 1, 2}

(67) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x + \frac{\pi}{6}\right)^2 \text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi^2}{72}}{x} = ?$

(a) $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi\left(\pi + 4\sqrt{3}\right)}{72}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi\left(\pi - 4\sqrt{3}\right)}{72}$

(c) $\dfrac{\pi\left(\pi + 4\sqrt{3}\right)}{72}$ (d) $\dfrac{\pi\left(\pi - 4\sqrt{3}\right)}{24\sqrt{3}}$

(68) જો $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Sin((n+1)x) + Sinx}{x} = \dfrac{1}{2}$ તો n ની કિંમત ......છે.

(a) -2.5 (b) -0.5 (c) -1.5 (d) -1

(69) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + 3h\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) + 3Sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\frac{-1}{\sqrt{2}}}{h^3} = ?$

(a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(70) $\lim\limits_{x \to 1} \left\{m.5^{m-1}\left(5^m - (4+x)^m\right)^{-1} - n.5^{n-1}\left(5^m - (4+x)^m\right)^{-1}\right\} = ?$ (m, n∈N-{1}

(a) $\dfrac{m+n}{10}$ (b) $\dfrac{n-m}{10}$ (c) $\dfrac{m-n}{10}$ (d) $\dfrac{m^2-n^2}{10}$

(71) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^9 - 3x^8 + x^6 - 9x^4 - 4x^2 - 16x + 84}{x^5 - 3x^4 - 4x + 12} = ?$

(a) $11+\sqrt{2}$ (b) $11-\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}-11$ (d) $11+2\sqrt{2}$

(72) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-1} = ?$

(a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

(73) $\lim_{h \to \sqrt{10}} \dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{7-2h}}{h^2-10} = ?$

(a) $\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{6\sqrt{10}}$ (c) $\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{6\sqrt{10}}$ (d) $\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{10}}$

(74) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-\sqrt{3}\cot x}{2\cos x-1} = ?$

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

(75) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\left(x^{2n}+1\right)^{\frac{1}{2n}}-\left(x^{n}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{x^n} = ?$

(a) $_n$-1 (b) $_n$(0.5) (c) $_n$(-0.5) (d) $_n$1

(76) જો $f(x) = \begin{cases} \cos x - \dfrac{m\cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ -3, & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ એ x = ૦ આગળ સતત હોય તો k= .....

(a) K = 3 (b) K = 6 (c) -3 (d) 6

(77) જો $f(x) = \begin{cases} n\left(1-x^2\right), & x > 3 \\ 3x+1, & x \leq 3 \end{cases}$ એ x = 3 આગળ સતત હોય તો n = ...

(a) 2.25 (b) 1.25 (c) -2.25 (d) -1.25

(78) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{k x} & , x < 0 \\ k & , x = 0 \\ \dfrac{\tan k x}{k^2 x} & , x > 0 \end{cases}$ જો x = 0 આગળ સતત હોય તો k= .....

(a) K = 1 (b) K = 0 (c) K = $\pm$ 1 (d) K = $\pm$ 2

(79) જો $f(x) = \begin{cases} m + 3nx & , x > 1 \\ 11 & , x = 1 \\ 5nx - 2m & , x < 1 \end{cases}$ એ x = 1 આગળ સતત હોય તો m= ..... અને n= .....

(a) m = 2, n = -3 (b) m = -2, n = 3

(c) m = 2, n = 3 (d) m = 3, n = 3

(80) જો f (x) = $f(x) = \dfrac{2-(256+5x)^{\frac{1}{8}}}{(5x+32)^{1/5}-2}$ (x $\neq$ 0), એ પ્રદેશના દરેક ઘટક આગળ સતત હોય તો f(0) ની કિંમત ..... છે.

(a) $\dfrac{2}{7}$ (b) $-\dfrac{7}{32}$ (c) $\dfrac{7}{64}$ (d) $-\dfrac{7}{64}$

(81) જો $f(x) = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\text{Cot } 2x}$ $x \neq \dfrac{\pi}{4}$ એ $x = \dfrac{\pi}{4}$ આગળ સતત હોય તો $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ની કિંમત ..... છે.

(a) 0.50 (b) 0.25 (c) 0.75 (d) 1.25

(82) $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{x^2}\right)\sin 2x^2 & , x < 0 \\ \dfrac{x^2+2x+c}{1-3x^2} & , x \in [0,\infty) - \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\} \\ 0 & , x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ એ x = 0 આગળ સતત હોય તો c ની કિંમત ..... છે.

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

(83) જો $f(x) = \frac{x - |x|}{x}$, $x \neq c$ અને $f(0) = 2$, તો f .....

(a) એક પણ સંખ્યા આગળ સતત નથી

(b) બધીજ સંખ્યાઓ આગળ સતત છે.

(c) $R - \{1\}$ પર સતત છે.

(d) $R - \{0\}$ પર સતત છે.

(84) k ની કઈ ધન કિંમત માટે વિધેય $f(x) = \frac{\left(e^x - 1\right)^4}{\operatorname{Sin}\left(\frac{x^2}{k^2}\right) \log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)}$,

$x \neq o$, $f(o) = 8$ $x = o$ આગળ સતત થાય ?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 3

(85) જો = $\begin{cases} x + a\sqrt{2}\ \operatorname{Sin} x & , \pi \leq x < \frac{5\pi}{4} \\ 2x \operatorname{Cot} x + b & , \frac{5\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ a \operatorname{Cos} 2x + b \operatorname{Sin} x & , \frac{3\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

$[\pi, 2\pi]$, પર સતત હોય તો a = ... અને b = ...

(a) $a = \frac{5\pi}{2}$, $b = \frac{5\pi}{4}$ (b) $a = -\frac{5\pi}{2}$, $b = -\frac{5\pi}{4}$

(c) $a = -\frac{5\pi}{2}$, $b = \frac{5\pi}{4}$ (d) $a = -\frac{5\pi}{4}$, $b = \frac{5\pi}{2}$

(86) જો $f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x}} - 5^{-\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}} + 5^{-\frac{1}{x}}}$, $x \neq o$ અને $\lim_{x \to 0+} f(x) = a$, $\lim_{x \to 0-} f(x) = b$

તો a અને b ની કિંમતો ..... છે.

(a) a = 1, b = -1 (b) a = 0, b = 1

(c) a = -1, b = 1 (d) a = 1, b = 0

(87) જો $f(x) = \begin{cases} 1 + kx & , x \le 3 \\ 1 - kx^2 & , x > 3 \end{cases}$ એ x=3 આગળ સતત હોય તો .....

(a) k = o, k = 1 (b) k = o

(c) k = 1, k = -1 (d) $k \in R - \{o, \pm 1\}$

(88) p ની કઈ કિંમત માટે વિધેય $f(x) = \dfrac{\left(4^x - 1\right)^3}{\text{Son}\left(\dfrac{x}{p}\right) \log\left(1 + \left(\dfrac{x^2}{3}\right)\right)}, x \ne 0$

$f(x) = 12 (\log 4)^3$, x = 0 એ x = 0 આગળ સતત થાય

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(89) m અને n ની કઈ કિંમતો માટે $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{Sin}\,(m+1)\,x + \text{Sin}\,x}{x} & , x < 0 \\ n & , x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} & , x > 0 \end{cases}$

R પર સતત થાય ? $\forall x \in R$?

(a) $m = -\frac{3}{2}, n = \frac{1}{2}$ (b) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{2}$

(c) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{3}{2}$ (d) $m = \frac{5}{2}, n = \frac{1}{2}$

(90) $\lim\limits_{n \to \infty} \left((\log 2012)^n + (\log 2013)^n\right)^{\frac{1}{n}} = ?$

(a) $\dfrac{\log 2012}{\log 2013}$ (b) log 2012 (c) $\dfrac{\log 2013}{\log 2012}$ (d) log 2013

(91) જો $f(x) = \dfrac{\sqrt{a^2 - ax + x^2} - \sqrt{a^2 + ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-z}}; x \neq 0$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો $f(0) = ...$

(a) $a\sqrt{a}$ (b) $\sqrt{a}$ (c) $-\sqrt{a}$ (d) $-a\sqrt{a}$

(92) જો $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ Cos } \dfrac{1}{x} + 9x^2 & ; x \neq 0 \\ K & ; x = 0 \end{cases}$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો $k = ...$

(a) 9 (b) 6 (c) 0 (d) -9

(93) જો $f(x) = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)}{\text{Cot } 3x}$; $x \neq \dfrac{\pi}{6}$, એ $x = \dfrac{\pi}{6}$ આગળ સતત હોય તો $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = ...$

(a) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ (d) $\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$

(94) જો $y = \dfrac{1}{t^2 + t - 2}$ અને $t = \dfrac{1}{x-1}$ $x \in .....$ માટે y અસતત છે.

(a) $\{1,2\}$ (b) $\{1, -2\}$ (c) $\{1, \dfrac{1}{2}, 2\}$ (d) $Z - \{1, \dfrac{1}{2}, 2\}$

(95) Let f be a non zero continuous funotion satistying f(x+y) = f(x) f(y), $\forall x, y \in R$, If f(z) =9 then f(30 = ?

(a) 1 (b) 27 (c) 9 (d) 6

(96) જો $f(x) = \begin{cases} (\text{Sin } 2x)^{\tan^2 2x} & ; x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ K & ; x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ એ $x \neq \dfrac{\pi}{4}$ આગળ સતત હોય તો $k = ...$

(a) $e^{\frac{1}{2}}$ (b) $e^{-\frac{1}{2}}$ (c) e^2 (d) e^{-2}

(97) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 2}\right)^x = ?$

(a) e^{-4} (b) e^2 (c) e^4 (d) e^{-2}

(98) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - e^{x} - x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ \dfrac{3}{2} & ; x = 0 \end{cases}$ એ સતત વિધેય હોય તો a =.......

(a) 1 (b) -1 (c) 4 (d) 2

(99) જો f(x) = ; x $\dfrac{\log\left(1+x+x^2\right) + \log\left(1-x+x^2\right)}{\sec x - \cos x}$; $x \neq 0$

એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો $f(0) =$......

(a) 2 (b) -3 (c) 1 (d) -2

સૂચનો

આપેલ વાસ્તવિક બહુપદી f^n નું લક્ષ શોધવા માટે

$$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^k p(x)}{(x-a)^m q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}\quad (K=m)$$

3. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{4x+3}}{x^4-81}$$

$$=\frac{\left\{\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+x+3)^{1/2}-(15)^{1/2}}{(x^3+x+3)-15}\right\}\times\ \lim_{x\to 3}(x+4)-\left\{\lim_{x\to 3}\frac{(4x+3)^{1/2}-(15)^{1/2}}{(4x+3)-15}\right\}\times 4}{\left\{\lim_{x\to 3}\ \frac{x^4-3^4}{x-3}\right\}}$$

$$=\frac{\left(1/2\right)\cdot(15)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3+4)-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(15)^{\frac{-1}{2}}}{4\cdot 3^3}$$

$$=\frac{1}{72\sqrt{15}}$$

3. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{1}{\pi\cot 2x-4x\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{1}{2\cot 2x\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$$

$\lim_{\theta\to 0}\ \frac{\tan\theta}{\theta}=1$ ના ઉપયોગથી

4. $$\lim_{x\to 0}\ \frac{\sin 2x-\tan 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{\tan 2x(\cos 2x-1)}{x^3}$$

$$=-\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\right\}\times 4\times\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}^2$$

5. $$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\ \frac{\sin x\cdot\cos\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{7\pi}{4}\cos x}{\pi+4x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x}{4\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

$$= - \lim_{\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{4\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

Ans. (c)

6. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(2x \sin\left(4k+1\right)\frac{\pi}{2} + x)\right) + \pi \operatorname{cosec}\left(\left(4K-1\right)\frac{\pi}{2} + x\right)\sin\left(\left(4k-1\right)\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sec\left(2k\pi - x\right) \cdot \cos\left(\left(4k-1\right)\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x\cos + \pi\left(-\sec x\right)\cdot\left(-\sin x\right)}{\sec x \cdot \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 \times \cos^2 x}{\sin x} + \frac{\pi \sec x \cdot \sin x}{\text{sex} \cdot \sin x}$$

= Ans (B)

7. $$\lim_{x \to 1} \left\{10\left(1 - x^{10}\right)^{-1} - 9\left(1 - x^{9}\right)^{-1}\right\}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{10}{1 - x^{10}} - \frac{9}{1 - x^{9}}\right) \qquad \left(\because \lim_{x \to 1} \frac{m}{1 - x^m} - \frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} = \frac{m - n}{2}, (m, n \in N)\right)$$

= Ans (A)

8. $$\lim_{x \to \alpha} \frac{m \sin x - n \cos x}{x - \alpha}$$

$$= m\left(\lim_{x \to \alpha} \frac{m \sin x - \tan x . \cos x}{x - \alpha}\right), \qquad \because \tan \alpha = \frac{n}{m}$$

$$= -\sqrt{m^2 + n^2} \quad (\because ?)$$

Ans (C)

9. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^{369} - 365x + 364}{\left(x - 1\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^{365} - 1 - 365x + 365}{\left(x - 1\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{364}+x^{363}+....+1\right)-365(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{364}+x^{363}+....+1\right)-(1+1+1+...365\,\text{times})}{(x-1)}$$

$= 66,463$

$=$ Ans (A)

10. $$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+99x)^{100}-(1+100x)^{99}}{x^2}$$

$= 4950$

$=$ Ans (B)

(દ્વિપદી પ્રમેયની મદદથી)

11. $$=\lim_{x\to \pi}\frac{25-\sqrt{626+\cos x}}{\left(\pi-x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to \pi}\frac{25-\sqrt{625-626-\cos x}}{\left(\pi-x^2\right)\left(25+\sqrt{626+\pi}\right)}$$

$=$ Ans . (C)

12. $$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3}\text{Sin}\left(\pi^2+2x\right)-\frac{3}{x^3}\text{Sin}\left(\pi^2+x\right)\frac{1}{x^3}\text{Sin}\left(\pi^2+3x\right)+\frac{1}{x^3}\text{Sin}\left(\pi(1+\pi)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[3\left(\text{Sin}\left(\pi^2+2x\right)-\text{Sin}\left(\pi^2+x\right)\right)-\left(\text{Sin}\left(\pi^2+3x\right)\right)-\text{Sin}\left(\pi^2+\pi\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[3\left(2\text{Cos}...\text{Sin}....\right)-\left(2\text{Cos}...\text{Sin}...\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\text{Cos}...\left[3\text{Sin}...-\text{Sin}...\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}2\text{Cos}...\left[\left(3\text{Sin}...\right)-\left(\sin 3\theta\text{ નું સૂત્ર નો ઉપયોગ}\right)\right]$$

$=$ Ans (A)

13. $$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{3}-\text{Sin}\frac{x}{3}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{3}-\left(1-\cos\frac{x}{3}\right)}{x^3}$$

$=$ Ans (B)

14. $= \lim_{x \to 0} \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)-2\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+\tan\dfrac{\pi}{3}}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}+\tan 2x}{1-\sqrt{3}\tan 2x}\right)-2\left(\dfrac{\sqrt{3}+\tan 2x}{1-\sqrt{3}\tan 2x}\right)+\sqrt{3}}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{-8\tan 2x}{2x} \times \left(\dfrac{1+\sqrt{3}\ \tan 2x}{1-\sqrt{3}\tan 2x}\right)$

= - 8 (Ans D)

15. $= \lim_{x \to \pi} (x-[x-3]-[3-x]) = ?$

$= x \to \pi \Rightarrow\ x \to \pi^+,\ x \to \pi^-$

$\Rightarrow\ x > \pi > 3, 3 < x < \pi\ (\therefore x \in ?)$

$\Rightarrow\ 1 > x-3 > 0,\ x < x-3 < 1$

$\alpha - 1 < 3 - x < 0\ \alpha - 1 < 3 - x < 0$

$\Rightarrow [x-3] = 0 \text{ and } [3-x] = -1$

$= \lim_{x \to \pi} (\pi - 0 - (-1))$

$= \pi + 1$ Ans (C)

16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos)\left(1-\cos\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)\right)}{x^{16}}$

$1 - \text{C os } 2\theta = 2\text{Sin}^2\theta$

$1 - \text{Cos}\dfrac{x}{2} = 2\,\text{Sin}\dfrac{x}{4}$

$1 - \text{Cos}\dfrac{x}{4} = 2\,\text{Sin}\dfrac{x}{8}$

$1 - \text{Cos}\dfrac{x}{8} = 2\,\text{Sin}\dfrac{x}{16}$

= Ans (B) (?)

17. $\lim_{x \to \frac{a}{2}} \dfrac{1-\cos(lx+mx)}{(2x-a)^2}$

$$\lim_{x\to\frac{a}{2}}\frac{2Sin^2\left(\frac{\ell x^2+mx+n}{2}\right)}{4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2} \qquad \text{(why?)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{a}{2}}\frac{\ell^2}{2}\times\frac{1}{4}\times\left\{\frac{Sin\left(\frac{\ell\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{2}\right)}{4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\right\}^2\times\lim_{x\to\frac{a}{2}}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\ell^2}{8}\times(1)^2\times\frac{1}{4}(a-b)^2$$

$$=\frac{\ell^2}{32}(a-b)^2$$

$=$ Ans (C)

18. $$t_k=\frac{k}{k^4+k^2+1}=\frac{k}{\left(k^2+1\right)^2-k^2}\ =\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right]$$

હવે $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_k$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_k\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+....+\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n^2+n+1}\right]$$

$=$ Ans (B)

19. $$\lim_{h\to\infty}\frac{h^{\frac{7}{6}}\sqrt{2ah-h^2}}{8.h^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{2a-h}+\sqrt{2a}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{h\to\infty}\frac{h^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}\times\frac{\left(\sqrt[3]{2a-h}\right)}{\left(\sqrt{2a-h}+\sqrt{2a}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{(2a)^{\frac{1}{3}}}{\left(2\sqrt{2a}\right)^{3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}.a^{\frac{1}{3}}}{64.2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}}=\text{Ans . (D)}$$

20. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{16\sqrt{2}-(Sinx+Cosx)^{9}}{1-Sin2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2^{\frac{9}{2}}-\left\{(8mx+Cosx)^{2}\right\}^{\frac{9}{2}}}{2-(1+Sin2x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1+Sin2x)^{\frac{9}{2}}-2^{\frac{9}{2}}}{(1+Sin2x)-2}$$

$=\text{Ans (C)}$

21. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{i-1}^{n}a_i^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\ldots+\left(a_n^x-1\right)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\left(\frac{n}{1+\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\ldots+\left(a_n^x-1\right)}\right)\times\frac{1}{n}\left(\frac{\left(a_1^x-1\right)}{x}+\frac{\left(a_1^x-1\right)}{x}\frac{\tan^x-11}{x}\right)$$

$$=e^{\frac{1}{n}}\{\log a_1+\log a_2+\ldots+\log a_n\}\qquad\left(\therefore\lim_{\infty\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\right)$$

$$=e^{\log_e(a_1a_2a_3\ldots.a_n)^{\frac{1}{n}}}$$

$=\text{Ans (B)}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(x^2+7x+2013\right)^{7x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\ 7x+\dfrac{2013}{x}\right)^{\frac{x}{\left(7+\frac{2013}{x}\right)}\times\frac{7+\left(\frac{2013}{x}\right)}{1}\times 7}}{x}$$

$= e^{\left(\frac{7+0}{1}\right)\times 7}$ (why?)

$= e^{49}$

$=$ Ans D

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{100}\left(x+i\right)^n\right)}{x^n+10^n}$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\left\{(x+1)^n+(x+2)^n+\ldots+(x+100)^n\right\}}{x^n+10^n}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\left\{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n+\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^n+\ldots+\left(1+\dfrac{100}{x}\right)^n\right\}}{1+10^n\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}$$

$$=\frac{\left\{\left(1+0\right)^n+\left(1+0\right)^n+\ldots+\left(1+0\right)^n\right\}}{1+0}$$

$= 100 =$ Ans (B)

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\tan\alpha+\tan^2 x+\ldots\infty}{\pi x}\left(\therefore 5_n=\dfrac{aC_1-r^n}{1-r}\right), |r|<1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\tan x}{1-\tan x}\right)\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}$

$=\dfrac{1}{\pi}=$ Ans (A)

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{108}(107x)}{\log\left(1+x^{108}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan(107x)}{(107x)}\right\}^{108}\times\frac{(107x)^{108}}{\log\left(1+x^{108}\right)}$$

$$=(107)^{108}\times\frac{1}{\log_e e}$$

$$=(107)^{108}$$

= Ans (B)

26. $$\lim_{n\to\infty}=\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-(1+2x)^{\frac{1}{4}}}{1+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2}-\dfrac{(1-2x)^{\frac{1}{4}}-1(-2x)}{(-2x)}}{x+x^2}$$

$$\text{Ans}=\frac{1}{2}$$

27. $$\lim_{x\to\infty}(0.2)\log_{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)\log_{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\infty\right\}$$

અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢીનું સરવાળાનું સૂત્ર

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}1r_1<1$$

Ans . (A)

28. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(m-1)}{x+1}-\frac{(m+n)x}{x+1}-\frac{2013}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(m-1)}{1+\dfrac{1}{x}}-\frac{(m+n)x}{1+\dfrac{1}{x}}-\frac{2013}{(x+1)}$$

અહીં લક્ષ અસ્તિત્ત્વ ધરાવે છે અને તે 1 છે.

$$\therefore m-1=0\Rightarrow m=1$$

$$-\frac{(m+n)}{1+o}=1\left(\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\right)$$

$\therefore m=1, n=-2 \Rightarrow n=-2$

29. અહીં f સતત છે.

at x = 0.5 = $\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-0.0625$

$\therefore \lim_{x\to 0.5} \frac{2^{-m}-x^{m}}{x^{-m}-2^{m}}=-0.0625$

$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^{m}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m}}{x^{-m}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-m}}=-0.0625$

$\therefore (0.5)^{2m}=\frac{5^4}{10^4}=(0.5)^4$

$\therefore m=2$ Ans (B)

30. f (x) = 5x + 3 and $2-\delta<x<2+\delta, x\in f \Rightarrow 12.99 \Rightarrow< f(x)<13. \& l=13$

12.99 < f (x) < 13.01

$\Rightarrow 13-0.01<5x+3<13+0.01$

$\Rightarrow 10-0.01<5x<10+0.01$

$\Rightarrow 2-0.02<x<2+0.002$

$2-\delta<x<2+\delta$ ની સાથે સરખાવતાં,

$\delta=0.002=2\times10^{-3}$ Ans (C)

31. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^4}{n^5}$

$=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{30} \frac{(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{n^5}$

$=\frac{1}{5}=0.2$ = Ans (C)

32. $\lim_{x\to 0} \frac{\left(Sinx^\circ + xSinx^\circ\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^\circ}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sin\frac{\pi x}{180}+xSin\frac{\pi x}{180}}{\tan\left(\frac{\pi x}{360}\right)}$$

$=$ Ans (A)

33. $\lim_{y\to 0}+\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{y}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{y}^3}$

$= 1 =$ Ans (C)

34. $\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^1+x^2+x^3+x^4\right)-\left(2^1+2^2+2^3+2^4\right)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}$

35. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-Cos(x-1)}}{x-1}$

36. $\lim_{x\to \pi}\frac{Sin[x]}{[x]}$

$x\to\pi^+$

$\to x>\pi\geq 3.14$ $\qquad$ $x\to\pi^-$

$\Rightarrow [x]=3$ $\qquad$ $\Rightarrow 3<x<\pi$

$\Rightarrow [x]=3$

37. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left\{\left(7x^3+6x-5\right)\right\}}{x(7x^2+6x-5)}\times\lim_{x\to 0}(7x^2+6x-5)$

$=-5$

Ans . (C)

38. $\lim_{x\to 0}(\pi)^{e^x}(e)^{-\pi^x}$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}(\pi)e^x}{\lim_{x\to 0}(e)^{\pi x}}$$

Ans (B)

39. $=\lim_{x\to I}\frac{Sin\left(\left(n\sqrt{x}-1\right)\right)}{n\left(\sqrt{x}-1\right)}\times\lim_{x\to 1}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\times n$

$= 2n =$ Ans (B)

40. $=\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x+55 Sinx-555x}{5Sinx-55\tan x+555x}$

$=$ Ans (B)

41. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1^4}{x-1}=-\lim_{x\to m}\frac{x^3-m^3}{x^2-m^2}$

m $=$ Ans (C)

42. $\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x^i-1)}{x-1}$

$=\left\{\lim_{x\to 1}\frac{x^1-1^1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1}+...+\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1^n}{x-1}\right\}$

$=\frac{n}{2}(n+1)$ $=$ Ans (c)

43. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cot x}-\sqrt[3]{\cot x}}{Co\sec^2 x-2}=\frac{1}{12}$ $=$ Ans (C)

cot x = t^6 લેતાં,

$x\to\frac{\pi}{4}\Rightarrow t\to 1$

44. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{Sin(Cosx).Cosx}{Sinx-Co\sec x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{Sin(Cosx).Cosx.Sinx}{-Cos^2 x}$

$=$ Ans (D)

45. $=\lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{(2+3x)^{40}.(4+3x)^5}{(2-3x)^{45}}$

As x > 0 અને $\frac{1}{x}\to 0$

$\Rightarrow x\to\infty$

$=\frac{3^{45}}{-3^{45}}=-1$, Ans (C)

46. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-Cos\dfrac{x}{2}}{Cos\dfrac{x}{3}-1}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2Sin^2\dfrac{x}{4}}{-2Sin^2\dfrac{x}{6}}$

$=$ Ans (C)

47. $\lim_{\frac{1}{x}\to 0^+} xCos\left(\dfrac{\pi}{12x}\right)Sin\left(\dfrac{\pi}{12x}\right)$

As $\dfrac{1}{x}\to 0^+ \Rightarrow \infty$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{Cos\left(\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\}\times\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{Sin\left(\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{1}{x}\right)}\times\frac{\pi}{12}\right.$$

$=\dfrac{\pi}{12}$ Ans . (A)

48. $1-Cos\,x=2Sin^2\dfrac{x}{2}$ સૂત્ર વાપરો.

Ans (B)

49. અવયવ પાડો.

Ans (C)

50. $\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{(2-3x)^{-5}-2^{-5}}{(2-3x)-2}\right\}(-3)$

Ans (C)

51. અનુબધ્ધ કરણી લો.

Ans (C)

52. $=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}} \dfrac{Sinx-Sin\dfrac{\pi}{8}}{8x-\pi}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}} \frac{2Cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right).Sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{18}\right)}{16\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\right)}$$

$$=\frac{1}{8}Cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$=$ Ans (D)

53. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{2x+a}-\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{8a+x}-\sqrt[3]{9x}}$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{3^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{2}{3}}}$$

$=$ Ans (C)

54. $\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(Sin4x\right)^{\tan^2 4x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(1-Cos^2 4x\right)\frac{Sec^2 4x-1}{2}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(1+\left(-Cos^2 4x\right)\right)^{\frac{-1}{\cos^2 4x}}\right\}^{\frac{-1}{2}}\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(1+\left(-Cos^2 4x\right)\right)\right\}^{\frac{-1}{2}}$$

$= e^{-\frac{1}{2}} =$ Ans (B)

55. $=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(8+h)^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(8)^{\frac{1}{3}}}\right\}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ \frac{(8+h)^{-\frac{1}{3}}-8^{\frac{-1}{3}}}{(8+h)-8}$$

$$=\frac{-1}{3}(8)^{\frac{-4}{3}}$$

$=-\frac{1}{48}$ Ans (D)

56. $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{1-x}-3}$

$$=\left\{\frac{\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-(-8)^{\frac{1}{3}}}{x-(-8)}}{\lim\limits_{(1-x)\to 9}\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}}{(1-x)-9}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{-1}{2}\ \text{Ans (B)}$$

57. $$\lim_{x\to 2}\frac{2^{x}+2^{3-x}-6}{2^{\frac{-x}{2}}-2^{1-x}}$$

$$=2\left\{\frac{\lim\limits_{(2h+5)\to 15}\dfrac{(2h+5)^{\frac{5}{2}}-(15)^{\frac{5}{2}}}{(2h+5)-15}}{\left\{\lim\limits_{h\to 5}\dfrac{h^{3}-5^{3}}{h-5}\right\}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2^{x})^{2}-6.2^{x}+8}{2^{\frac{-x}{2}}-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{l^{2}-6l+8}{\sqrt{t}-2}\qquad (2^{x}=t)$$

$$=8\ \text{Ans (B)}$$

58. $$\lim_{\theta\to 0}2\frac{\sqrt{3}\,Sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)-Cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sqrt{3}\theta\left(\sqrt{3}Cos\theta-\dfrac{1}{2}Sin\theta\right)}$$

$$=\frac{4(1)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-0\right)}$$

$$=\frac{4}{3}=\text{Ans (A)}$$

59. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{\frac{3}{n}}-1}{x}$$

$$=5\lim_{(1+5x)\to 1}\frac{(1+5x)^{\frac{3}{n}}-1^{\frac{3}{n}}}{(1+5x)-1}$$

$$==5\left(\frac{3}{n}\right)(1)^{\frac{3}{n}-1}$$

$=\frac{15}{n} = \text{Ans (C)}$

60. $=\lim_{x\to\pi}\frac{Sin^2(2m+1)x}{Sin^2(2n-1)x}\times\frac{1-\cos((2n-1)x)}{1-\cos((2m+1)x)}$

$=\left(\frac{2m+1}{2n-1}\right)^2 = \text{Ans (B)}$

61. $\lim_{h\to 5}\frac{(2h+5)^{\frac{5}{2}}-(15)^{\frac{5}{2}}}{h^3-5^3}$

$=\frac{n\left(\frac{m}{2}\right)-m\left(\frac{n}{2}\right)}{mn}.5^{m+n-3-n+2}=\frac{m-n}{10}$

$=\frac{1}{15}(15)^{\frac{3}{2}}$

$=\sqrt{15} = \text{Ans (C)}$

62. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{Sin3x-Cos3x}{4x+\pi}$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{(38\sin x-4\sin^3 x)-(4C\text{os}^3 x-3Cosx)}{4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

Ans . (A)

63 $\lim_{x\to\pi}\frac{(17+\cos x)^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{2}}}{(\pi-x)^2}$

$\lim_{x\to\pi}\frac{(17+\cos x-16)}{(\pi-x)^2}\times\frac{1}{(17+\cos x)^{1/2}+16^{1/2}}$

$\left\{\lim_{\pi-x\to 0}\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)}\right\}^2\times\frac{1}{(1-(-1))\left((17-1)^{1/2}+4\right)}$

$=(1)\times\frac{1}{2\times 8}$

$=\frac{1}{16} = \text{Ans. (B)}$

64. $\lim_{x\to1}\frac{(x+1)^2-2^2}{(x+1)-2}+\lim_{x\to1}\frac{(x+2)^2-3^2}{(x+2)-3}+\frac{(x+3)^2-4^2}{(x+3)-4}$

$=2(2)^1+2(3)^1+2(4)^1$

$=18=$ Ans. (C)

65. $\lim_{x\to1}\frac{(x+1)^1-2^1}{(x+1)^1-2^1}+\lim_{x\to1}\frac{(x+2)^2-3^2}{(x+2)-3}+\lim_{x\to1}\frac{(x+3)^3-4^3}{(x+3)-4}$

$=55=$ Ans . (C)

66. $f(x)=\frac{|x|\ |x-1|}{x\cdot(x-1)(x-2)}$

સ્પષ્ટ છે.

$\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ અસ્તિત્વ ન ધરાવે

$\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{(x-1)}$ અસ્તિત્વ ન ધરાવે

અને $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{(x-2)}$ અસ્તિત્વ ન ધરાવે

$\therefore$ Ans. (C)

67. $\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi^2}{72}}{x}$

Ans. (A)

68. $\left(\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)\cdot x}\right)(n+1)+\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1/2$

$\therefore(n+1)(1)+1=\frac{1}{2}$

$(n+2)=\frac{1}{2}$

$n=\frac{1}{2}-2=-3/2=-1.5$ Ans. (C)

69. $\lim_{h\to0}\frac{Sin\left(\frac{\pi}{4}+3h\right)-3Sin\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)+3Sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}{h^3}$

(દાખલા ૧૨ મુજબ ગણો)

$=$ Ans (B)

70. $\lim_{x\to 1} m.5^{m-1}\left(5^m-(4+x)^m\right)^{-1}-n.5^{n-1}(5^n-(4+x)^{n-1})$

ધારો કે,

x = 1 + h

As $x\to 1\Rightarrow h\to 0$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{m.5^{m-1}}{(5^m-(5+h)^m)}-\frac{n.5^{n-1}}{(5^n-(5+h)^n}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{m.5^{m-1}\,5^n-(5+h)^n-n.5^{n-1}(5^m-(5+h)^m)}{(5^m-(5+h)^m.(5^n-(5+h)^n)}$$

$$=\frac{n\left(\frac{m}{2}\right)5^{m+n-3}-m\left(\frac{n}{2}\right)^{5n-2}}{mn.5^{n-1}.5^{m-1}}$$

$$=\frac{n\left(\frac{m}{2}\right)-m\left(\frac{n}{2}\right)}{mn}.5^{\,m+n-3-n+2}=\frac{m-n}{10}=\text{Ans (C)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}}\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x}{\left(x+\pi/4\right)}\right\}\cdot\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}}(3-4+4\sin x\cos x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1)\times\left(-1+4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\text{Ans .(A)}$$

71. $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^9-3x^8+x^6-9x^4-4x^2-16x+84}{x^5-3x^4-4x+12}$

$\left(x-\sqrt{2}\right)$ એ અંશનો અને છેદનો એક અવયવ છે.

$\therefore\left(x+\sqrt{2}\right)$ એ પણ અંશનો અને છેદનો એક અવયવ છે.

$\therefore\ \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=x^2-2$ એ અંશનો અને છેદનો એક અવયવ થાય.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left(x^2-2\right)\left(x^7+3x^6+2x^5-5x^4+4x^3-19x^2+8x-42\right)}{\left(x^2-2\right)\left(x^3-3x^2+2x-6\right)}$$

$$=\frac{32\sqrt{2}-124}{4\sqrt{2}-12}$$

$$=\frac{-77-7\sqrt{2}}{-7}$$

$$=11+\sqrt{2}\ =\text{Ans. (A)}$$

72. $$\lim_{x\to \pi/3}\frac{\sin\left(x/2-\pi/6\right)}{2\cos\left(x/2-\pi/2\right)-1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{X}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\cos\frac{x}{2}\cdot 0+\sin\frac{x}{2}\cdot 1\right)-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\left(3\sin^2 x/2-\cos^2 x/2\right)}{\left(1-2\sin x/2\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin x/2+\cos x/2\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1+2\sin x/2\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x/2+\cos x/2\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\left(1+2\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{Ans. (c)}$$

73. $$\lim_{h\to\sqrt{10}}\frac{\left(\sqrt{5}\text{-}\sqrt{2}\right)\text{-}\sqrt{7}\text{-}2h}{h^2\text{-}10}$$

$$=\frac{-\left\{\lim_{h\to\sqrt{10}}\frac{(7\text{-}2h)^{1/2}\text{-}\left(7\text{-}2\sqrt{10}\right)^{1/2}}{(7\text{-}2h)\text{-}\left(7\text{-}2\sqrt{10}\right)}\right\}\times(\text{-}2)(h\text{-}\sqrt{10})}{(h\text{-}\sqrt{10})(h+\sqrt{10})}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\left(7-2\sqrt{10}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{10}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{6\sqrt{10}} = \text{Ans. (B)}$$

74. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1-\sqrt{3}\cot x}{2\cos x - 1}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)}{\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right) \times \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right) \cdot \sin x}\Bigg\}$$

$$= -\frac{\cos 0}{\sin \pi/3 \cdot \sin \pi/3}$$

$$= -\frac{4}{3} = \text{Ans . (B)}$$

75. $\lim_{x \to 0} \frac{\left(x^{2n}+1\right)^{\frac{1}{2n}} - \left(x^{n}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{n}}$

$$= \left\{\lim_{x \to 0} x^{n}\right\} \times \left\{\lim_{\left(x^{2n}+1\right) \to 1} \frac{\left(x^{2n}+1\right)^{\frac{1}{2n}} - 1^{\frac{1}{2n}}}{\left(x^{2n}+1\right)-1}\right\} - \left\{\lim_{\left(x^{n}+1\right) \to 1} \frac{\left(x^{n}+1\right)^{\frac{1}{n}} - 1^{\frac{1}{n}}}{\left(x^{n}+1\right)-1}\right\}$$

$$= \frac{-1}{n} \text{ Ans. (A)}$$

76. f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત છે.

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

77. f એ $x=3$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3).$

78. f એ $x=0$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

79. f એ $x=1$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

80. f એ $\forall x \in R$ આગળ સતત છે.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

81. f એ $x = \pi/4$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to \pi/4} f(x) = f\left(\pi/4\right).$

82. f એ x = 0 સતત આગળ છે.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

83. $f(x) = \frac{x-|x|}{x} \quad n \neq 0$

$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{x-x}{x} = 0$ & $\therefore \lim_{x\to 0^-} \frac{x-(-x)}{x} = 2$

84. અહીં f એ x = 0 સતત આગળ છે.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

85. fએ $[\pi, 2\pi]$ અને $\frac{5\pi}{4}$. અને $\frac{3\pi}{2} \in [\pi, 2\pi]$ માં સતત છે, fએ $x = \frac{5\pi}{4}$ અને $x = \frac{3\pi}{2}$ કિંમત આગળ પણ સતત છે.

86. $f(x) = \frac{5^{1/x} - 5^{-1/x}}{5^{1/x} + 5^{-1/x}}, \ x \neq 0.$

87. fએ x = 3 આગળ સતત છે.

$\therefore \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$

88. fએ x = 0 આગળ સતત છે.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

89. fએ પ્રત્યેક $x \in R$ આગળ સતત હોવાથી f એ x = 0 આગળ સતત છે.

$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

90. $\lim_{x\to\infty}\left((\log 2012)^n+(\log 2013)^n\right)^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{x\to\infty}\ \log(2013)\left\{\left(\frac{\log 2012}{\log 2013}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}$

91. f એ $x=0$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

93. f એ $x=0$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$

94. અહીં f એ $x=\frac{\pi}{6.}$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

95. જો $t=f(x)=\frac{1}{x-1}$ એ $x=a$ આગળ અસતત છે.

$y=g(t)=\frac{1}{t^2+t-1}=\frac{1}{(t+2)(t-1)}$

હવે $t=-2$,માટે $-2=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

જો $t=1$ તો $1=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x=2.$

આ રીતે $x=1$, $1/2$, 2 કિંમતો આગળ વિધેય અસતત છે.

96. અહીં $f(x+y)=f(x)f(y),\quad \forall x, y\in R$

કોઈક, $a\in R^+-\{1\}$ માટે $f(2)=9$, તેથી $a^2=9$

$\therefore a=3.\quad f(x)=a^x=3^x$

$\therefore f(3)=3^3=27$ Ans. (B)

97. f(x) એ $x=\frac{\pi}{4}$ આગળ સતત છે.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin\ 2x)\tan^2\ 2x$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos^2 2x,\right)^{\frac{\sec^2 2x-1}{2}}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\left(-\cos^2 2x\right)\right)^{-\frac{1}{\cos^2 2x}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times\left\{\left(1-\cos^2 2x\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

98. (P. T. O.)

જુઓ દાખલાલ નંબર (98)

99. અહીં f એ x = 0 આગળ સતત છે.

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}-e^{x}-1}{2x}=\frac{3}{2} \qquad \left(\because \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\right)\left(For\,\frac{0}{0}\right)$$

For the existences of the

limit. $\lim_{x\to 0} a\cdot e^{ax}-e^{x}-1=0$

100. f એ x = 0 આગળ સતત છે.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

જવાબો

1	B	26	B	51	C	76	D
2	B	27	A	52	D	77	D
3	C	28	B	53	C	78	C
4	C	29	B	54	B	79	C
5	C	30	C	55	D	80	C
6	B	31	C	56	B	81	A
7	A	32	A	57	B	82	C
8	C	33	C	58	A	83	D
9	A	34	C	59	C	84	B
10	B	35	C	60	B	85	C
11	C	36	C	61	C	86	A
12	A	37	C	62	A	87	B
13	B	38	B	63	B	88	D
14	D	39	B	64	C	89	A
15	C	40	B	65	C	90	D
16	B	41	C	66	C	91	C
17	C	42	C	67	A	92	C
18	B	43	C	68	C	93	C
19	D	44	D	69	B	94	C
20	C	45	C	70	C	95	B
21	B	46	C	71	A	96	B
22	D	47	A	72	C	97	B
23	B	48	B	73	B	98	C
24	A	49	C	74	B	99	D
25	B	50	C	75	A		

●●●

એકમ - 8
વિકલન
<u>અગત્યના મુદ્દા</u>

1. વ્યાખ્યા : વિકલન સહગુણક અથવા વિકલિત :

(i) ધારો કે $f:(a,b)\rightarrow R, t\in(a,b)$ વિધેય છે. જો કોઈ નિશ્ચિત x માટે,

$\underset{t\rightarrow x}{Lt}\ \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો તેના લક્ષ્યને f નો x આગળનો વિકલિતિ કહીશું. જેને $f'(x)$ વડે દર્શાવીશું.

$\therefore\ f'(x)=\underset{t\rightarrow x}{Lt}\ \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ ફરી લખતાં,

$f'(x)=\underset{t\rightarrow 0}{Lt}\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ જો વિધેય અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો.

અથવા

$f'(x)=\underset{\delta x\rightarrow x}{Lt}\ \dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ આગળ $f'(c)=\underset{x\rightarrow 0}{Lt}\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

જો વિધેય અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો, જમણી બાજુની વિકલિત $Rf'(c)=\underset{x\rightarrow c^+}{Lt}\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ અને ડાબી બાજુની

વિકલિત $x>c$ $Lf'(c)=\underset{x\rightarrow c-}{Lt}\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $x<c$ જો $Lf'(c)=Rf'(c)$ હોય તો ,

$f'(c)$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને $Lf'(c)=Rf'(c)=f'(c)$

(ii) જો વિધેય f એ બિંદુ c આગળ વિકલનીય હોય તો તે બિંદુ c આગળ સતત પણ હોય.

(iii) પરંતુ આ પરિણામનું પ્રતીપ વિધાન સત્ય નથી.

2. પ્રમાણિત વિકલિતો :

(i) $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}, \dfrac{d}{dx}(x)=1, x\in R$

(ii) $\dfrac{d}{dx}$ (અચળ સંખ્યા) $=0$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(a^x)=a^x\log a[a>0, a\neq 1]$ અને $\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\log_a(x)=\dfrac{1}{x\log a}$ અથવા $\dfrac{1}{x}\log_a e$

$$\frac{d}{dx}\log_e(x)=\frac{1}{x}, x>0$$

(v) $$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x \forall x\in R.$$

(vi) $$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x,\ \frac{d}{dx}(\cot x)=-\cos ec^2 x$$

(vii)

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x,\ \frac{d}{dx}(\cos ec\, x)=-\cos ec\ x\cdot\cot x$$

(viii) $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<| ; \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<|$$

(ix) $$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in R$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{-1}{1+x^2},\ x\in R$$

(x) $$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}(co\sec^{-1}x)=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$$

(xi) $$\frac{d}{dx}|x|=\frac{x}{|x|}, x\neq 0$$

(xii) $\frac{d}{dx}([x])=\not\in 1$ અને $\frac{d}{dx}[x]$ એ કોઇપણ પુણાઁક કિંમત ધરાવતું નથી.

(xiii) $$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uvw)=\frac{du}{dx}(vw)+\frac{dv}{dx}(wu)+\frac{dw}{dx}(uv)$$

$$\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$$

(xiv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2},[v\neq 0]$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx},[u\neq 0]$

3. *સંયોજિત વિધેયનું વિકલન : (સાંકળનો નિયમ)*

(i) જો $y=f(u)$ અને $u=g(x)$ હોય તો, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

(ii) જો $y=f(u), u=g(v)$ અને $v=h(x)$ હોય તો, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dv}\times\frac{dv}{dx}$

(iii) $\frac{d}{dx}|u|=\frac{u}{|u|}\frac{du}{dx}(u\neq 0)$

(iv) $\frac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\log x)$

4. ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો ઉપયોગો :

$\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Rightarrow \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\Rightarrow \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ વગેરે

5. પ્રચલ વિધેયોનું વિકલન

જો $x=f(t)$ અને $y=g(t)$ હોય તો, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d(x)}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}\left[f'(t)\neq 0\right]$

6. એક વિધેયનું બીજા વિધેય પ્રત્યે વિકલન

જો $y=f(x)$ અને $z=g(x)$ હોય તો, $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}}$ હોય તો, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $9'(x)\neq 0$

7. નિશ્ચાયકનું વિકલન :

જો $y=\begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ l & m & n \end{vmatrix}$ તો $\dfrac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} \frac{dp}{dx} & \frac{dq}{dx} & \frac{dr}{dx} \\ u & v & w \\ l & m & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{du}{dx} & \frac{dv}{dx} & \frac{dw}{dx} \\ l & m & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ \frac{dl}{dx} & \frac{dm}{dx} & \frac{dn}{dx} \end{vmatrix}$ પણ જો

$y=\begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ l & m & n \end{vmatrix}$ જ્યાં u,v,w,l,m,n અચળ હોય તો, $\dfrac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} \frac{dp}{dx} & \frac{dq}{dx} & \frac{dr}{dx} \\ u & v & w \\ l & m & n \end{vmatrix}$

8. આવૃત વિકલન :

(i) જો $y=(ax+b)^m, m\in I$ તો $y_n=m(m-1)(m-2).....(m-n+1)(ax+b)^{m-x}a^n$

જો m પૂર્ણાંક હોય તો, $y_m=m!a^m$ અને $y_{m+1}=0$

(ii) જો $y=\dfrac{1}{ax+b}$ તો $y_n=\dfrac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}a^n$

(iii) જો $y=\log(ax+b)$ તો $y_n=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}a^n$

(iv) જો $y=\sin(ax+b)$ હોય તો $y_n=a^n\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ અને જો $y=\cos(ax+b)$ હોય તો,

$y_n=a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

1. સુરેખ ગતિમાં વિકલનના ઉપયોગો :

કણની ગતિ સમય પર આધારિત છે. જો કણ સુરેખ ગતિ ફરતો હોય તેમજ t સમયમાં તે A સ્થાનથી B સ્થાન સુધી ગતિ કરે તો

$\overline{AB}$ અંતરને તે કણનું t સમયમાં થયેલ સ્થાનાંતર (S) કહેવામાં આવે છે.

$\Rightarrow$ સમયની સાપેક્ષે સ્થાનાંતરના દરને વેગ υ કહેવામાં આવે છે. એ $\upsilon = \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow$ સમયની સાપેક્ષે વેગના દરને પ્રવેગ (a) કહેવામાં આવે છે.

$$\therefore\ a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2. સાપેક્ષ ત્રુટિ :

ધારો કે ચલમાં δ જેટલી ત્રુટિ હોય તો, $\frac{\delta x}{x}$ ને x માં સાપેક્ષ ત્રુટિ કહેવામાં આવે છે.

૩. આસન્ન મૂલ્ય :

ધારો કે $y = f(x)$ એ વિધેય અને δx એ x માં થયેલ લઘુતમ ફેરફાર હોય તો $f(x+\delta x) \cong f(x) + f'(x)\delta x$

જ્યાં δx એ x માં લઘુતમ ફેરફાર છે.

4. (a) **'r' ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળ માટે :**

પરીઘ $= 2\pi r$, ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

(b) 'r' ત્રિજ્યા ધરાવતા ગોલક માટે :

વક્રસપાટીનુ ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

(c) 'x' લંબાઇ ધરાવતા સમઘન માટે ;

કુલ વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 6x^2$

ઘનફળ $= x^3$

(d) 'r' ત્રિજ્યા અને 'h' ઊંચાઇ ધરાવતા નળાકાર માટે :

વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$

નળાકારના પાયાનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

ઘનફળ $= \pi r^2 h$

(e) શંકુ માટે જો પાયાની ત્રિજ્યા r ,સીધી ઊંચાઇ $= h$ અને વક્ર ઊંચાઇ $= l$ હોય તો , અર્ધ શિર્ષ કોણ θ હોય તો

(i) $l^2 = r^2 + h^2$

(ii) $sin\theta = \frac{r}{l}, \cos\theta = \frac{h}{l}$

(iii) $\tan\theta = \frac{r}{h}$

(iv) પાયાનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

(v) વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

(vi) ઘનફળ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

(f) 'r' ત્રિજ્યા અને θ ખૂણો ધરાવતા વર્તુળના વૃતાંશ માટે :

ચાપની લંબાઇ = $r\theta$, પરિમીતી = $2r + r\theta$, ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}r^2\theta$

(g) જો $s =$ ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $v =$ ગોળાનું ઘનફળ હોય તો,

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{2\delta r}{r}, \frac{\delta V}{v} = \frac{3}{r}\delta r$$

5. સ્પર્શક અને અભિલંબ :

(i) સ્પર્શકનો ઢાળ : ધારો કે $y = f(x)$ એ સતત વક્ર અને $P(x_1, y_1)$ એ તેના પર આવેલું બિંદુ છે.

તો P બિંદુ આગળના $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ એટલે કે $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p$ એ વક્ર $y = f(x)$ નો P બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

અહી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p = \tan\psi$ જ્યાં ψ એ P બિંદુ આગળના સ્પર્શકો $X -$ અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલો ખૂણો છે.

(ii) (x_1, y_1) આગળનો વક્ર $y = f(x)$ પરનો સ્પર્શક $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x1,y1)}(x - x_1)$

(iii) (x_1, y_1) આગળનો વક્ર $y = f(x)$ નોઅભિલંબ, $y - y_1 = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x1,y1)}}(x - x_1)$ છે.

[P આગળના અભિલંબનો ઢાળ = $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x1,y1)}}$ છે.]

6. બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો : વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ એ તેમના છેદબિંદુ આગળ તેમના સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે.

7. રોલનું પ્રમેય : જો f એ $[a,b]$ પર સતત હોય, f એ (a,b) પર વિકલનીય હોય તથા $f(a) = f(b)$ હોય તો કોઇક $C \in (a,b)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

8. લાંગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય : જો f એ $[a,b]$ માં સતત હોય તથા (a,b) માં વિકલનીય હોય તો $C \in (a,b)$ મળે કે

જેથી $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ થાય.}$$

9. વધતા તથા ઘટતા વિધેયો :

(i) $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x)_1 < f(x_2)$ હોય તો f ને (a,b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય કહે છે.

(ii) $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x)_1 > f(x_2)$ હોય તો f ને (a,b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય કહે છે.

10. ચુસ્ત વિધેય : જો વિધેય f એ (a,b) પર વધતું કે ઘટતું વિધેય હોય તો વિધેય $f(x)$ ને અંતરાલ (a,b) પર ચુસ્ત વિધેય કહે છે.

11. મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય :

(1) f એ R પર વ્યાખ્યાયિત છે તો પ્રત્યેક $a \in D$ માટે જો $f(x) \le f(a)$ હોય તો $f(x)$ એ બિંદુ $a \in D$ આગળ મહત્તમ છે તેમ કહેવાય અને બિંદુ a ને મહત્તમ બિંદુ કહેવામાં આવે છે. તેમજ $f(a)$ ને મહત્તમ મૂલ્ય કહેવામાં આવે છે.

(2) ન્યૂનતમ બિંદુ : ધારો કે f એ R પર વ્યાખ્યાયિત છે. તો પ્રત્યેક $x \in D$ માટે જો $f(x) \ge f(a)$ હોય તો $f(x)$ એ બિંદુ a આગળ ન્યૂનતમ છે તેમ કહેવાય. બિંદુ a ને ન્યૂનતમ બિંદુ અને $f(a)$ ને $f(x)$ નું ન્યૂનતમ કિંમત કહેવામાં આવે છે.

(3) **સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય :** જો 'a'નું સામિપ્ય $(a-\delta, a+\delta)$ એવું અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય કે જેથી પ્રત્યેક $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $[x \ne a]$ માટે $f(x) > f(a)$ હોય.

અથવા

પ્રત્યેક $x \in (a-\delta, a+\delta), x \ne a$ માટે $f(x) - f(a) > 0$ હોય તા $f(x)$ નું $x = a$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે.

(4) **સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય :** જો 'a' નુ સામિપ્ય $(a-\delta, a+\delta)$ એવું અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય કે જેથી પ્રત્યેક $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $[x \ne a]$ માટે $f(x) < f(a)$ હોય.

અથવા

પ્રત્યેક $x \in (a-\delta, a+\delta), x \ne a$ માટે $f(x) - f(a) < 0$ હોય તો $f(x)$ નું $x = a$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે.

(5) **આત્યંતિક મૂલ્ય :** વિધેય જે બિંદુ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો ધરાવે છે તે બિંદુ આગળના મૂલ્યને $f(x)$ નું આત્યંતિક મૂલ્ય કહેવામાં આવે છે.

(6) **આત્યંતિક મૂલ્ય માટેની આવશ્યક શરત :** $f(x)$ એ વિધેય $f(x)$ નું આત્યંતિક મૂલ્ય બંને તે માટેની આવશ્યક શરત $f'(a) = 0$ છે.

(7) **પ્રથમ વિકલિત કસોટી :** જો f એ $[a,b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય અને $C \in (a,b)$ હોય તથા $h > 0$ મળે કે જેથી

$(c-h, c+h) \subset (a,b)$ અને

(a) (i) f એ $(c-h, c+h)$ માં વિકલનીય છે.

(ii) $c < x < c+h \Rightarrow f'(x) > 0$

(iii) $c-h < x < c \Rightarrow f'(x) < 0$

(iv) $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(b) (i) f એ $(c-h, c+h)$ માં વિકલનીય છે.

(ii) $c-h < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

(iii) $c < x < c+h \Rightarrow f'(x) < 0$

(iv) $f'(c) = 0$ તો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(8) દ્વિતીય વિકલિત કસોટી : ધારો કે f એ અંતરાલ I માં વિકલ સમીકરણ છે. તેમજ c એ I નો અંતર્ગત ભાગ છે કે જેથી ,

(i) $f'(c) = f''(c) = f'''(c) f^n(c) = 0$ અને

(ii) $f^n(c)$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને શૂન્યેતર છે.

$\Rightarrow$ તો જો n યુગ્મ હોય અને $f^n(c) < 0$ હોય તો $x = c$ એ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવતું બિંદુ છે.

$\Rightarrow$ જો n યુગ્મ હોય અને $f^n(c) > 0$ હોય તો $x = c$ એ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું બિંદુ છે.

$\Rightarrow$ જો n અયુગ્મ હોય તો $x = c$ એ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું બિંદુ નથી.

(9) વળાંક બિંદુ : વક્ર $y = f(x)$ નીચાપ ઉર્ધ્વદિશામાં હશે જો તેના દરેક બિંદુ આગળની ચાપ એ તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકની ઉપરની દિશામાં હશે.

પ્રશ્નબેંક

(1) $y = 3x^{\frac{3}{2}}(x-1)$ માટે $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)}$ = ...

(a) 6 (b) 3 (c) 1 (d) 0

(2) $y = \log\sqrt{\frac{1-\cos ax}{1+\cos ax}}$ માટે $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)}$ = ...

(a) a cosec a (b) -a cosec a (c) $\operatorname{cosec} a$ (d) - cosec a

(3) $y = \cos^n x \cdot \sin nx$ માટે $\left(\frac{dy}{dx}\right) = n \cdot \cos^{n-1} \times \cos B$ તો $B =$ ....

(a) $(n-1)x$ (b) $(n+1)x$ (c) nx (d) $(1-n)x$

(4) $y = \frac{\sin^2 x}{1+\cot x} + \frac{\cos^2 x}{1+\tan x}$ તો $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{4}} =$

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\left(-\frac{1}{2}\right)$

(5) જો $f(x) = \beta x^n$ તો $\beta =$ ....

(a) $\frac{f'(1)}{n}$ (b) $\frac{f'(\beta)}{n}$ (c) $\frac{f'(n)}{n}$ (d) 1

(6) જો $f(x) = Ax + B$ અને $f(0) = f'(0) = 2$ તો $f(1) =$ ....

(a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) -4

(7) $\frac{d}{dx}\log\left(e^x\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{\frac{3}{4}}\right)$ વિકલન માં $x = 5$ માટે $\frac{dy}{dx} =$ ....

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $-\frac{3}{5}$ (d) $-\frac{5}{3}$

(8) $y = \sin\frac{x}{2}\left[\frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cos x} + \frac{1}{\cos x\cos\frac{3x}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{3x}{2}\cos 2x}\right]$ માટે $\frac{dy}{dx}_{(x=\pi/2)} =$ ....

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{-3}{2}$ (d) 1

(9) જો $x^2e^y + 2xye^x + 23 = 0$ તો $\frac{dy}{dx} =$ ....

(a) $2xe^{y-x} + 2y(x+1)$ (b) $2xe^{x-y} + 2y(x+1)$

(c) $-\frac{2xe^{y-x} + 2y(x+1)}{x(xe^{y-x} + 2)}$ (d) $2xe^{y-x} - y(x+1)$

(10) $f(x) = |[x]x|, -1 \le x \le 2$ માટે

(a) $x = 0$ આગળ સતત (b) $x = 0$ આગળ સતત નથી

(c) $x = 0$ આગળ વિકલનિય (d) $x = 2$ આગળ સતત છે.

(11) જો $f(x) = x \cdot \cot^{-1} x$ તો $f'(1) =$ ....

(a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4} + 1$

(12) $f(x) = |x-2|$ અને $g(x) = f(f(x))$ તો $x > 20$ માટે $g'(x) =$ ....

(a) 1 (b) 0 (c) 9 (d) 18

(13) જો f એ યુગ્મ વિધેય હોય તથા $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તો $f'(\pi) + f'(-\pi)$

(a) = 0 (b) ≤ 0 (c) ≥ 0 (d) > 0

(14) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right)$ અને $p = \cos^{-1} x^2$ તો $\frac{dy}{dp} =$ ....

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (c) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(15) $y = \sqrt{\frac{3x^2 + x + 1}{x^{\frac{1}{2}}}}$ તો $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)} =$ ....

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) 5 (d) $\frac{1}{5}$

(16) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \log_5 x + 8$ તો $\frac{dy}{dx} =$ ....

(a) $-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} + \frac{1}{x}\log_5 e$ (b) $-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} + \frac{1}{x}\log_5 x$

(c) $-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} + \frac{1}{x}\log_x 5$ (d) $-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} + \log_e 5$

(17) $y=\left(x^2+7x+2\right)\left(e^x-\log x\right)$ માટે $\frac{dy}{dx}=\left(x^2+Ax+B\right)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)+\left(e^x-\log x\right)(Cx+D)$ તો

$A+B-C-D=$ ....

(a) 0 (b) 7 (c) 2 (d) 9

(18) જો $xy+x\cdot e^{-y}+y\cdot e^x=x^2$ માટે $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{A+y+e^{-y}-2x}{B+e^x+x}\right)$ તો $A+B=$ ....

(a) ye^x+xe^{-y} (b) ye^x-xe^{-y} (c) $ye^{-x}+xe^{-y}$ (d) $ye^{-x}-xe^{-y}$

(19) $f(x)=x^n$ હોય તો $f(1)-\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}-\frac{f'''(1)}{3!}+.....+\frac{(-1)^n.f^n(1)}{n!}$ =.......

(a) 2^n (b) 2^{n-1}

(a) 5 (b) 10 (c) 0 (d) 15

(21) જો $x=\tan\left(\frac{1}{b}\log t\right)$ માટે $A\frac{d^2t}{dx^2}+(B-b)y_1=0$ તો $A+B=$ .... જ્યાં $y_1=\frac{dt}{dx}$ છે.

(a) $(1-x)^2$ (b) $(1+x)^2$ (c) $(x-1)^3$ (d) $1-x$

(22) જો $f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{x^x-x^{-x}}{2}\right)$ તો $f'(1)=$...............

(a) -1 (b) 1 (c) $\log_e 2$ (d) $-\log_e 2$

(23) $y=b\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}+\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ માટે $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{y}{A}}{\frac{1}{b}\frac{\sec^2 y}{b}-\frac{x}{A}}$ તો $A=$ ....

(a) x^2+y^2 (b) x^2-y^2 (c) y^2-x^2 (d) y

(24) જો $x=\tan\theta+\cot\theta, y=2\log(\cot\theta)$ તો $\frac{dy}{dx}=$ ....

(a) $-\tan 2\theta$ (b) $\tan 2\theta$ (c) $\sin 2\theta$ (d) $\cos 2\theta$

(25) $\frac{d}{dx}\left[\log(1+\sin x)+\log\sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^2\right]=$.............

(a) 0 (b) $4\left(\frac{\cos x-\tan x}{\sin x+\cos x}\right)$ (c) $\log_e 2$ (d) $-\log_e 2$

(26) $y=f\left(f\left(\left(f(x)\right)\right)\right)$ તથા $f(0)=0, f'(0)=1$ હોય તો $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{X=0}$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

(27) જો $y=x\cdot\tan\frac{x}{2}$ અને $A\frac{dy}{dx}-B=x$ તો $\frac{B}{A}=$ ....

(a) $\cot\frac{x}{2}$ (b) $\tan\frac{x}{2}$ (c) $\tan x$ (d) $\cot x$

(28) જો $f(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\rightarrow(0,\pi)$ અને $f(x)=\sec^{-1}x$ તો $f'(x)=$ ....

(a) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (d) $\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(29) $y=\cos^{-1}\left(\frac{3x-4\sqrt{1-x^2}}{5}\right)$ તો $\frac{dy}{dx}=$ ......

(a) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{-5}{3\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{3}{5\sqrt{1-x^2}}$

(30) $\sin^{-1}\left(3x-4x^3\right)$ નું $\sin^{-1}x$ ની સાપેક્ષ વિકલન કરવામાં આવે તો, વિકલિત ....

(a) $3, |x|<1$

(b) $3, |x|<\frac{1}{2}$ અને $-3, \frac{4}{2}<|x|<1$

(c) $-3, |x|<1$

(d) $-3, |x|\leq\frac{1}{2}$ અને $3, \frac{1}{2}<|x|<1$

(31) વિધેય $f(x)=\frac{x^2}{1+\sin^2 x}$ નું વિકલન એ ....

(a) યુગ્મ વિધેય (b) અયુગ્મ વિધેય (c) વિધેય વ્યાખ્યાયિત નથી (d) વધતું વિધેય

(32) $(1.0002)^{3000}$ ની સાપેક્ષ કિંમત .... છે.

(a) 1.2 (b) 1.4 (c) 1.6 (d) 1.8

(33) જો $f'(x)>0$ અને $g'(x)<0 \quad \forall x\in R$ તો

(a) $f\left(g(x)\right)>f\left(g(x+1)\right)$

(b) $f\left(g(x)\right)\geq f\left(g(x+1)\right)$

(c) $g\left(f(x)\right)\not> g\left(f(x+1)\right)$

(d) $g\left(f(x)\right)>g\left(f(x-1)\right)$

(34) $y = 10^{\log_{10}\left(\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)} + e^{\log\left(\sin^{-1}x + \sec^{-1}\frac{1}{x}\right)}$ તો $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$

(a) $\pi - \frac{2}{1+x^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$ (c) $-\frac{2}{1+x^2}$ (d) 0

(35) $x = \sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ અને $y = \frac{\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}}$ તો $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$

(a) -1 (b) 1 (c) -2 (d) 2

(36) જો $y = f\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$ અને $f'(x) = \sin x^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\left(x^2 - x - 1\right)}{A} \cdot \sin B$ તો $AB = \ldots\ldots$

(a) $(2x-1)^2$ (b) $(x-1)^2$ (c) $\left(x^2+1\right)^2$ (d) $(2x+1)^2$

(37) જો $f''(x) = -f(x)$ અને $f'(x) = g(x)$ તથા $m(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2$ તો $m(20)$ શોધો. જ્યાં, $m(10) = 22$

(a) 22 (b) 11 (c) 0 (d) 5

(38) જો $y^2 = p(x)$ એ 3 કરતાં વધારે ઘાતવાળું બહુપદી વિધેય હોય તો $2\frac{d}{dx}\left(y^3 y_2\right) = \ldots\ldots$

(a) $p'(x) \cdot p''(x)$ (b) $p(x) \cdot p''(x)$ (c) $p'(x) \cdot p'''(x)$ (d) $p(x) \cdot p'''(x)$

(39) જો $f(x) = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ તો f એ કયા અંતરાલમાં ચુસ્તવધતું વિધેય છે ?

(a) $[-1,1]$ (b) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $[0,1]$ (d) $[-1,0]$

(40) $x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$ તો $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$

(a) $1+x^2$ (b) $\frac{1}{x^2-1}$ (c) $\frac{1}{1-x^2}$ (d) x^2-1

(41) $f(x) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \ldots\ldots + x^n$ તો $f^{11}(1) = \ldots\ldots$

(a) $n(n-1).2^{n-2}$ (b) $n(n-1)2^n$ (c) $n(n-1).2^{n-1}$ (d) $(n-1).2^{n-1}$

(42) એક વક્રનાં સમીકરણ $2x = 2a\cos\theta + b\cos 2\theta$ અને $2y = 2a\sin\theta + b\sin 2\theta$ જો $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ લેવામાં આવે તો નીચેના માંથી કઇ

કિંમત મળે ?

(a) $\sin\theta = \frac{2a^2 + b^2}{5ab}$ (b) $\tan\theta = \frac{3a^2 + 5b^2}{4ab}$

(c) $\cos\theta = \frac{a^2 - 2b^2}{3b}$ (d) $\cos\theta = \frac{-(a^2 + 2b^2)}{3ab}$

(43) $\sqrt{x^2 + 16}$ નો $\frac{x}{x-1}$ ને સાપેક્ષ વૃધ્ધિ દર $x = 3$ આગળ ………… થાય.

(a) 2 (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{-12}{5}$ (d) -3

(44) જો x અને y બે ચલરાશિ હોય તથા $x > 0,\ xy = 1$ તો $x + y$ ની ન્યૂનતમ કિંમત ………. થાય.

(a) 1 (b) 2 (c) $2\frac{1}{2}$ (d) $3\frac{1}{3}$

(45) f અને g એ વિકલનિય વિધેય હોય તથા $fog = I$ તદેવ વિધેય હોય અને જો $g'(a) = 2$ અને $g(a) = b$ તો $f'(b) =$ …………

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) $-1/2$

(46) જો $y = \frac{1}{3}\left[\log(x+1) - \log\sqrt{x^2 - x + 1}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ માટે $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3A} + \frac{B}{3(x^2 - x + 1)}$ તો AB=…………

(a) $-x^2 - x - 2$ (b) $x^2 - x + 2$ (c) $-x^2 + x + 2$ (d) $x^2 + x + 2$

(47) $\frac{d}{dx}\left(3^{\log_{10}|cosec^{-1}x|}\right) =$ ……..

(a) $\frac{3^{\log_{10}|cosec^{-1}x|}}{\cos ec^{-1}x}\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\log_{10}3\right)$ (b) $-\frac{3^{\log_{10}|cosec^{-1}x|}}{\cos ec^{-1}x}\left(\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\log_{10}3\right)$

(c) $-\frac{3^{\log_{10}|cosec^{-1}x|}}{\cos ec^{-1}x}\left(\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\log_{3}10\right)$ (d) $3^{\log_{10}|cosec^{-1}x|}.\log 3$

(48) જો $y=\sum_{r=1}^{n}\tan^{-1}\frac{1}{1+r+r^2}$ તો $\frac{dy}{dx}=$ ....

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+(1+x)^2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{1-(x+1)^2}$

(49) $(\log_{\cos x}\sin x)(\log_{\sin x}\cos x)^{-1}+\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ તો $\frac{dy}{dx}=$ ....

(a) $\frac{-8}{\log_e 2}+\frac{32}{16+\pi^2}$ (b) $\frac{8}{\log_e 2}+\frac{32}{16+\pi^2}$

(c) $\frac{8}{\log_e 2}-\frac{8}{4-\pi}$ (d) $\frac{8}{\log_e 2}-\frac{32}{16+\pi^2}$

(50) જો $x=a\left(1-\cos^3 a\right), y=a\sin^3\theta$ તથા $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{A}{a}$ તો $A=$ ....

(a) $\frac{27}{32}$ (b) $\frac{32}{27}$ (c) $-\frac{32}{27}$ (d) $-\frac{27}{32}$

(51) $e^y=\frac{e^2}{x^2}$ તથા $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{x^2}$ તો $A=$ ....

(a) -2 (b) $\frac{-1}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

(52) જો $y=x^x$ તથા $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{y}{x}=\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ તો $\alpha=$ ....

(a) x^y (b) x^x (c) y^x (d) x

(53) જો $x^{13}y^7=(x+y)^{20}$ તો $xy_1-y=$ ....

(a) 7 (b) 13 (c) 20 (d) 0

(54) જો $x=235\left[\cos t+\frac{1}{10^{10}}\log\tan^{10^{10}}\frac{t}{2}\right], y=235\cos t$ તો $\frac{dy}{dx}=$ ....

(a) $\cot^2 t$ (b) $\tan^2 t$ (c) $\cos^2 t$ (d) $\sin^2 t$

(55) વક્ર $x=t^2+3t-8$ અને $y=2t^2-2t-5$ ના સ્પર્શકનો ,ઢાળ $(2,-1)$ આગળ કયો થાય ?

(a) $\frac{6}{7}$ (b) -6 (c) $\frac{22}{7}$ (d) $7/6$

(56) વક્ર $y=1-e^{\frac{x}{2}}$ એ y અક્ષને છેદે તો સ્પર્શકનું સમીકરણ = ...

(a) $x+y=0$ (b) $x+2y=0$ (c) $2x+y=0$ (d) $x-y=0$

(57) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta$ અને $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\theta$ વક્ર સ્પર્શકના વચ્ચે અંતરાયેલા રેખાખંડની લંબાઇ ..... થાય .

(a) a (b) | a | (c) a^2 (d) a^3

(58) જો વક્ર $y=f(x)$ માટે $\frac{dy}{dx}=2x$ હોય તથા જો $(1,1)$ બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શક $\overrightarrow{OX}$ સાથે કેટલા માપનો ખૂણો બનાવે ?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\tan^{-1}2$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

(59) વક્ર $y=\frac{3}{2}\sin 2\theta, x=e^{\theta}.\sin\theta$ $.0\le\theta<2\pi$ θ ની કઇ કિંમત માટે સ્પર્શક $X-$ અક્ષને સમાંતર થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(60) વિધેય $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x-1|+\tan x$ માટે કેટલા બિંદુઓએ $(0,2)$ માં વિકલનિય નથી.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(61) વિધેય $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n, x\in[a,b]$ જો રોલના પ્રમેયનું પાલન કરતો $c=..........\in(a,b)$.

(a) $\frac{mb+na}{m+n}$ (b) $\frac{mb-na}{m+n}$ (c) $\frac{mb-na}{n-m}$ (d) $\frac{mb+na}{m-n}$

(62) જો વિધેય $f(x)=ax^3+bx^2+11x-6$ એ $x\in[1,3]$ માટે રોલના પ્રમેયનું પાલન કરે અને

$f'\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$ તો $a=...........,b=..........$

(a) $1,-6$ (b) $-2,1$ (c) $-1,\frac{1}{2}$ (d) $-1,6$

(63) $f(x)=1+2\sin x+3\cos^2 x, 0\le x\le\frac{2\pi}{3}$ તો વિધેય

(a) $x=\frac{\pi}{2}$ આગળ ન્યુનત્તમ (b) $x=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ આગળ મહત્તમ

(c) $x=\frac{\pi}{6}$ આગળ ન્યુનત્તમ (d) $x=\sin^{-1}\frac{1}{6}$ આગળ મહત્તમ

(64) સ્પર્શક $y = a\log\sec\frac{x}{a}$ માટે સ્પર્શક રેખાનું સમીકરણ $x = a$ આગળ …… થાય .

(a) $(y-a\log\sec 1)\tan 1 = x-a$ (b) $(x-a)\tan 1 = y-a\log\sec 1$

(c) $(x-a)\cos 1 = (y-a\log\sec 1)\tan 1$ (d) $\mathrm{y-a\log\sec = 0}$

(65) જો $\cos x\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}.........\infty = \frac{\sin x}{x}$ તો

$\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3}+......\infty = ...$

(a) $\frac{1}{x}-\cot x$ (b) $\frac{1}{x}-\tan x$ (c) $x-\tan x$ (d) $x-\cot x$

(66) $y = (x\log x)^{\log\log x}$ માટે $\frac{dy}{dx} = A^{\log\log x-1}\left(B+(\log x+2)\log\log x\right)$ તો $AB = ...$

(a) $x\log x$ (b) $x(\log x)^2$ (c) $x^2\cdot\log x$ (d) આ પૈકી એકપણ નહિ.

(67) જો સ્પર્શક રેખા $x\cos\alpha+y\sin\alpha = p$ એ વક્ર $x^m y^n = a^{m+n}$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત

$p^A m^n n^m = A^A\cdot a^A\cos^m\alpha\cdot\sin\alpha$ તો $A = ...$

(a) $m+n$ (b) $m-n$ (c) $n-m$ (d) m^2-n^2

(68) વિધેય $f(x) = (a+2)x^3-3ax^2+9ax-1$ તમામ x માટે ઘટતું વિધેય હોય તો $a\in ....$

(a) $(-\infty,-3)$ (b) $(-3,-2)$ (c) $(3,\infty)$ (d) $(-\infty,-3]$

(69) $f(x) = \sin^4 x+\cos^4 x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ કયા ઉપઅંતરાલમાં વધતું વિધેય છે ?

(a) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ (b) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (c) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (d) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

(70) $f(x) = \tan^{-1}(\sin x+\cos x)$ એ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ અંતરાલમાં .... વિધેય છે .

(a) ઘટતું (b) વધતું (c) બંને (d) યુગ્મ

(71) વક્ર $y^2 = 12\left(x+2\sin\frac{x}{2}\right)$ પરનાં બિંદુ કે જેનો સ્પર્શક $x-$અક્ષને સમાંતર છે તે કોનું સમાધાન કરે ?

(a) રેખા (b) પરવલય (c) વર્તુળ (d) ઉપવલય

(72) $\frac{(\alpha+x)(\beta+x)}{(\gamma+x)}, x>-c$ ની ન્યુનત્તમ કિંમત .... છે .

(a) $\left(\sqrt{\gamma-\alpha}+\sqrt{\gamma-\beta}\right)^2$ (b) $\left(\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}\right)^2$

(c) $\left(\sqrt{\alpha-\beta}+\sqrt{\beta-\gamma}\right)^2$ (d) $(\alpha-\mathrm{B})^2$

(73) જો $A>0, B>0$ અને $A+B=\frac{\pi}{3}$ તો $\tan A\cdot\tan B$ ની મહત્તમ કિંમત .... થાય .

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) ૩

(74) જો વક્ર $y=a^x$ અને $y=b^x$ એકબીજા ને α ખૂણે છેદતા હોય તો $\tan\alpha=$ ....

(a) $\frac{a-b}{1+ab}$ (b) $\frac{\log a-\log b}{1+\log a\cdot\log b}$

(c) $\frac{a+b}{1-ab}$ (d) $\frac{\log a+\log b}{1-\log a\cdot\log b}$

(75) $\frac{x}{1+x\tan x}$ એ કયા બિંદુ આગળ મહત્તમ છે ?

(a) $x=\sin x$ (b) $x=\cos x$ (c) $x=\frac{\pi}{3}$ (d) $x=\tan x$

(76) જો $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}, 1<x<26$ એ વાસ્તવિક વિધેય હોય તો $1<x<26$ માટે $f'(x)=$ ....

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ (c) $2\sqrt{x-1}-5$ (d) $\sqrt{x-1}$

(77) જો $-1\le x\le 1$ હોય તો રોલનું પ્રમેય નીચેનામાંથી કયા વિધેયને લાગું પડે ?

(a) $f(x)=x$ (b) $f(x)=x^2$ (c) $f(x)=2x^3+3$ (d) $f(x)=|x|$

(78) જો ગોકલના ઘનફળના વધારાનો દર એ ત્રિજ્યાના વધારાના દર જેટલો હોય તો ત્રિજ્યા =..........

(a) 1 એકમ (b) $\sqrt{2\pi}$ એકમ (c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ એકમ (d) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ એકમ

(79) જો નળાકારનું ઘનફળ અચળ હોય અને નળાકારની ત્રિજ્યાં અને ઊંચાઇ વધવાનો દર સમાન મૂલ્યના પરંતુ વિરુધ્ધ ચિન્હ ધરાવતા હોય તો ,

(a) $r=2h$ (b) $h=2r$ (c) $h=r$ (d) $h=4r$

(80) વક્ર $y=(x-2)(x-3)$ નો સ્પર્શક જો $x-$અક્ષની ધન દિશા સાથે $225°$ ના માપનો ખૂણો બનાવે છે . તો વક્રનું અને સ્પર્શકનું છેદબિંદુ .... થાય .

(a) $(0,3)$ (b) $(3,0)$ (c) $(-3,0)$ (d) $(0,-3)$

(81) જો વક્રો $2x^2+3y^2=6$ અને $ax^2+4y^2=4$ પરસ્પર લંબચ્છેદી હોય તો $a=$..........

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) -3

(82) વક્રના કોઇપણ બિંદુ આગળ અવસ્પર્શક અને અવાભિલંબ નો ગુણાકાર કોના વર્ગની બરાબર છે ?

(a) સ્પર્શક નાં કોઇપણ બિંદુ ના આગળ બરાબર
(b) અભિલંબના કોઇપણબિંદુ ના ઢાળ બરાબર
(c) બિંદુના $x-$યામ
(d) બિંદુના $y-$યામ

(83) વક્ર $y=\left(\dfrac{e^{\frac{-x}{5}}+e^{\frac{x}{5}}}{2}\right)$ ના કોઇપણ બિંદુ આગળ અભિલંબની લંબાઇ કોના જેટલી થાય ?

(a) બિંદુના $x-$યામ
(b) બિંદુના $y-$યામ
(c) બિંદુના $x-$યામના વર્ગની બરાબર
(d) બિંદુના $y-$યામના વર્ગની બરાબર

(84) જો $m=\tan\theta$ એ વક્ર ના સ્પર્શકનો ઢાળ હોય તો ,

(a) $|\tan\theta|>1$ (b) $|\tan\theta|<1$ (c) $\tan\theta<1$ (d) $|\tan\theta|\le 1$

(85) જો $a+b+c=0$ હોય તો સમીકરણ $3ax^2+2bx+c=0$ ના અંતરાલ $(0,1)$ માં ...... બીજ હોય .

(a) ઓછામાં ઓછું એક બિજ
(b) વધારેમાં વધારે એક બિજ
(c) બિજ ન મળે
(d) માત્ર એકજ બીજ મળે.

(86) $(0,1)$ માં કયા વિધેયને લાગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય લાગુ પડતું નથી ?

(a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}-x^2\right), x\ge\frac{1}{2}$
(b) $f(x)=\frac{\sin x}{x}, x=0$

(c) $f(x)=x|x|$
(d) $f(x)=|x|$

(87) જો $f(x)$ એ $[0,2]$ માટે લાગ્રાન્જ મધ્યકમાનની તમામ શરતોનું પાલન કરે છે . જો $f(0)=0$ અને

$|f'(x)|\le\frac{1}{2}, \forall x, x\in[0,2]$ તો

(a) $f(x)\le 2$
(b) $|f(x)|\le 1$

(c) $f(x)=2x$
(d) $f(x)=3$ માટે $[0,2]$ x માં વ્યાખ્યાયિત છે.

(88) વિધેય $f(x)=4\log(x-2)-x^2+4x+1$ એ કયા અંતરાલમાં વધતું વિધેય છે ?

(a) $(2,3)$ (b) $(1,2)$ (c) $(2,4)$ (d) $(1,3)$

(89) જો $f(\theta)=\dfrac{\theta}{\sin\theta}$ અને $g(\theta)=\dfrac{\theta}{\tan\theta}$ જ્યાં $x\in(0,1]$ તો આ અંતરાલમાં

(a) $f(\theta)$ અને $g(\theta)$ બંને વધતાં વિધેય છે . (b) $f(\theta)$ અને $g(\theta)$ બંને ઘટતાં વિધેય છે .

(c) $f(\theta)$ એ વધતું વિધેય છે. (d) $g(\theta)$ એ ઘટતું વિધેય છે .

(90) $f(l)=l-e^{l}+\tan\dfrac{112}{7}$ એ કયાં અંતરાલમાં વધતું વિધેય છે ?

(a) $(0,\infty)$ (b) $(-\infty,0)$ (c) $(1,\infty)$ (d) $(-\infty,1)$

(91) જો $f(x)=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}x^3-3x+5\log_e 2$ એ પ્રત્યેક $x\in R$ માટે ઘટતું વિધેય છે , તો a ની શક્ય કિંમતોનો ગણ .... છે .

(a) $[-1,1]$ (b) $[1,\infty)$ (c) $(-\infty,-1]$ (d) $(-\infty,-1)$

(92) જો $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ તો

(a) $\cos x>1-\dfrac{2x}{\pi}$ (b) $\cos x<1-\dfrac{2x}{\pi}$

(c) $\cos x>\dfrac{2x}{\pi}$ (d) $\cos x<\dfrac{2x}{\pi}$

(93) $\alpha\sec^2 x+\beta\operatorname{cosec}^2 x-\alpha-\beta$ ની ન્યુનત્તમ કિંમત એ $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta, a>b>0$ ની મહત્તમ કિંમત જેટલી હોય તો ,

(a) $a=b$ (b) $a=2b$ (c) $a=3b$ (d) $a=4b$

(94) $\sec^{-1}\left\{\dfrac{1}{2x^2-1}\right\}$ નું $\sqrt{1+3x}$ ને સાપેક્ષ વિકલન $x=\dfrac{1}{3}$ આગળ .... થાય.

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) 3

(95) $f(x)=|x|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|+|x-3|+\left|x-\dfrac{5}{2}\right|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6

(96) વિધેય $f(x)=\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ એ કેવું વિધેય છે?

(a) વધતું (b) ઘટતું (c) યુગ્મ (d) ચુસ્ત વધતું

(97) જો $f(x) = |x-1|$ એ $g(x) = f(f(f(x)))$ તો $x > 2$ માટે $g'(x)$ની કિંમત કોની બરાબર થાય.

(a) $1, x > 2$ બધા x માટે (b) $1, 2 < x < 3$ માટે

(c) $-1, 2 < x < 3$ માટે (d) વ્યાખ્યાઈત નથી.

(98) $a\sin^3\alpha$ નું $a\cos^3\alpha$ ને સાપેક્ષ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ આગળ દ્વિતીય વિકલિત ……… થાય.

(a) $\frac{4\sqrt{2}}{3a}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{12a}$ (d) 0

(99) વક્ર $y = (1+x)^y + \sin^{-1}(\sin^2 x)$ના $x = 0$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ………

(a) $x + y = 2$ (b) $x + y = 1$ (c) $x - y = 1$ (d) $x^2 - y^2 = 2$

(100) જો $y = \tan^{-1}\frac{1}{x^2+x+1} + \tan^{-1}\frac{1}{x^2+3x+3} + \tan^{-1}\frac{1}{x^2+5x+7} + \ldots\ldots$ n- પદો સુધી,

તો $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(a) $\frac{1}{1+(x+n)^2} + \frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+(x+n)^2} - \frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{2}{1+(x+n)^2} - \frac{1}{1+x^2}$ (d) $\sum n$

સુચનો

(1) $y=3x^{3/2}(x-1)$ $3x^{\frac{5}{2}}$ $3x^{\frac{3}{2}}$

(2) $\frac{dy}{dx}$ $\frac{1}{2}\left[\frac{a\sin x}{1 \quad \cos ax} \quad \frac{a\sin ax}{1 \quad \cos ax}\right]$

(3) $y=\cos^n x\cdot sin\, x$ વિકલન ના ગુણાકાર ના નિયમનો ઉપયોગ કરો.

(4) $y=\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$ સાદુરૂપ આપો $y=1-\frac{1}{2}\sin 2x$

$y=\frac{1}{\sin x+\cos x}(\sin^3 x+\cos^3 x)$, $\frac{dy}{dx}=-\cos 2x$ ....

(5) f(x)= βx^n

$\frac{d}{dx}(f(x))=\beta\bullet\frac{d}{dx}(x^n)$ $\therefore f'(1)=\beta n$ $\therefore f'(x)=\beta\cdot n\cdot x^{n-1}$ $\beta=\frac{f'(1)}{n}$

(6) $f(x)=Ax+B$ $f'(x)=A$ તથા $f(0)=f'(0)=2$

$\therefore A=2, b=2$ પરથી $f(1)=2+2=4$

(7) $\frac{d}{dx}\log\left(e^x\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{\frac{3}{4}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x+\frac{3}{4}\log(x-4)-\frac{3}{4}\log(x+4)\right)$ $\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-10}{x^2-16}$

(8) અહીં $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{\sin\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=tan\,x-tan\frac{x}{2}$

આજ પ્રમાણે $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{3x}{2}}=tan\frac{3x}{2}-tanx$ અને $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos x}$ માં દરેક પદનું વિકલન કરો.

(9) $x^2e^y+2xye^x+23=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xe^y+2xye^x+2ye^x}{x^2e^y+2xe^x}$, દરેક પદને e^x વડે ભાગતાં,

(10) $f(x)=|x|\cdot|[x]|\Rightarrow F(0)=0$, હવે ડા. બા. અને જ.બા. લનો ઉપયોગ કરો.

(11) $f(x)=x.\cot^{-1}x$, વિકલનના ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરો.

(12) $f(x)=|x-2|$ અને $g(x)=f(f(x))$, હવે $x>20$ માટે $f(x)=x-2$

$g(x) = f(f(x)), = f(x - 2) = |x-4|$,હવે $x > 20$ માટે $g'(x) = 0$

(13) યુગ્મ વિધેયનું વિકલન અયુગ્મ વિધય હોય છે. $f'(\pi) + f'(-\pi) = 0$

(14) $z = \cos^{-1}x^2$ ધારો $\Rightarrow x^2 = \cos^2 z$

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1-\tan\frac{z}{2}}{1+\tan\frac{z}{2}}\right) \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{z}{2}$,z ની કિંમત મુકી આગળ વિકલન કરો.

(15) $y = \sqrt{\dfrac{3x^2+x+1}{x}} = \sqrt{3x+1+\dfrac{1}{x}}$

$\left(\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{ax+b}\right)$ ના સુત્રનો ઉપયોગ, ત્યારબાદ સંયોજીત વિધેયના વિકલનના ઉપયોગ કરો.

(16) $y \quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \log_5 x \quad 8 \quad x^{\frac{1}{3}} \quad \log_5 x \quad 8$

$\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} \; 1 \quad \dfrac{1}{x \cdot \log 5} \quad \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} \quad \dfrac{1}{x}\log_5 e$

(17) $y = (x^2+7x+2)(e^x - \log x)$, વિકલનના ગુણાકાર ના નિયમનો ઉપયોગ કરો.

(18) $xy + x \cdot e^{-y} + y \cdot e^x = x^2$ દરેક પદનું વિકલન

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(ye^x + y + e^{-y} - 2x)}{x - xe^{-y} + e^x} = -\dfrac{(ye^x + y + e^{-y} - 2x)}{-xe^y + e^x + x}$

$A = ye^x \qquad B = --xe^{-y}$

(19) $f(x) = x^n \Rightarrow f(1) = 1, f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow f'(1) = 1, f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1)$

$f^n(x) = n! \Rightarrow f^n(1) = n!, = 1 - \dfrac{n}{1!} + \dfrac{n(n-1)}{2!} + ...0$

(20) $\Rightarrow F(x) = \left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 + \left[g\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2$

$= \left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(f'\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right]^2$

$\therefore F'(x) = F\left(\dfrac{x}{2}\right).f'\left(\dfrac{x}{2}\right) + f'\left(\dfrac{x}{2}\right).f''\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(21) $x=\tan\left(\frac{1}{b}\log t\right)$, :b $\tan^{-1}x=\log t$, $y_1(1+x^2)=tb$, $\frac{b}{1+x^2}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}$,

ત્યારબાદ દ્વિતિય વિકલન લેતાં $(1+x^2)y_2(2x-b)y_1=0$

(22) $f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{x^x-x^{-x}}{2}\right)$

$$f'(x) \quad \frac{1}{1 \quad \left(\frac{x^x \quad x^{\ x}}{2}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^x \quad x^{\ x}}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-2}{4+(x^x+x^{-x})^2}\{e^{x\log x}.\frac{d}{dx}(x.\log x)-e^{-x\log x}\frac{d}{dx}(-x\log x)\}$$

(23) $y=b\tan^{-1}(\frac{x}{a}+\tan^{-1}\frac{y}{x})$

$$\tan\frac{y}{b} \quad \frac{x}{a} \quad \tan \ 1\frac{y}{x}, \qquad \frac{1}{b}\sin^2\frac{y}{b}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}+\frac{x.\frac{dy}{dx}-y}{x^2+y^2}$$

(24) $x=\tan\theta+\cot\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ આજ પ્રમાણે

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ $=-\text{cosec}^2\theta$

$\frac{2}{\sin 2}$

$\frac{dy}{dx}$ .....

(25) $$\frac{d}{dx}\left[\log(1+\sin x) + \log\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)^2\right] \quad \frac{\cos x}{1 \quad \sin x} \quad \tan\left(\frac{}{4} \quad \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2} \quad \sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}\right)^2} \quad \frac{\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}} \quad 0$$

(26) $y=f(f(f(x))),\quad =f'(f(f(x))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)\qquad f'(0)=1$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=f'(f(f(0)))\ \cdot f'(f(0))\ \cdot f'(0)$

(27) $y=x.\tan\frac{x}{2}.\frac{dy}{dx}\quad x\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\quad\tan\frac{x}{2}$

$=(1+\cos x)\frac{dy}{dx}=x+\tan\frac{x}{2}(1+\cos x)\cdot\ (1\quad\cos x)\frac{dy}{dx}\quad x\sin x,$

$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}+\tan\frac{x}{2}$ સાદુરૂપ આપતાં, B=sinx a=1+cosx

(28) $f(x)=\sec^{-1}x\ \ f'(x)\quad\frac{1}{|x|\sqrt{x^2\quad 1}}$

(29) $y=\cos^{-1}\left(\frac{3x-4\sqrt{1-x^2}}{5}\right),\qquad y=\cos^{-1}(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2})$ હવે, $\cos x=\frac{3}{5}$ અને $\sin x=\frac{4}{5}$

(30) $y=\sin^{-1}(3x-4x^3)=3\sin^{-1}x.|x|\le\frac{1}{2}$

$=\pi-3\sin^{-1}x.\frac{1}{2}<x\le 1$

$=-\pi-3\sin^{-1}x.-1\le x<-\frac{1}{2}$

$z=\sin^{-1}x$ તો $y=\ 3z.\ |x|\le\frac{1}{2}$

$=\pi-3z\ \ \frac{1}{2}<x<1$ પરથી દાખલો ગણો.

$=-\pi-3z-1\le x<-\frac{1}{2}$

(31) સ્વપ્રયત્ન

(32) $y=x^{3000},x=1$ અને $x+\Delta x=1.002\ ,y=x^{3000}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3000x^{2999}\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)}=3000$

$\Delta y=\frac{dy}{dx}\cdot\Delta x$

(33) f'(x)>0 અને g'(x)0, f(x) એ વધતું વિધેય છે. અને g(x) એ ઘટતું વિધેય છે.

$\Rightarrow$ f(x - 1) < f(x) < (x + 1) અને g(x - 1) > g(x) > g(x +1)

$\Rightarrow$ g(f (x - 1)) > (f(x)) > g(f (x + 1) અન f (g(x) y > f(g(x)) > f(g (x + 1)......... અપાય.

(34) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x)$, $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\frac{\pi}{2}$

(35) $x=\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \Rightarrow x^2=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ આ પરથી $y=\frac{1-x}{1+x}$ મેળવી $\frac{dy}{dx}$

(36) $y=f\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$ અને $f'(x)=\sin x^2$

$\frac{dy}{dx}=\sin\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2 \left[\frac{-2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}\right]$, AB $=(x^2+1)^2.\frac{(2x-1)^2}{(x^2-1)^2}=(2x-1)^2$

(37) f'(x)=- f(x), f'(x) = g (x), $\therefore$ m(x)=(f(x))^2 +(g(x))^2

$\therefore$ m'(x)=2f(x).f'(x)f^2 g(x).g'(x), $\therefore$ m'(x)=2f(x).g(x)-2f(x).g(x)=0

(38) $y^2=p(x) \therefore 2yy_1=p'(x) \therefore 4y^3y_2=2y^2.p''(x)-(p'(x))^2$

$\therefore 2y_1=\frac{p'(x)}{y} \Rightarrow 2y_2=\frac{2y^2.p''(x)-p'(x)^2}{2y^3}$

(39) $f(x)=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$, $\therefore f'(x)=\frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

$\therefore$ હવે f'(x)=0 તો 1-2x^2>0 $\therefore$ 2x^2< 1 ,$|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

(40) $x=\frac{e^2y+1}{e^2y-1} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{e^2y-1}{e^2y+1}$

$\therefore$ યોગ - વિયોગ પ્રમાણ લેતાં,

$\therefore \frac{x+1}{x-1}=e^2y$ $\therefore$ log(x+1)-log(x-1)=2y $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$

(41) f(x)=(1+x)^n $\therefore$ f'(x)=n(1+n)$^{n-1}$ $\therefore$ f''(x)=n(n-1)(1+n)$^{n-2}$ $\therefore$ f''(1)=n(n-1),2^{n-2}

(42) $x = a\cos\theta + \frac{b}{2}\cos 2\theta \quad \therefore y = a\sin\theta + \frac{b}{2}\sin 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos\theta + b\cos\theta}{-a\sin\theta - b\sin 2\theta}$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$ પરથી $\cos\theta$ શોધો. $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(43) $y = \sqrt{x^2+16} \;\therefore\; \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2+16\right)^{\frac{1}{2}} \quad = x(x^2+16)^{-}\frac{1}{2}$

$\therefore z = \frac{x}{x-1} \quad \therefore \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

(44) અહીં $xy = 1$, $y = \frac{1}{x}$ $\therefore x + y = x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2 \geq 2.$

$\therefore$ બધા જ $x > 0$ માટે $x + y \geq 2$ $\therefore$ ન્યુનતમ કિંમત $x > 2$

(45) gof'(x)=1 $\quad \therefore$ fog'(a)=1. $\therefore$ f'(g(a)). g'(a) $\Rightarrow$ f(b).g(a)=1. $\quad \therefore f(b) = \frac{1}{2}$.

(46) $y = \frac{1}{3}[\log(x+1) - \log(x^2 - x + 1)]$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}$

$\therefore$ પરથી A =(x+1) અને $\therefore$ B=2-x $\quad \therefore$ $AB = -x^2+x+2$

(47)

$$\frac{d}{dx}\left(3^{\log_{10}\operatorname{cosec}^{-1}x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(3^{\log_{10}\operatorname{cosec}^{-1}x}\right).\log 3.\ \frac{d}{dx}\log_{10}\operatorname{cosec}^{-1}x$$

(48) $y = \sum_{r=1}^{x} \tan^{-1}\frac{1}{1+r+r^2}$ $\quad \therefore \sum_{r=1}^{x} \tan^{-1}\left(\frac{r+1-r}{1+r(r+1)}\right)$

$\therefore (\tan^{-1}2 - \tan^{-1}) + (\tan^{-1} - \tan^{-1}) + \tan^{-1}4 - \tan^{-1}3 + \ldots\ldots\ldots + \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n$

$= \tan^{-1}(n+1) - \frac{\pi}{4}$

(49) $u = (\log_{\cos x}\sin x)(\log_{\sin x}\cos x)^{-1}$ ઓ $\quad v = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{-8}{\log 2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{-8}{\log 2} + \frac{32}{16+\pi^2}$

(50) SelfTry

(51) $e^{y}=\frac{e^2}{x^2} \Rightarrow \log e^{y}=\log\left(\frac{e^2}{x^2}\right)$ $\therefore y=2-2\log_e x$ $\therefore y=\log e^2-\log x^2$

(52) $y=x^x$ $\log y=x.\log x$ $\frac{d^2y}{dx^2}=y\left(\frac{1}{x}\right)+(1+\log x)$,

(53) $x^{13}y^7=(x+y)^{20}$ બંને બાજુ log લેતાં, $13\log x+7\log=20\log(x+y)$

(54) $x = 235[\cos t+\log\tan\frac{t}{2}]$ $\Rightarrow \frac{dx}{dt}=235\ \frac{\cos^2 t}{\sin t}$

$y = 235\cos t$ $\Rightarrow \frac{dy}{dt}= -235\sin t,$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy\,dt}{dx\,dt}= -\tan t$

(55) $2 = t^2+3t-8$ અને $-1 = 2t^2-2t-5$,
$t^2+3t-10 = 0$ અને $t^2-2t-y = 0$
$(t-2)(t+5) = 0$ અને $(t-2)(t+1) = 0$
$\left(\frac{dy}{dt}\right)t=2 \Rightarrow \left[\frac{6}{7}\right]$

(56) $x = 0$ $\therefore y = 0$ $\therefore$ છેદ બિંદના યામ (0,0)

હવે સ્પર્શકનું સમીકરણ $y-0=\left(\frac{1}{2}-e^{\circ}\right)(x-0)$ $\therefore x+2y=0$

(57) $x = a\cos^3\theta$ અને $y = a\sin^3\theta$ $\therefore \frac{dx}{d\theta}= -3a\cos^2\theta.\sin\theta$ $\therefore \frac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta.\cos\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\tan\theta$ $\therefore \frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=a$

(58) : $y=f(x)$ $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)(1,1)=2,$ $\frac{dy}{dx}=f(x)$, $\tan\theta=2$ $2x=f(x)$, $\theta=\tan^{-1}2$

(59) $\frac{dy}{d\theta}=0$ & $\frac{dx}{d\theta}\neq 0,$ $\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}$
$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{3}{2}\sin 2\theta\right)=0$

(60) $|x|$ એ x=0 આગળ વિકલનિય નથી. $\left|x-\frac{1}{2}\right|$, $|x-1|$ એ વળી, $x=\frac{1}{2}$, x=1 આગળ વિકલનિય નથી.

$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in N$ માટે tan વિકલનિય નથી. f(x) એ $0, \pi, 1, \frac{\pi}{2}$ માટે વિકલનિય નથી.

(61) $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n \therefore f'(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[x(m+n)-(mb+na)]$, $f'(x)=0$ પરથી

$x=a$ or b or $x=\dfrac{mb+na}{m+n}$

(62) $f(1)=f(3)$ પરથી સમી. મેળવો. $26a+8b=-22$..................(1) $f'(x)=3ax^2+2bx+11$

$\therefore f'\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=0 \therefore 6a+b=0 \therefore \dfrac{9}{b}=\dfrac{-1}{6}$ $\quad a=1, b=-6$

(63) $f'(x)=1+2\sin x+3\cos^2 x,\ 0\le x\le \dfrac{2\pi}{3}$ $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ અને $f\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$ મળો.

$\therefore f'(x)=0$, $2\cos x(1-3\sin x)=o.$, $\cos x=0$ or $\sin x=\dfrac{1}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ & $x=\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$

(64) $y=a\log\sec\dfrac{x}{a} \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\tan\dfrac{x}{a} \quad \therefore \left(\dfrac{dy}{dx}\right)x=a=\tan 1$

ત્યારબાદ ઢાળ બિંદુ સમી નો ઉપયોગ કરો.

(65) $\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{22}.\cos\dfrac{x}{2^3}........\infty=\dfrac{\sin x}{x}$

$\log\cos\dfrac{x}{2}+\log\cos\dfrac{x}{2^3}+.........\infty=\log\sin x-\log x$

(66) $y=(x.\log x)\log(\log x)$, $\quad \log y=\log(\log x)[\log x+\log(\log x)]$

(67) $x^m.y^n=a^{m+n}$.......(1) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$........(2)

$\therefore m\log n+n\log y=(m+n)\log a \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-my}{nx} \quad \therefore \left(\dfrac{dy}{dx}\right)(x_1,y_1)=\dfrac{-my_1}{nx_1}$

(68) $f(x)=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-1$, $f'(x)<0 \therefore (a+2)<0$ અને $4a^2-a(a+2)3a^2<0$

(69) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 y$, $\quad f(x)$ એ $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ માં વધે છે. $f(x)=-\sin 4x$

$\pi<4x<2\pi \Rightarrow \sin 4x<0 \quad \Rightarrow \sin 4x>0$

(70) $f(x)=\tan^{-1}(\sin x+\cos x)$, $\quad f'(x)=\dfrac{\cos x(1-\tan x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ માટે $f'(x)>0$, $\quad =\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

(71) $y^2 = 12(x + 2\sin\frac{x}{2})$ $\therefore y.\frac{dy}{dx} = 6\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$

$\therefore$ y = 0, $1 + \cos\frac{x}{2} = 0$ $\therefore \cos\frac{x}{2} = -1$, x = 0,2 π જે પરવલયના સમી.નું સમાધાન કરે.

(72) $y = \frac{(\alpha+x)(\beta+x)}{(\gamma+x)}$, $f(x) = \frac{(\alpha+x)(\beta+x)}{(\gamma+x)}$ $f'(x) = -\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(x+\gamma)^2} + 1$

$f''(x) = \frac{2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(x+\gamma)^3}$, $f(x) = 0$ પરથી x શોધો. $x = \sqrt{(\alpha-\gamma)+(\beta-\gamma)} - c$

(73) $\tan A.\tan B = \tan A.\tan\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = z$

$\left(\frac{d2}{dA}\right) = \tan A.\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - A\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - A\right).\sec^2 A$

હવે $\left(\frac{d2}{dA}\right) = 0$ પરથી $A = \frac{\pi}{6}$ $\therefore \left(\frac{d^2 2}{dA^2}\right) A = \frac{\pi}{6} < 0$ આ પરથી Z=1/3

(74) $y \quad a^x \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} \quad \log a \quad m_1,$

$y \quad b^x \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} \quad \log b \quad m_2, \tan\alpha = \left|\frac{m_1 + m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$.

(75) $y = \frac{1+x+\tan x}{x} = \frac{1}{x} + \tan x$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \sec^2 x$ મહત્તમ માટે $\frac{dy}{dx} = 0$ પરથી x=cosx

(76) રોલ ના પ્રમેય પરથી (1,26) માટે $f(1) = f(26) = 5$, $\therefore [1,26]$ મા રોલં ના પ્રમેય માટે $f'(x) = 0$

(77) $x \in (-1,1)$ છે. $f(-1) = f(1) = 1$, $f(x) = x^2$ માટે રોલ ના પ્રમેયની શરતનું પાલન થાય છે.

(78) $y \quad \frac{4}{3} \quad r^3 \quad \frac{dy}{dt} \quad 4 \quad r^2 \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dr}{dt} \quad 4 \quad r^2 \quad 1$

(79) $\frac{dv}{dt} = 0$ નો ઉપયોગ કરી દાખલો ગણો.

(80) y=(x-2)(x-3) હવે ,m = 225°, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 2x - 5$

(81) જો બે વક્રો પરસ્પર લંબચ્છેદી હોય તો, $a^2 - b^2 = c^2 - d^2$ નો ઉપયોગ કરો.

(82) સ્વપ્રયત્ન : અવાભિલંબ અને અભિલેબના સુત્રનો ઉપયોગ કરો.

(83) $\frac{dy}{dx}$ મેળવી આ કિંમત અભિલંબ માટે $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ નો ઉપયોગ કરો.

(84) $e^y = 1+x^2,\ y=\log(1+x)^2,\quad \frac{1+|x|^2}{2} \geq |x|,\ |m|=\frac{2|x|}{1+|x|^2}, \tan\theta \leq 1$

(85) $f(x)=ax^3+bx^2+cx, x\in(0,1)$ નું વિકલનિય વિધેય, $f'(x)=3ax^2+bx+c$
$f(0)=0$ અને $f(1)=a+b+c=0$ નો ઉપયોગ કરો.

(86) $f(x)=\frac{1}{2}-x,\ \ x<\frac{1}{2}$ ડાબા અને જમણા વિકલન સમાન થતું નથી

$=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2, x \geq 2$

(87) $f(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0},\quad \left|\frac{f(x)}{x}\right|=|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$ (શરત મુજબ)

$f'(x)=\frac{f(x)}{x}\quad ,|f(x)|\leq\frac{1x}{2},|f(x)|\leq\frac{x}{2}$

(88) $f(x)=2\log(\text{x-2})\text{-}x^2+4x+1,\qquad f'(x)=\frac{2(x-1)(x-3)(x-2)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-3)(x-2)}{(x-2)^2} f'(x)>0\qquad \therefore (x-1)(x-2)(x-3)<0$

(89) $f'(\theta)$ અને $g'(\theta)$ શોધો. $m(\theta)=\sin\theta-\theta\sin\theta,\ \ h(\theta)=\tan\theta-\theta\sec^2\theta\ \ m'(\theta)$ અને $h'(\theta)$ શોધો.

(90) $\cdot f(l)=l-e^l+\tan\frac{112\pi}{7}\qquad -1+e^l<0,$
$f'(l)>0=l=e^l>0\qquad l<0, l\in\ \ ,0)$

(91) $f(x)=\frac{a^2-1}{a^2+1}x^3\text{-}3x\text{+}5\log_e 2,\qquad f'(x)=\frac{a^2-1}{a^2+1}(3x^2)\text{-}3$

(92) $\cos x>1\text{-}\frac{2x}{\pi}$

(93) $y=\alpha\ \text{ten}^2x+\beta\cot^2\times$ અને $z=a\sin^2\theta+b\cos^2\theta,$

$y = \left(\sqrt{\alpha}\tan x - \sqrt{\beta}\cot x\right)^2 + 2\sqrt{\alpha\beta} \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

$y_{\min} = 2\sqrt{\alpha\beta} \quad \therefore \dfrac{d^2Z}{d\theta^2} = 2(a-b)\cos^2\theta\,,\ y_{\min} = z_{\max} = 2\sqrt{ab} = a$

(94) $y \quad \sec\ 1\left\{\dfrac{1}{2x^2 \quad 1}\right\}, y = 2\cos^{-1}x \quad , \ Z = \sqrt{1+3x} \quad \therefore \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+3x}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{1+3x}}{\sqrt{1x^2}} \quad \left(\dfrac{dy}{dz}\right)_x \quad \dfrac{1}{3} \qquad 0$

(95) ન્યુનતમ કિંમત =6.

(96) $f(x)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે. $f(x) = \left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4\cdot e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} > 0,$ $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

(97) x>2 માટે $f(x) = |x-1| = x-1,\ f(f(x)) = f(x-1) = |(x-1)-1|$

$f(f(x)) = f(x-1) = |(x-1)-1| \qquad = x-3,\ x \quad 3 = 3-x,\ e^x \quad 3$

(98) $y = a\sin^3\alpha \qquad x = a\cos^3\alpha \qquad \dfrac{d^2y}{d^2\alpha} = -\sec^2\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dx}$ પરથી $\dfrac{dy}{dx} = -\tan\alpha$

(99) $y = (1+x)^2 + \sin^{-1}(\sin^2 x)$, જો x=0 તો y=1, હવે x સાપેક્ષ વિકલન લેતાં,

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} = 1 \therefore$ અભિલંબનું સમીકરણ $y-1 = -1(x-0),\ x+y=1$

(100) $y = \text{ten}^{1}\left(\dfrac{(x-1)-x}{1+x(x+1)}\right) + \text{ten}^{-1}\left(\dfrac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}\right) + \text{ten}^{-1}\left(\dfrac{(x+3)-(x+2)}{1+(x+3)(x+2)}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+(x+n)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$

જવાબો

(1)	b	(2)	a	(3)	b	(4)	a
(5)	a	(6)	a	(7)	a	(8)	d
(9)	c	(10)	a	(11)	a	(12)	b
(13)	a	(14)	b	(15)	a	(16)	a
(17)	a	(18)	b	(19)	c	(20)	a
(21)	b	(22)	a	(23)	a	(24)	b
(25)	a	(26)	b	(27)	b	(28)	c
(29)	a	(30)	b	(31)	b	(32)	c
(33)	a	(34)	c	(35)	c	(36)	a
(37)	a	(38)	d	(39)	b	(40)	c
(41)	a	(42)	d	(43)	c	(44)	b
(45)	b	(46)	a	(47)	b	(48)	a
(49)	a	(50)	b	(51)	c	(52)	b
(53)	d	(54)	b	(55)	a	(56)	b
(57)	a	(58)	c	(59)	c	(60)	d
(61)	a	(62)	d	(63)	a	(64)	b
(65)	a	(66)	b	(67)	a	(68)	b
(69)	a	(70)	b	(71)	b	(72)	b
(73)	b	(74)	b	(75)	b	(76)	a
(77)	b	(78)	d	(79)	a	(80)	b
(81)	a	(82)	d	(83)	d	(84)	d
(85)	a	(86)	a	(87)	b	(88)	a
(89)	b	(90)	b	(91)	a	(92)	a
(93)	d	(94)	a	(95)	d	(96)	a
(97)	c	(98)	a	(99)	b	(100)	b

●●●

એકમ - 9

અનિયત અને નિયત સંકલન

અગત્યના મુદ્દા

૧. જો $\frac{d}{dx}(F(x)+c)=f(x)$ તો $\int f(x)\,dx = f(x)+c$ જ્યાં F(x) એ (a,b) પર વિકલનીય કોઈપણ વિધેય છે. c એ કોઈપણ વાસ્તવિક અચળ છે. c ને સ્વૈર અચળ કહે છે.

સંકલન માટે કાર્ય નિયમો :

જો f અને g અંતરાલ (a,b) પર પ્રતિવિકલનીય હોય તો f+ g પણ પ્રતિવિકલનીય છે તથા

$$\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

વ્યાપક રીતે $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots f_n$ કોઈ અંતરાલ પર સંકલનીય હોય; તો

$$\int(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots\ldots+f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx+\ldots\ldots+\int f_n(x)dx$$

૨. જો વિધેય f એ કોઈ અંતરાલ (a, b) પર સંકલનીય વિધેય હોય તથા $k\in R$ તો kf પણ સંકલનીય છે તથા

$$\int k\,(fx)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

વ્યાપક રીતે $\int\left[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\ldots\ldots+k_n f_n(x)\right]dx$

$$= k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx+\ldots\ldots+k_n\int f_n(x)\,dx$$

૩. જો f અને g એ કોઈ અંતરાલ (a, b) પર સંકલનીય હોય તો

$$\int(f(x)-g(x))dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)dx$$

- પ્રમાણીત સંકલિતો :

૧. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c;\ n\in R-\{-1\};\ x\in R^+$

n = 0 લેતાં $\int dx = x+c$

૨. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|+c;\ x\in R-\{0\}$

૩. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a}+c;\ a\in R^+-\{1\},\ x\in R$

$\int e^x dx = e^x + c;\forall\, x\in R$

૪. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c\ ;\ \ \forall\ x\in R$

૫. $\int \cos x \, dx = \sin x + c \;;\; \forall\, x \in R$

૬. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \;;\; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

૭. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c \;;\; x \neq k\pi, k \in z$

૮. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c \;;\; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\; k \in z$

૯. $\int cosecx.cotxdx = -cosecx + c,\; x \neq k\pi, k \in Z$

૧૦. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} tan^{-1} \frac{x}{a} + c \;;\; a \in R - \{0\}, x \in R$

$= -\frac{1}{a} cot^{-1} \frac{x}{a} + c_1 \;;\; a \in R - \{0\},\; x \in R$

૧૧. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c;\; a \in R - \{0\}, x \neq \pm a$

૧૨. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c;\; a \in R - \{0\}, x \neq \pm a$

૧૩. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \log\left| x + \sqrt{x^2 \pm k} \right| c \;;\; |x| > |k|$

૧૪. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c \;;\; x \in (-a, a), a > 0$

$= -\cos^{-1}\frac{x}{a} + c;\; x \in (-a, a); a > 0$

૧૫. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c \;;\; |x| > |a| > 0$

$= -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a} + c; |x| > |a| > 0$

૧૬. $\int \frac{1}{a+bx^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right) + c, (a, b > 0)$

★આદેશની રીત : $g : [\alpha, \beta] \to R$ સતત તથા (α, β) પર વિકલનિય છે. $g'(t)$ એ α, β પર સતત છે તથા $g'(t) \neq 0, \forall\, t \in (\alpha, \beta)$ વળી g નો વિસ્તાર [a, b] નો ઉપગણ હોય એટલે કે $R_g \subset [a, b]$ અને

$f : [a, b] \to R$ સતત હોય તો $x = g(t)$ લેતાં $\int f(x)dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt$

★જો $\int f(x)\, dx = F(x)$ હોય તો $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$ જ્યાં $f : I \to R$ એ અંતરાલ I માં સતત વિધેય છે. $(a \neq 0)$

★જ્યાં $\int [f(x)]^n f^1(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c;\ (n \neq -1,\ f(x) > 0)$ અને f કે f' સતત વિધેયો છે અને $f'(x) \neq 0$

★ $\int \frac{f^1(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + c$, જ્યાં f અને f' સતત વિધેયો છે. $f'(x) \neq 0,\ f(x) \neq 0$

★ $\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + c$ જ્યાં f અને f' સતત વિધેયો છે. $f(x) > 0;\ f'(x) \neq 0$

પ્રમાણિત રૂપો

૧૭. $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + c$

$= -\log|\cos x| + c \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in z$

૧૮. $\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + c \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in z$

$= -\log|\text{cosec} l| + c$

૧૯. $\int \text{cosec}\, x\, dx = \log|\text{cose}x - \cot x| + c; \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in z$

$= \log|\tan \frac{x}{2}| + c$

૨૦. $\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + c, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in z$

$= \log|\tan \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}| + c, \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in z$

ત્રિકોણમિતીય આદેશ

સંકલ્પ	આદેશ		
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\tan\theta$	અથવા	$x = a\cot\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	અથવા	$x = a\,\text{cosec}\,\theta$

$\sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad x = a \sin\theta$ અથવા $x = a \cos\theta$

$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ $\quad x = a \cos 2\theta$

$\sqrt{2ax - x^2}$ $\quad x = 2a \sin^2\theta$

$\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$ $\quad x - a = a\sin\theta$ અથવા $a\cos\theta$

વિશિષ્ટ આદેશ :

સંકલ્ય $\dfrac{1}{a + b\cos x}$; $\dfrac{1}{a + c\sin x}$ અથવા $\dfrac{1}{a + b\cos x + c\sin x}$ સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે $\tan\dfrac{x}{2} = t$ આદેશ લઈ શકાય.

★ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ :

$$\int u\ v\ dx = u\int v\,dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx$$

પ્રમાણિત રૂપો :

૨૧. $\int\sqrt{x^2 + a^2}\ dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \dfrac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

૨૨. $\int\sqrt{x^2 - a^2}\ dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

૨૩. $\int\sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c \quad (a > 0)$

૨૪. $\int e^{ax}\sin bx\ dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$

૨૫. $\int e^{ax}\cos bx\ dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$

૨૬. $\int e^{ax}\sin bx\ dx = \dfrac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(bx - \theta) + c$

જ્યાં $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$; $\theta \in (0, 2\pi)$

૨૭. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \dfrac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(bx - \theta) + c$

જ્યાં $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$; $\theta \in (0, 2\pi]$

૨૮. $\int e^x \left(f(x) + f^1(x)\right) dx = e^x f(x) + c$

નિયત સંકલન

અગત્યના મુદ્દા

સરવાળાના લક્ષની રીત

૧. $\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$

૨. $\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \dfrac{b-a}{n} i\right)$

- **નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :**

વિધેય એ [a, b] પર સતત છે તથા F એ (a, b) પર વિકલનીય વિધેય છે; $\forall x \in (a, b)$; જો $\dfrac{d}{dx} f(x) = F(x)$

તો $\int_a^b f(x) \, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

- **નિયત સંકલનનો કાર્ય નિયમો :**

૧. જો f અને g એ [a, b] પર સતત હોય તો

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

૨. જો f એ [a, b] પર સતત હોય અને $k \in R$ અચળ હોય, તો

$$\int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$$

૩. જો f એ [a, b] પર સતત હોય અને $a < c < b$ હોય ; તો

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

નિયત સંકલન માટે આદેશ :

$f:[a,\ b] \to R$ સતત વિધેય છે અને $g:[\alpha,\ \beta] \to [a,\ b]$ એ વધતું અથવા ઘટતું (એકસુત્રી) વિધેય છે. $x = g(t)$ એ $[\alpha,\ \beta]$ માં સતત અને $(\alpha,\ \beta)$ પર વિકલનીય વિધેય છે. $g'(t)$ એ $(\alpha,\ \beta)$ માં સતત છે. $g'(t) \neq 0,\ \forall t \in (\alpha,\ \beta)$ તથા $a = g(\alpha)$ અને $b = g(\beta)$ તો

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^a f(g(t))g^1(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

પ્રમેય :

૧. જો f એ $[-a,a]$ માં સતત વિધેય હોય તો

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\ f- \text{ યુગ્મ વિધેય છે.}$$

$$= 0;\ f-\text{અયુગ્મ વિધેય}$$

૨. જો f એ $[0,a]$ પર સતત હોય તો $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

૩. જો f એ $[a,b]$ પર સતત હોય તો $\int_0^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$

૪. જો વિધેય f એ $[0,2a]$ પર સતત હોય તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_b^a (2a-x)\,dx$

સંકલનનો એક ઉપયોગ

૧. વક્ર $y = f(x)$; X−અક્ષ અને રેખાઓ $x = a; x = b$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં

$I = \int_a^b f(x)dx$ અથવા $I = \int_a^b y\,dx$

૨. વક્ર $x = g(y); Y-$ અક્ષ અને રેખાઓ $y = a$ અને $y = b$ વડે આવૃત પ્રદેશનુ ક્ષેત્રફળ $A = |I|$

જ્યાં $I = \int_a^b g(y)dy$ અથવા $I = \int_a^b x.dy$

૩. જો વક્ર $y = f(x)$ એ X - અક્ષને ફક્ત (c, o) બિંદુએ છેદે; જ્યાં $a < c < b$ તો વક્ર $y = f(x);\ x = a,\ x = b$

અને X - અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2|$ જ્યાં $I_1 = \int_a^c f(x)dx; I_2 = \int_c^b f(x)dx$

૪. જો બે વક્ર $y= f_1(x)$ અને $y= f_2(x)$ પરસ્પર માત્ર $x = a$ અને $x = b\,(a \neq b)$ માટે છેદતા હોય; તો આ બે વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$

જ્યાં $I = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$

૫. જો બે વક્રો $x = g_1(y)$ અને $x = g_2(y)$ પરસ્પર માત્ર $y = a$ અને $y = b\ (a \neq b)$ માટે છેદતા હોય, તો આ બે વક્રો માટે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$

જ્યાં $I = \int_a^b (g_1(y) - g_2(y))\, dy$

એકમ - 2
સંકર સંખ્યા
અગત્યના મુદા

સંકર સંખ્યા : સંખ્યા x + iy જ્યાં x, y $\in R$ અને $i=\sqrt{-1}$ ને સંકર સંખ્યા કહેવાય છે.

સંકર સંખ્યાને વાસ્તવિક સંખ્યાની ક્રમયુક્ત જોડ $z=(x_1y)$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

$z=x+iy=(x_1y)$

→ $i=\sqrt{-1}$ ને કાલ્પનિક સંખ્યા કહે છે.

→ $i^2=-1,\quad i^3=-i\ ,\ i^4=1$

→ $i=-1/i$

→ $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\quad =i\sqrt{a}\times i\sqrt{b}\quad =-\sqrt{ab}$

→ સંકર સંખ્યાના ગણને C વડે દર્શાવાય છે.

$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$

→ z = x + iy માં

x ને z નો વાસ્તવિક ભાગ = Re(z)

y ને z નો કાલ્પનિક ભાગ = Im(z)

z = x + iy = Re(z) + i Im(z)

જો x = 0, $y\neq 0$ તો z = iy (શુદ્ધ કાલ્પનિક)

જો $x\neq 0$, y = 0 તો z = x (શુદ્ધ વાસ્તવિક)

→ $z_1 = z_2$ i.e. $x_1 + iy_1 = x_2+iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

→ સંકર સંખ્યાનું બીજગણિત :

ધારો કે $z_1 = x_1 + iy_1$ અને $z_2 = x_2 + iy_2$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે., $x_1,y_1,x_2,y_2\in R$ તો

(1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

(2) $z_1 - z_2 = (x_1- x_2) + i(y_1 - y_2)$

(3) $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

(4) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ ,\ x_2^2+y_2^2\neq 0$

→ અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા.

z = a + ib ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\overline{z}=a-ib$ વડે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

ગુણધર્મો : ધારો કે z = x + iy

(I) $\overline{\left(\overline{z}\right)}=Z$

(II) $z=\overline{z} \Leftrightarrow y=0$

(III) $z=-\overline{z} \Leftrightarrow x=0$

(IV) $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \qquad z-\overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)$

(V) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

(VI) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(VII) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}, \qquad z_2 \neq 0$

(VIII) જો $z=f(z_1)$ તો $\overline{z}=f\left(\overline{z_1}\right)$

(IX) $\left(\overline{z^n}\right)=\left(\overline{z}\right)^n$

(X) $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1} = 2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)=2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

→ **સંકર સંખ્યાનો માનાંક :** જો z = x + iy નો માનાંકને $|z|$ અથવા r વડે દર્શાવાય છે. તથા $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

<u>ગુણધર્મો :</u>

ધારો કે $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે તો

(1) $|z|\geq 0$

(2) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

(3) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

(4) $z\overline{z}=|z|^2$

(5) $-|z|\leq \operatorname{Re}(z)\leq|z|$ and $-|z|\leq \operatorname{Im}(z)\leq|z|$

(6) $|z^n| = |z|^n$

(7) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

(8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1| \big/ |z_2|$

(9) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

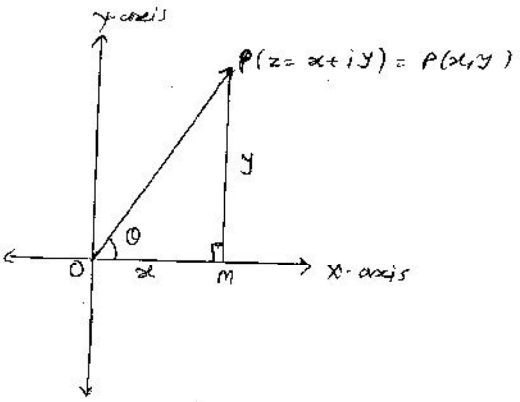
(10) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| \sim |z_2|$

(11) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

(12) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

(13) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

→ શૂન્યેત્તર સંખ્યા z = x + iy ને આર્ગેન્ડ સમતલમાં બિંદુ p(x,y) વડે દર્શાવાય છે.



→ $|z| = r = op = \sqrt{x^2 + y^2}$

→ z નો કોણાંક એ $\overline{OP}$ નો x અક્ષની ધન દિશા સાથેના ખૂણાનું માપ છે. જેને arg(z) (અથવા Amp(z)) વડે દર્શાવાય છે. i.e. $\theta = \arg(z)$

→ (i) $P(z = x + iy)$ = P(x,y) પ્રથમ ચરણ $\theta = \arg(z) = \tan^{-1} y/x$ $(x > 0,\ y > 0)$

(ii) P(z = x + iy) = P(x,y) દ્વિતીય ચરણ $\theta = \arg(z) = \pi - \tan^{-1} y/|x|$ $(x < 0,\ y > 0)$

(iii) P(z = x + iy) = P(x,y) તૃતીય ચરણ $\theta = \arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left(|y|/|x|\right)$ $(x < 0,\ y < 0)$

(iv) P(z = x + iy) = P(x,y) ચતુર્થ ચરણ $\theta = \arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{|y|}{x}\right)$ $(x > 0, y < 0)$

જો θ, z નું મુખ્ય કોણાંક હોય તો $\theta \in (-\pi, \pi]$

→ **ગુણધર્મો :**

(1) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

(3) $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2\arg(z) = \arg(z^2)$

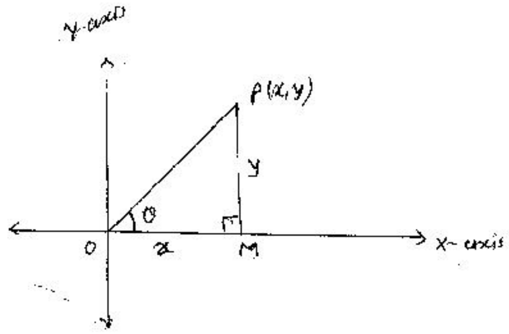
(4) $\arg(z^n) = n \arg z$

(5) $\arg \bar{z} = -\arg(z)$

(6) If $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \theta$ તો $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 2k\pi - \theta$, $k \in z$

→ **સંકર સંખ્યાનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ :-**

ધારો કે $z = x + iy$ સંકર સંખ્યાને આર્ગન્ડ સમતલમાં બિંદુ P(x,y) વડે દર્શાવતા



$OP = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$OM = x$, $PM = y$ અને $m\angle XOP = \theta$ તો $z = x + iy$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. જેને z નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ અથવા ત્રિકોણમિતિ સ્વરૂપ કહે છે.

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$

→ $z = x + iy$

$= r\cos\theta + ir\sin\theta = r.e^{i\theta}$ ને સંકર સંખ્યા z નું ઘાંતાકીય સ્વરૂપ કહે છે.

→ **DE-MOIVER'S THEOREM :**

* જો n પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તો $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

* જો n પૂર્ણાંક સંખ્યા ન હોય તો $\cos n\theta + i\sin n\theta$ એ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ની કોઈ એક કિંમત છે.

→ Euler's Theorem : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

→ z = x + iy નો લઘુગુણક :-

* log (x + iy) = $\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)+i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$

i.e.logz = log |z| + iarg (z)

* log (iy) = $\log y + i\,\pi/2$

* i = $\cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = e^{i\pi/2}$

log i = $i\pi/2$

log (log i) = log i + $\log(\pi/2)$ = $i\frac{\pi}{2}+\log\left(\pi/2\right)$

→ **એકમના બીજો :-**

* એકમના ઘનમૂળો

$z=\sqrt[3]{1}$

$\therefore z^3-1=0$

$\therefore (z-1)\ (z^2+z+1)=0$

$\therefore z=1,\ \ z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ લેતા તો $w^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

∴ એકમના ઘનમૂળો 1, w, w^2

* **ગુણધર્મો :**

(i) $1 + w + w^2 = 0$

(ii) $w^3 = 1$

(iii) $w^{3n} = 1$, $w^{3n+1} = w$, $w^{3n+2} = w^2$

(iv) $w^2 = \overline{w}$, $\left(\overline{w}\right)^2 = w$

(v) જો $a + bw + cw^2 = 0$, તો a = b = c, $a, b, c \in R$

→ **સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ :**

ધારો કે z = x +iy સંકર સંખ્યા છે તો

$$\sqrt{z}=\pm\left[\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right], y>0$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}-i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right], y<0$$

→ **સંકર સંખ્યાની ભૂમિતિ :**

(1) **અંતરસૂત્ર :**

જો $P(z_1)$ & $Q(z_2)$ આર્ગન્ડ સમતલમાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે.તો

$$PQ=|z_1-z_2|$$

(2) ત્રણ બિંદુઓ $P(z_1)$, $Q(z_2)$ & $R(z_3)$ સમરેખ છે. જો $az_1+bz_2+cz_3=0$ $(a,b,c\in R)$, તો $a+b+c=0$

(3) **રેખાનું સમીકરણ :**

$P(z_1)$ & $Q(z_2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$$

OR $$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix}=0$$

(4) બિંદુઓ $P(z_1)$ અને $Q(Z_2)$ ને જોડતાં રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ

$$z(\overline{z}_1-\overline{z}_2)+\overline{z}(z_1-z_2)=|z_1|^2-|z_2|^2$$

(5) **વર્તુળનું સમીકરણ :**

* z_1 કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $|z-z_1|=r$

* $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$, જો $k=1$, તો રેખા દર્શાવે અને $k\neq 1$ તો વર્તુળ દર્શાવે.

* સમીકરણ $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=k$ વર્તુળ દર્શાવે જો $k\geq\frac{1}{2}|z_1-z_2|^2$

* જો $A(z_1)$ અને $B(z_2)$ વ્યાસના અંત્યબિંદુઓવાળા વર્તુળનું સમીકરણ

$$(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z}_2)+(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z}_1)=0$$

* ત્રણ બિંદુઓ $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ માંથી પસાર થતાં વર્તુળનું સમીકરણ

$$\left(\frac{z-z_3}{z-z_1}\right)\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\right)=\left(\frac{\overline{z}-\overline{z}_3}{\overline{z}-\overline{z}_1}\right)\left(\frac{\overline{z}_2-\overline{z}_1}{\overline{z}_2-\overline{z}_3}\right)$$

* બિંદુઓ $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ ચક્રીય છે તો

$\left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}\right)\left(\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}\right)$ શુદ્ધ વાસ્તવિક છે.

(6) જો $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$, જ્યાં $2a>|z_1-z_2|$ તો z એ z_1 અને z_2 નાભિવાળા ઉપવલય દર્શાવે છે., $a\in R$

(7) જો $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$, જ્યાં $2a<|z_1-z_2|$ તો z એ z_1 અને z_2 નાભિવાળા અતિવલય દર્શાવે છે., $a\in R$

→ **શૂન્યેત્તર સંકર સંખ્યાનો વ્યસ્ત :**

ધારો કે $z = a + ib = (a,b) \neq (0,0)$ તો

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

ÆÜþÜ ËÜÃ `

(† ÝÃÜÑÜ´Ü ôÜ` êÜÃÜ)

1. $\int \frac{dx}{1+\tan x} =$ ________ $+c$)

(a) $\log \ |\sec x + \tan x|$ (b) $2\sec^2 \frac{x}{2}$

(c) $\log \ |x + \sin x|$ (d) $\frac{1}{2}\left[x + \log \ |\sin x + \cos x|\right]$

2. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} =$ ____________________ $+ \ c.$

(a) $2\log \left|e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}\right|$ (b) $2\log \left|e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}}\right|$ (c) $2\log \ |e^x - 1|$ (d) $\log \ |e^x + 1|$

3. $\int \frac{e^{5\log x} - e^{3\log x}}{e^{4\log x} - e^{2\log x}} dx =$ __________ $+c$

(a) $e \cdot 2^{-2x}$ (b) $e^3 \log_e x$ (c) $\frac{x^3}{3}$ (d) $\frac{x^2}{2}$

4. $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$ _________________ $+c.$

(a) $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n+1}{x^n}\right|$ (b) $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|$ (c) $\frac{1}{n}\log\left|x^n+1\right|$ (d) $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n-1}{x^n}\right|$

5. $\int \frac{\log(x+1) - \log x}{x(x+1)} dx =$ __________ $+c$

(a) $\log x - \log(x+1)$ (b) $\log(x+1) - \log x$

(c) $-\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]^2$ (d) $-\left[\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]^2$

6. $\int e^{\cot^{-1}x}\left(1-\frac{x}{1+x^2}\right)dx =$ _______________ $+ c.$

(a) $\frac{1}{2}xe^{\cot^{-1}x}$ (b) $\frac{1}{2}e^{\cot^{-1}x}$ (c) $xe^{\cot^{-1}x}$ (d) $e^{\cot^{-1}x}$

7. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\, dx =$ ____________________ $+ c.$

(a) $\frac{-2}{\sqrt{\cos x}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ (c) $\frac{-2}{3\sqrt{\cos x}}$ (d) $\frac{-3}{2\sqrt{\cos x}}$

8. $\int e^{4\log x}\left(x^5+1\right)^{-1} =$ _________ $+c$

(a) $\frac{1}{5}\log\left(x^4+1\right)$ (b) $-\log\left(x^4+1\right)$ (c) $\log\left(x^4+1\right)$ (d) $\frac{1}{5}\log\left(x^5+1\right)$

9. $\int \operatorname{cos}ec^3x\, dx =$ __________________ $+ c.$

(a) $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x\cot x+\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cosec}x+\cot x\right|$ (b) $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x\cot x$

(c) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x\cot x+\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cosec}x+\cot x\right|$ (d) $\frac{1}{2}\operatorname{cos}ecx\cot x-\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cos}ecx+\cot x\right|$

10. જો $\int \frac{2^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = k.2^{\frac{1}{x^2}} + c$ તો K = ______________

(a) $-\frac{1}{2\log 2}$ (b) $-\log 2$ (c) -2 (d) $-\frac{1}{2}$

11. $\int (x-1)e^{-x}dx =$ _________ $+c$

(a) xe^x (b) $-xe^{-x}$ (c) $-xe^x$ (d) xe^{-x}

12. $\int\left[\sin(\log x)-\cos(\log x)\right]\, dx =$ ______________ $+ c.$

(a) $\sin(\log x)-\cos(\log x)$ (b) $-x\sin(\log x)$

(c) $-x\cos(\log x)$ (d) $\sin(\log x)+\cos(\log x)$

13. $\int (x+4)(x+3)^7 dx =$ __________ $+c$

(a) $\frac{(x+3)^9}{9} - \frac{(x+3)^8}{8}$ (b) $\frac{(x+3)^8(8x+33)}{72}$ (c) $\frac{(x+3)^8(8x+33)}{72}$ (d) $\frac{(x+3)^8}{8}$

14. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x+2}} =$ __________ $+c$

(a) $2\tan^{-1}\sqrt{x+2}$ (b) $2\tan^{-1}\sqrt{x^2+3}$ (c) $2\tan^{-1}x$ (d) $2\tan^{-1}\sqrt{x^2+2}$

15. $\int \frac{e^x}{e^x+2+e^{-x}} dx =$ ____________ $+c.$

(a) $-\frac{1}{2}(e^{2x}+1)$ (b) $-\frac{1}{2}(e^{2x}+1)^{-1}$ (c) $-(e^{2x}+1)$ (d) $-(e^{2x}+1)^{-1}$ S

16. જો $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+2\sin x+1}} dx = A\log\sqrt{\sin x+1}+c$ તો A = ____________

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) -2

17. $\int \frac{dx}{e^x+1} =$ __________ $+c$

(a) $-\log\left|\frac{e^x+1}{e^x}\right|$ (b) $-\log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|$ (c) $\log\left|\frac{e^x+1}{2e^x}\right|$ (d) $\log\left|\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right|$

18. $\int \frac{\cos^8 x-\sin^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x} dx =$ ________ $+c$

(a) $-\frac{\cos 2x}{2}$ (b) $-\frac{\sin 2x}{2}$ (c) $\frac{\cos 2x}{2}$ (d) $\frac{\sin 2x}{2}$

19. $\int \frac{1}{1+(\log x)^2} d(\log x)\, dx =$ __________ $+c$

(a) $\frac{\tan^{-1}(\log x)}{x}$ (b) $\tan^{-1}(\log x)$ (c) $\frac{\tan^{-1}}{x}$ (d) $\tan^{-1}x$

20. જો $\int \frac{1+\cos 8x}{\cot 2x-\tan 2x} dx = A\cos 8x+c$ તો a = ___________

(a) $\frac{1}{16}$ (b) $-\frac{1}{8}$ (c) $-\frac{1}{16}$ (d) $-\frac{1}{8}$

21. જો $\int \frac{4e^{x}+6e^{-x}}{9e^{x}-4e^{-x}}dx = Ax + B\log\left(9e^{2x}-4\right)+c$ તો A = ________ અને B = ________

(a) $\frac{3}{2}, -\frac{35}{36}$ (b) $-\frac{3}{2}, -\frac{35}{36}$ (c) $-\frac{3}{2}, \frac{35}{36}$ (d) $\frac{3}{2}, \frac{35}{36}$

22. જો $\int \frac{dx}{sm^{6}x+\cos^{6}x} = K\tan^{-1}\left(\frac{\tan 2x}{2}\right)+c$ તો K = ________

(a) $\frac{1}{2}$ (b) -1 (c) 1 (d) $-\frac{1}{2}$

23. જો $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}dx = P\sqrt{1-x^{3/2}}+c$ તો P = ________

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{4}{3}$ (d) $-\frac{3}{4}$

24. $\int \frac{\sec x dx}{\sqrt{\sin(2x+\alpha)+\sin\alpha}} =$ ________ $+c$

(a) $\sqrt{2\sec\alpha(\tan x-\tan\alpha)}$ (b) $\sqrt{2\sec\alpha(\tan x+\tan\alpha)}$

(c) $\sqrt{2\sec\alpha(\cot x+\cot\alpha)}$ (d) $\sqrt{2\sec\alpha(\cot x-\cot\alpha)}$

25. જો $\int \frac{x^{4}+1}{x^{6}+1}dx = \tan^{-1}x + p\tan^{-1}x^{3}+c$ તો p = ________

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) -3

26. $\int \frac{\log x-1}{(\log x)^{2}}dx =$ ________ $+c$

(a) $x\log x$ (b) $-x\log x$ (c) $\frac{x}{\log x}$ (d) $\frac{-x}{\log x}$

27. $\int \frac{e^{x}\log\left(ex^{x}\right)}{x}dx =$ ________ $+ c$

(a) $\frac{e^{x}}{x}\log x^{x}$ (b) $e^{x}\log x^{x}$ (c) $e^{x}x\log x$ (d) $\log\left(xe^{x}\right)$

28. જો $\int x \operatorname{cosec}^2 x dx = P \cdot x \cot x + Q \log|\sin x| + c$ તો P + Q = ________

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) -1

29. જો $\int x^6 \log x dx = Px^7 \log x + Qx^7 + c$ તો P + Q = ________

(a) $\frac{6}{49}$ (b) $-\frac{1}{49}$ (c) $\frac{1}{49}$ (d) $-\frac{6}{49}$

30. $\int\left[\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right]dx =$ ________ $+c$.

(a) $\frac{x}{\log(\log x)}$ (b) $x+\log(\log x)$ (c) $\log(\log x)+\frac{1}{x}$ (d) $x\log(\log x)$

31. $\int\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)e^{\frac{x^2-1}{x^2}}dx =$ ________ $+c$

(a) $e^{x-\frac{1}{x}}$ (b) $e^{x+\frac{1}{x}}$ (c) $e^{\frac{1}{x}-x}$ (d) $e^{-x-\frac{1}{x}}$

32. $\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)} =$ ________ $+c$

(a) $\log\left|\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|$ (b) $\log\left|\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right|$

(c) $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

33. $\int\cos x \; d(\sin x) =$ ________ $+c$

(a) $\frac{\sin 2x}{2}-x$ (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-x\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

34. $\int\frac{e^x+xe^x}{\cos^2\left(xe^x\right)}dx =$ ________ $+c$

(a) $\log\left|e^x+xe^x\right|$ (b) $\sec\left(xe^x\right)$ (c) $\tan\left(xe^x\right)$ (d) $\cot\left(xe^x\right)$

35. જો $\int sin^3x\, dx = A\, cos^3x + B\, cosx + c$ તો A - B = __________

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

36. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$ __________ $+ c$

(a) $\log\left|e^x + e^{-x}\right|$ (b) $\tan^{-1}\left(e^x\right)$ (c) $\log\left|e^x + 1\right|$ (d) $\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)$

37. $\int e^{2x + \log x} dx =$ __________ $+ c$

(a) $\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}$ (b) $\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}$ (c) $\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}$ (d) $\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}$

38. $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} dx =$ __________ $+ c$

(a) $x \tan\frac{x}{2}$ (b) $-x \cot\frac{x}{2}$ (c) $\cot\frac{x}{2}$ (d) $-\cot\frac{x}{2}$

39. $\int \frac{5 + \log x}{(6 + \log x)^2} dx =$ __________ $+ c$

(a) $\frac{\log x}{x}$ (b) $\frac{x}{\log x + 6}$ (c) $\frac{\log x + 6}{x}$ (d) $x(\log x + 6)$

40. જો $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x} = p\ \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}\right) + c$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

41. $\int \frac{\log x}{x^2}\ dx =$ __________ $+ c.$

(a) $-\frac{1}{x}(\log x + 1)$ (b) $\frac{1}{x}(\log x + 1)$ (c) $\log\ x + 1$ (d) $-(1 + \log x)$

42. જો $\int \frac{(\cos x - \sin x)\,dx}{(\sin x + \cos x)\sqrt{\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x}}\,dx = -\operatorname{cosec}^{-1}\left[f(x)\right] + c$

તો f (x) = ________

(a) $\sin 2x + 1$ (b) $1 - \sin 2x$ (c) $\sin 2x - 1$ (d) $\cos 2x$

43. જો $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = -\frac{1}{6}\log\left|\frac{z^2 - z + 1}{(z+1)^2}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + c$ તો Z = ______________

(a) $\tan x$ (b) $\cot x$ (c) $\sin x$ (d) $\cos x$

44. $\int \sqrt{1 + \sec x}\; dx =$ ______________ $+ c.$

(a) $-2\sin^{-1}(2\cos x + 1)$ (b) $-\sin^{-1}(2\cos x - 1)$

(c) $\sin^{-1}(2\cos x - 1)$ (d) $\cos^{-1}(2\cos x - 1)$

45. $\int \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx = \sqrt{2}\ \sin^{-1}($_________$) + c.$

(a) $\sin x - \cos x$ (b) $\cos x - \sin x$ (c) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$ (d) $\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}.$

46. $\int \frac{\left(x^5 - x\right)^{1/5} dx}{x^6} =$ _________ $+ c$

(a) $\frac{5}{24}\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{6}{5}}$ (b) $\frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}$ (c) $\frac{5}{24}\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}$ (d) $\frac{5}{24}\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{6}$

47. $\int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}} =$ __________ $+ c$

(a) $2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ (b) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ (c) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ (d) $2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

48. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}\,dx =$ ________ $+ c$

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$ (c) $\tan^{-1}(x+1)$ (d) $\tan^{-1}(x-1)$

49. $\int\sqrt{\dfrac{\sin x-\sin^3 x}{1-\sin^3 x}}dx=$ ________ $+c$

(a) $\dfrac{2}{3}\sin^{-1}\left(\sin^{\frac{3}{2}}x\right)$ (b) $\dfrac{2}{3}\sin^{-1}\left(\cos^{3/2}x\right)$ (c) $\dfrac{-3}{2}\sin^{-1}\left(\sin^{\frac{3}{2}}x\right)$ (d) $\dfrac{3}{2}\sin^{-1}\left(\sin^{\frac{3}{2}}x\right)$

50. $\int\cot^{-1}\sqrt{x}\ dx=$ ____________ $+c.$

(a) $(x+1)\cot^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x}$

(b) $(x+1)\cot^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

(c) $x\cot^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

(d) $\sqrt{x}\left(\cot^{-1}\sqrt{x}-x\right)$

51. $\int\cot^{-1}\sqrt{x}\,dx=$ __________ $+c$

(a) $\dfrac{x}{1+\log x}$ (b) $x(1+\log x)$ (c) $\dfrac{x}{\log x}$ (d) $x\log x+x^{-1}$

52. $\int\dfrac{x^2}{(x^2+2)(x^2+3)}\ dx=$ ___________ $+c.$

(a) $\sqrt{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

(b) $\sqrt{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

(c) $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

(d) $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

53. $\int\dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}dx=$ _________ $+c$

(a) $\dfrac{3}{5}x^{5/3}-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x$ (b) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x$ (c) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x$ (d) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x$

54. જો $\int\dfrac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos^{-1}\left[f(x)\right]+c$ તો f(x) = _________

(a) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ (c) $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ (d) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

55. $\int \frac{\cot x dx}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}} =$ _______ $+ c$

(a) $\frac{1}{2}\log\left|\cot^2 x + \sqrt{\cot^4 + 1}\right|$ (b) $-\frac{1}{2}\log\left|\cot^2 x + \sqrt{\cot^4 + 1}\right|$

(c) $\frac{1}{2}\log\left|\tan^2 x + \sqrt{\tan^4 + 1}\right|$ (d) $-\frac{1}{2}\log\left|\cot x + \sqrt{\cot^4 + 1}\right|$

56. $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx =$ __________ $+ c$

(a) $e^x\left(1+x^2\right)$ (b) $\frac{e^x}{1+x^2}$ (c) $e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$ (d) $e^x\left(1-x^2\right)$

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x \sin(x+\alpha)}} =$ ___________ $+ c$

(a) $2\sec\alpha\sqrt{\sin\alpha + \cos\alpha\tan x}$ (b) $\sec\alpha\sqrt{\sin\alpha + \cos\alpha\tan x}$

(c) $\sqrt{\sin\alpha + \cos\alpha\tan x}$ (d) $2\sqrt{\sin\alpha + \cos\alpha\tan x}$

58. જો $\int \frac{dx}{1-\cos^4 x} = -\frac{1}{2}\cot x + A\tan^{-1}\left(f(x)\right) + c$ તો A = __________ અને f(x) = _______

(a) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ and $\sqrt{2}\cot x$ (b) $\sqrt{2}$ and $\sqrt{2}\tan x$

(c) $-\sqrt{2}$ and $\sqrt{2}\tan x$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ and $\sqrt{2}\tan x$

59. $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x} e^{\frac{-x}{2}} dx =$ _________ $+ c$

(a) $e^{\frac{-x}{2}}\sec\frac{x}{2}$ (b) $-e^{\frac{-x}{2}}\sec\frac{x}{2}$ (c) $-2e^{\frac{-x}{2}}\sec\frac{x}{2}$ (d) $2e^{\frac{-x}{2}}\sec\frac{x}{4}$

60. $\int \frac{dx}{(x+2)^{\frac{12}{13}}(x-5)^{\frac{14}{13}}} =$ ____________ $+ c.$

(a) $\frac{-13}{7}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{\frac{1}{13}}$ (b) $\frac{13}{7}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{\frac{1}{13}}$ (c) $\frac{13}{7}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{\frac{1}{13}}$ (d) $\frac{-13}{7}\left(\frac{x-5}{x-2}\right)^{\frac{1}{13}}$

61. $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2} =$ __________ $+ c$

(a) $\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$ (b) $\frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x + \cos x}$ (c) $\frac{x\sin x - \cos x}{x\sin x + \cos x}$ (d) $\frac{x\sin x + \cos x}{x\sin x - \cos x}$

62. $\int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx =$ __________ $+ c$

(a) $(x+1)e^{x+\frac{1}{x}}$ (b) $(x-1)e^{x+\frac{1}{x}}$ (c) $-x\, e^{x+\frac{1}{x}}$ (d) $x\, e^{x+\frac{1}{x}}$

63. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\, dx = k_1\sqrt{x^2+4x+10} + k_2 \log\left|(x+2) + \sqrt{x^2+4x+10}\right| + c$

તો $k_1 + k_2 =$ __________

(a) -1 (b) -2 (c) 1 (d) 2

64. $\int (1-\cos x)\operatorname{cosec}^2 x\, dx =$ __________ $+ c$

(a) $\tan\frac{x}{2}$ (b) $\cot\frac{x}{2}$ (c) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$ (d) $2\tan\frac{x}{2}$

65. $\int \frac{dx}{(2\sin x + 3\cos x)^2} =$ ____________ $+ c$

(a) $-\frac{1}{2\tan x + 3}$ (b) $\frac{1}{2\tan x + 3}$ (c) $-\frac{1}{2(2\tan x + 3)}$ (d) $\frac{1}{2(2\tan x + 3)}$

66. જો $f(x) = \cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 + - - - \infty$ તો $\int f(x)dx =$ ______ $+ c$

(a) $\tan\frac{x}{2}$ (b) $x + \tan\frac{x}{2}$ (c) $x - \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$ (d) $x - \tan\frac{x}{2}$

67. $\int \frac{e^x dx}{(e^x+2012)(e^x+2013)} =$ _________ $+ c$

(a) $\log\left(\frac{e^x+2012}{e^x+2013}\right)$ (b) $\log\left(\frac{e^x+2013}{e^x+2012}\right)$ (c) $\frac{e^x+2012}{e^x+2013}$ (d) $\frac{e^x+2013}{e^x+2012}$

68. જો $\int \frac{x^{2011} \tan^{-1} x^{2012}}{1+x^{4024}} \, dx = k \tan^{-1}\left(x^{2012}\right) + c$ તો $k =$ ________

(a) $\frac{1}{2012}$ (b) $-\frac{1}{2012}$ (c) $\frac{1}{4024}$ (d) $-\frac{1}{4024}$

69. $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x} =$ ________ $+ c$

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)\right|$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)\right|$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right|$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$

70. જો $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin(x-\alpha)} = Ax + B \log \left|\sin(x-\alpha)\right| + c$ તો $A^2 + B^2 =$ ________

(a) 1 (b) 0 (c) $\cos^2 \alpha + 1$ (d) $\sin^2 \alpha + 1$

71. જો $\int \frac{5^x \, dx}{\sqrt{25^x - 1}} = k \log \left|5^x + \sqrt{25^x - 1}\right| + c$ તો $k =$ ________

(a) $\log \frac{1}{5}$ (b) $\log_e 5$ (c) $\log 25$ (d) $\log_e \frac{1}{25}$

72. જો $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = f(x) - \log\left(1+x^2\right) + c$ તો $f(x) =$ ________

(a) $x \tan^{-1} x$ (b) $-x \tan^{-1} x$ (c) $2x \tan^{-1} x$ (d) $-2x \tan^{-1} x$

73. જો $\int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}} dx = k \cdot \frac{1}{2}\left[\sqrt{x - x^2} - (1-2x)\sin^{-1}\sqrt{x}\right] - x + c$

તો $k =$ ________

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{4}{\pi}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2}{\pi}$

74. જો $\int \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx = A \sin^{-1} x + Bx\sqrt{1-x^2} + c$ તો $A + B =$ ________

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (d) $-\frac{1}{2}$

75. જો $\int \frac{\left(1+x^{n}\right)^{1/n}}{x^{n+2}}dx = a\left(1+\frac{1}{x^{4}}\right)^{b} + c$ તો a + b = ______________.

(a) $\frac{6}{5}$ (b) $\frac{11}{10}$ (c) $\frac{21}{10}$ (d) $\frac{16}{13}$

76. ¡ å $\int 5^{5^{5^{x}}} 5^{5^{x}} 5^{x} dx = k5^{5^{5^{x}}} + c$ તો k = _____________ તો

(a) $(\log_e 5)^{-1}$ (b) $(\log_e 5)^{-2}$ (c) $(\log_e 5)^{-3}$ (d) $(\log_e 5)^{-4}$

77. $\int \sqrt{1+\cos ec x}\, dx =$ __________ $+ c$

(a) $2\sin^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$ (b) $2\cos^{-1}\left(\sqrt{\sin x}\right)$ (c) $2\sin^{-1}\left(\sqrt{\sin x}\right)$ (d) $2\cos^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos ec^{2}x}} =$ __________ $+ c$

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)$

79. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$ ___________ $+ c$

(a) $2^{\sqrt{x}} \log_{2}^{e}$ (b) $2^{\sqrt{x}} \log_{e}^{2}$ (c) $2^{\sqrt{x}+1} \log_{2}^{e}$ (d) $2^{\sqrt{x}+1} \log_{e}^{2}$

80. જો $\int \cos ec\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos ec\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx = k\left[\log\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right| - \log\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\right] + c$

તો k =____________

(A)2 (b) -2 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

81. $\int \frac{dx}{\left(\sin^{5}x\cos^{7}x\right)^{1/6}} =$ __________ $+ c$

(a) $4(\tan x)^{1/4}$ (b) $6(\tan x)^{\frac{1}{6}}$ (c) $4(\tan x)^{\frac{1}{6}}$ (d) $6(\cot x)^{\frac{1}{6}}$

82. $\int e^x \left[\dfrac{x^3-x-2}{\left(x^2+1\right)^2}\right] dx =$ ___________ $+c$

(a) $e^x\left(\dfrac{2x-1}{x^2+1}\right)$ (b) $e^x\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$ (c) $e^x\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$ (d) $e^x\left(\dfrac{2x-2}{x^2+1}\right)$

83. $\int \dfrac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)} \dfrac{dx}{\sqrt{e^x+1+e^{-x}}} =$ _________ $+c$

(a) $\tan^{-1}\left(e^x+e^{-x}\right)$ (b) $\sec^{-1}\left(e^x+e^{-x}\right)$ (c) $2\tan^{-1}\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)$ (d) $2\sec^{-1}\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)$

84. $\int \dfrac{dx}{x^{\frac{1}{5}}\sqrt{x^{\frac{8}{5}}-1}} =$ __________ $+c$

(a) $\dfrac{5}{4}\log\left|x^{\frac{4}{5}}+\sqrt{x^{\frac{8}{5}}-1}\right|$

(b) $\dfrac{-5}{4}\log\left|x^{\frac{4}{5}}+\sqrt{x^{\frac{8}{5}}-1}\right|$

(c) $\dfrac{4}{5}\log\left|x^{\frac{4}{5}}+\sqrt{x^{\frac{8}{5}}-1}\right|$

(d) $\dfrac{-4}{5}\log\left|x^{\frac{4}{5}}+\sqrt{x^{\frac{8}{5}}-1}\right|$

85. જો $\int\left(x^{30}+x^{20}+x^{10}\right)\left(2x^{20}+3x^{10}+6\right)^{\frac{1}{10}}dx = k\left(2x^{30}+3x^{20}+6x^{10}\right)^{\frac{11}{10}}+c$

તો $k =$ __________

(a) $\dfrac{1}{60}$ (b) $-\dfrac{1}{60}$ (c) $\dfrac{1}{66}$ (d) $-\dfrac{1}{66}$

86. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-4)(7-x)}} =$ _________ $+c$ $(4 < x < 7)$

(a) $2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ (b) $2\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ (c) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ (d) $-\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$

87. જો $\int \frac{2012x+2013}{2013x+2012}dx = \frac{2012}{2013}x + k\log|2013x+2012| + c$ તો $k =$ _______

(a) $\frac{4025}{2013}$ (b) $\frac{4025}{(2013)^2}$ (c) $-\frac{4025}{2013}$ (d) $-\frac{4025}{(2013)^2}$

88. જો $\int \frac{2\sin x + \cos x}{7\sin x - 5\cos x}dx = ax + b\log|7\sin x - 5\cos x| + c$

તો $a-b =$ _______

(a) $\frac{4}{37}$ (b) $-\frac{4}{37}$ (c) $\frac{8}{37}$ (d) $-\frac{8}{37}$

89. જો $\int \frac{\cos 9x + \cos 6x}{2\cos 5x - 1}dx = k_1 \sin 4x + k_2 \sin x + c$ તો $4k_1 + k_2 =$ _______

(A) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5

90. $\int \frac{dx}{(x\tan x + 1)^2} =$ _____________ $+ c$

(a) $\frac{\tan x}{x\tan x + 1}$ (b) $\frac{\cot x}{x\tan x + 1}$ (c) $\frac{-\tan x}{x\tan x + 1}$ (d) $-\frac{1}{x\tan x + 1}$

91. $\int \sqrt{1 + \sin\frac{x}{4}}\ dx =$ ___________ $+ c.$

(a) $8\left(\sin\frac{x}{8} + \cos\frac{x}{8}\right)$ (b) $\sin\frac{x}{8} + \cos\frac{x}{8}$ (c) $\frac{1}{8}\left(\sin\frac{x}{8} - \cos\frac{x}{8}\right)$ (d) $8\left(\sin\frac{x}{8} - \cos\frac{x}{8}\right)$

92. $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)^2} =$ _______________ $+ c$

(a) $\log\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| - \frac{1}{1+xe^x}$ (b) $\log\left|\frac{xe^x+1}{xe^x}\right| + \frac{1}{1+xe^x}$

(c) $\log\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + \frac{1}{1+xe^x}$ (d) $\log\left|\frac{1+xe^x}{xe^x}\right| - \frac{1}{1+xe^x}$

93. $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}+2} =$ ________________ $+c$

$(a) -\frac{1}{e^{x}+1}$ $(b) \frac{1}{e^{x}+1}$ $(c) -\frac{2^{x}}{e^{x}+1}$ $(d) \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

94. જો $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\frac{dx}{x} = k\log\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right| - \cos^{-1}\sqrt{x} + c$

(a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) -2

95. $\int \frac{(x+2)^{2}}{(x+4)} e^{x} dx =$ ______________ $+ c$

$((a) e^{x}\left(\frac{x}{x+4}\right)$ $(b) e^{x}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$ $(c) e^{x}\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$ $(d) \frac{2xe^{2}}{x+4}$

96. જો $\int \frac{2e^{x}+3e^{-x}}{3e^{x}+4e^{-x}} dx = Ax + B\log\left|3e^{2x}+4\right| + c$ તો A + B = ________________

(a) $\frac{11}{24}$ (b) $\frac{13}{24}$ (c) $\frac{15}{24}$ (d) $\frac{17}{24}$

97. જો $\int \frac{dx}{1+\tan^{4}x} = k\log\left|\frac{\sec^{2}x-\sqrt{2}\tan x}{\sec^{2}x+\sqrt{2}\tan x}\right| + \frac{x}{2} + c$ તો K = ______________

(a) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (b) $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

98. જો $\int \frac{3^{x}-1}{3^{x}+1} dx = k\log\left|3^{x/2}+3^{-x/2}\right| + c$ તો k = ____________

(a) $\log_{3}^{e}$ (b) $\log_{e}^{3}$ (c) $2\log_{3}^{e}$ (d) $2\log_{e}^{3}$

99. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^{4}x+\cos^{4}x} dx =$ __________ $+ c$

(a) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\tan x}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan x\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(\tan^{2}x\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(2\tan x\right)$

100. $\int e^{2x}(1+\tan x)^2\, dx =$ ________ $+ c$

(a) $\tan e^x$ (b) $\tan x e^{2x}$ (c) $\tan\frac{x}{2}e^x$ (d) $\tan\frac{x}{2}e^{-x}$

101. $\int \frac{2x^{12}+8x^9}{(x^5+x^3+1)^2}\, dx =$ ____________ $+ c$

$(a)\ \frac{x^{10}+x^5}{(x^5+x^3+1)^2}$ $(b)\ \frac{x^5-x^{10}}{(x^5+x^3+1)^2}$ $(c)\ \frac{x^{10}}{2(x^5+x^3+1)^2}$ $(d)\ \frac{x^5}{2(x^5+x^3+1)^2}$

102. $\int \frac{1}{\tan x+\cot x+\sec x+\operatorname{cosec} x}\, dx =$ ____________ $+ c$

$(a)\ \frac{1}{2}(\cos x-\sin x)+\frac{x}{2}$ $(b)\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{x}{2}$

$(c)\ \frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{x}{2}$ $(d)\ \frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{x}{2}$

103. $\int \frac{\sec^{\frac{3}{2}}\theta-\sec^{\frac{1}{2}}\theta}{2+\tan^2\theta}\tan\theta\, d\theta =$ ____________ $+ c$

$(a)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\log_e\left|\frac{\sec\theta-\sqrt{2\sec\theta}+1}{\sec\theta+\sqrt{2\sec\theta}+1}\right|$ $(b)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\log_e\left|\frac{\sec\theta+\sqrt{2\sec\theta}+1}{\sec\theta-\sqrt{2\sec\theta}+1}\right|$

$(c)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\log_e\left|\frac{\sec\theta-\sqrt{2\sec\theta}-1}{\sec\theta+\sqrt{2\sec\theta}-1}\right|$ $(d)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\log_e\left|\frac{\sec\theta+\sqrt{2\sec\theta}-1}{\sec\theta-\sqrt{2\sec\theta}-1}\right|$

104. $\int \frac{\sec^2 x-2009}{\sin^{2009} x}\, dx =$ ____________ $+ c$

$(a)\ \frac{\cot x}{\sin^{2009} x}$ $(b)\ \frac{-\cot x}{\sin^{2009} x}$ $(c)\ \frac{\tan x}{\sin^{2009} x}$ $(d)\ \frac{-\tan x}{\sin^{2009} x}$

105. $\int x^{27}(1+x+x^2)^6(6x^2+5x+4)dx =$ ____________ $+ c$

$(a)\ \frac{(x^4+x^3+x^2)^7}{7}$ $(b)\ \frac{(x^4+x^5+x^6)^7}{7}$ $(c)\ \frac{(x+x^3+x^5)^7}{7}$ $(d)\ \frac{(x^5+x^6+x^7)^7}{7}$

106. $\int \frac{1}{x^2(x^4+1)^{3/4}}\,dx =$ ____________ $+ c$

$(a)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1/4}$ $(b)(x^4+1)^{1/4}$ $(c)\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^{1/4}$ $(d)-\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1/4}$

107. $\int \frac{dx}{x^4+x^3} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$

$(a) A=\frac{1}{2}, B=1$ $(b) A=1, B=\frac{1}{2}$ $(c)\ A=-\frac{1}{2}, B=1$ $(d) A=-1, B=-\frac{1}{2}$

108. $\int \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x\, dx =$ ____________ $+ c$

$(a)\frac{\sin 16x}{1024}$ $(b)-\frac{\cos 32x}{1024}$ $(c)\ \frac{\cos 32x}{1096}$ $(d)-\frac{\cos 32x}{1096}$

109. $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}\,dx = A\cos x + B\log|f(x)|+c$

$(a) A=\frac{1}{4}, B=\frac{1}{\sqrt{2}}, f(x)=\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}$ $(b) A=-\frac{1}{2}, B=\frac{-3}{4\sqrt{2}}, f(x)=\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}$

$(c)\ A=-\frac{1}{2}, B=\frac{3}{\sqrt{2}}, f(x)=\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}$ $(d) A=\frac{1}{2}, B=\frac{-3}{4\sqrt{2}}, f(x)=\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}$

110. $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx = A\log|x| + \frac{B}{1+x^2}+c.$ *then* $A=$ ____, $B=$ ____

$(a) A=1; B=-1$ $(b) A=-1; B=1$ $(c)\ A=1; B=1$ $(d) A=-1; B=-1$

સૂચનો

(અનિયત સંકલન)

૧. $\dfrac{1}{1+\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right]$

૨. $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = \dfrac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}}$ આદેશ $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = t$ લેતાં

૩. $\dfrac{e^{5\log x} - e^{3\log x}}{e^{4\log x} - e^{2\log x}} = \dfrac{x^5 - x^3}{x^4 - x^2} = x$

૪. $\dfrac{1}{x\left(x^n+1\right)} = \dfrac{x^{n-1}}{x^n\left(x^n+1\right)}$ માં આદેશ $x^n = t$ લેતાં

૫. આદેશ $\log(x+1) - \log x = t$ લેતાં

૬. $e^{\cot^{-1}x}\left[1 - \dfrac{x}{1+x^2}\right] = e^{\cot^{-1}x} - \dfrac{x}{1+x}\cot^{-1}x$ $e^{\cot^{-1}x}$ નુ ખંડશઃ સંકલન કરવુ.

૭. $\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} = \left(\cos x\right)^{\frac{-3}{2}}\sin x$ આદેશ $\cos x = t$ લેતાં

૮. $e^{4\log x}\left(x^5+1\right)^{-1} = \dfrac{x^4}{x^5+1}$; $x^5 + 1 = t$ લેતાં

૯. $\operatorname{cosec}^3 x = \operatorname{cosec}^2 x\sqrt{1+\cot^2 x}$; $\cot x = t$ લેતાં

૧૦. $\dfrac{2^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$; $2^{\frac{1}{x^2}} = t$ લેતાં

૧૧. $(x-1)e^{-x} = xe^{-x} - e^{-x}$ માં xe^{-x} નું ખંડશઃ સંકલન કરતાં

૧૨. $\sin(\log x) - \cos(\log x)$; માં $\log x_e = t$ લેતાં $x = e^t$

૧૩. $(x+4)(x+3)^7 = [x+3+1][x+3]^7$

$= (x+3)^8 + (x+3)^7$

૧૪. $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}$; $x + 2 = t^2$ લેતાં

૧૫. $\int \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$; $e^x + 1 = \ell$ લેતાં

૧૬. $\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 2\sin x + 1}}$; $\sin x = t$ લેતાં

૧૭. $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$; $1 + e^{-x} = t$ લેતાં

૧૮. $\sin^8 x - \cos^8 x = (1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)\cos 2x$

૧૯. આદેશ $\log_c^x = t$ લેતાં $d(\log x) = dt$

૨૦. $\frac{1 + \cos 8x}{\cot 2x - \tan 2x} = \frac{2\cos^2 4x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} \times \sin 2x \cos 2x = \frac{\sin 8x}{2}$

૨૧. $9e^{2x} - 4 = t$ લેતાં

૨૨. $\frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{1}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{4 - 3\sin^2 2x} = \frac{4\sec^2}{4 + \tan^2 2x}$ અહીં $\tan 2x = t$ લેતાં

૨૩. $1 - x^{\frac{3}{2}} = t^2$ લેતાં

૨૪. $\frac{\sec x}{\sqrt{\sin(2x + \alpha) + \sin\alpha}} = \frac{\sec x}{\sqrt{2\sin(x + \alpha)\cos x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{2\tan x + \cos\alpha + \sin x}}$

$2\tan x \cos\alpha + \sin\alpha = t^2$ લેતાં

૨૫. $\frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} = \frac{x^4 - x^2 + 1 + x^2}{x^6 + 1} = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{x^2}{x^6 + 1}$

બીજા ભાગ માટે $x^3 = t$ લેતાં

૨૬. $\frac{\log_e^x - 1}{(\log_e^x)^2}$; $\log_e^x = t$ આદેશ $x = e^t$ લેતાં

૨૭. $\frac{e^x}{x}\log(ex^x) = \frac{e^x}{x}\left[\log_e^e + x\log x\right] = e^x\left[\frac{1}{x} + \log x\right]$

૨૮. ખંડશઃ સંકલન $U = x,\ V = \operatorname{cosec}^2 x$

૨૯. $x^6 \log_e^x$; ખંડશઃ સંકલન

૩૦. $\log(\log x) + \frac{1}{\log x}$; $\log_e^x = t$ આદેશ

$\therefore\ x = e^t$

૩૧. $\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) e^{\frac{x^2-1}{x}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right) e^{x-\frac{1}{x}}$; $x - \frac{1}{x} = t$ આદેશ

૩૨. $\frac{x^2-1}{(x^4+3x^2+1)\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$; $x + \frac{1}{x} = t$ લેવાં આદેશ

૩૩. $\cos x\, d(\sin x) = \cos x \cos x = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

૩૪. આદેશ $x\, e^x = t$

૩૫. $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \sin x - \sin x \cos^2 x$ બીજા ભાગમાં $\cos x = t$

૩૬. $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ આદેશ $e^x = t$

૩૭. $e^{2x+\log x} = e^{2x}.\, x$ (ખંડશઃ સંકલન)

૩૮. $\frac{x-\sin x}{1-\cos x} = \frac{x - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = x.\,\frac{1}{2}\,\mathrm{cosec}^2\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$ ખંડશઃ સંકલન

૩૯. $\frac{5+\log x}{(6+\log x)^2}$ અહીં $\log_e^x = t$ આદેશ લેતાં $x = e^t$

૪૦. $\frac{1}{5+4\cos x}$ આદેશ $\tan\frac{x}{2} = t$

૪૧. $\frac{\log x}{x^2}$, $\log_e^x = t \Rightarrow x = e^t$; ખંડશઃ સંકલન કરવું

૪૨. $\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)\sqrt{\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x}}$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2 \sqrt{\left(\sin x \cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x) \sqrt{(1 + \sin 2x)^2 - 1}}$$; આદેશ $1 + \sin 2x = t$ લેતાં

૪૩. $\frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\operatorname{cosec}^2 x \cdot \cot x}{1 + \cot^3 x}$ આદેશ $\cot x = t$ લેતાં (અપૂર્ણાંશની રીત)

૪૪. $\sqrt{1 + \sec x} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\cos x}}$ આદેશ લેવું.

૪૫. $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)\sqrt{2}}{\sqrt{1 - (1 - 2\sin x \cos x)}} = \frac{\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

આદેશ $\sin x - \cos x = t$ લેતાં

૪૬. $\frac{(x^5 - x)^{\frac{1}{5}}}{x^6} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}}{x^5}$ આદેશ $1 - \frac{1}{x^4} = t$

૪૭. $\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}} (x - 2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{\frac{3}{2}} (x-2)^2}$ આદેશ $\frac{x-1}{x-2} = t$

૪૮. $\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1}$ આદેશ $x - \frac{1}{x} = t$

૪૯. $\sqrt{\frac{\sin x - \sin^3 x}{1 - \sin^3 x}} = \frac{\sqrt{\sin x}\,\cos x}{\sqrt{1 - \left(\sin^{\frac{3}{2}} x\right)^2}}$ આદેશ $\sin^{\frac{3}{2}} x = t$

૫૦. ખંડશઃ સંકલન કર્યા પછી બીજા ભાગ માટે $x = t^2$ આદેશ

૫૧. $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$; $\log_e^x = t \Rightarrow x = e^t$ આદેશ

૫૨. $\frac{x^2}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{3(x^2+2) - 2(x^2+3)}{(x^2+2)(x^2+3)}$ (અપૂર્ણાંશની રીત)

૫૩. $\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\left(1 - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{1+\sqrt[3]{x}} = 1 - x^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$

૫૪. $\frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2}\, t^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ આદેશ લેતાં $x\,dx = \frac{-2t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}$

૫૫. $\frac{\cot x}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}} = \frac{\cot x.\cos ex^2 x}{\sqrt{1+\cot^4 x}}$ આદેશ $\cot^2 x = y$

૫૬. $e^x\left[\frac{1-x}{1+x^2}\right]^2 = e^x\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right]$; $\int e^x\left(f(x) + f'(x)\right)dx = e^x f(x)$

૫૭. $\frac{1}{\sqrt{\cos^3 x \sin(x+\alpha)}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sin\alpha + \cos\alpha \tan x}}$; આદેશ $\sin\alpha + \cos\alpha \tan x = t^2$

૫૮. $\frac{1}{1-\cos^4 x} = \frac{1}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x}$

૫૯. $\frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}\, e^{-\frac{x}{2}}$ આદેશ $-\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = -2t$

૬૦. $\frac{1}{(x+2)^{\frac{12}{13}}(x-5)^{\frac{14}{13}}(x-5)^{\frac{14}{13}}} = \frac{1}{\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{\frac{12}{13}}(x-5)^2}$ આદેશ $\frac{x+2}{x-5} = t$

૬૧. $\frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2} = \frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2}$ ખંડશઃ સંકલન

$u = \frac{x}{\cos x}$; $v = \frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2}$

૬૨. $\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}} = e^{x+\frac{1}{x}} + x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\ x + \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ $u = x$ અને $v = e^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

૬૩. $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

૬૪. $(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2 x = \cos e^2 x - \cos ec.\cot x$

૬૫. $\frac{1}{(2\sin x+3\cos x)^2} = \frac{\sec^2 x}{(2\tan x+3)^2}$ આદેશ $\tan x = t$

૬૬. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$ $\therefore \overset{lin}{h\to\infty} Sn - \frac{a}{1-r}$ $a = \cos x$

૬૭. $\frac{e^x}{(e^x+2012)(e^x+2013)}$, આદેશ $e^x + 2012 = t$

૬૮. $\frac{x^{2011}\tan^{-1}x^{2012}}{1+x^{4024}}$ આદેશ $\tan^{-1}x^{2012}$

૬૯. $\frac{1}{\cos x - \sin x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)$$

૭૦. $\frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)} = \frac{\sin(x-\alpha+\alpha)}{\sin(\alpha-\alpha)} = \cos\alpha + \sin\alpha.\cot(x-\alpha)$

૭૧. $\frac{5^2}{\sqrt{(5^x)^2-1}}$ આદેશ $5^x = t$

૭૨. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $x = \tan\theta$

૭૩. $\frac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}} = \frac{4}{n}\sin^{-1}\sqrt{x}-1$

૭૪. $\sin^{-1}\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ આદેશ $x = \cos 2\theta$ પછી ખંડશઃ સંકલન

૭૫. $\dfrac{\left(1+x^n\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{n+2}} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{n+1}}$ $x^{-n}+1 = t$ લેતાં

પછી n = 4 લેતાં

૭૬. $5^{5^{5^x}} 5^{5^x} 5^x$; $5^{5^{5^x}} = t$ આદેશ

૭૭. $\sqrt{1+\operatorname{cosec} x} = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{\sin x}}$, આદેશ $\sin x = t^2$

૭૮. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cosec}^2 x}} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$ આદેશ $\cos x = t$

૭૯. $\dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; $x = t^2$ આદેશ લેતાં

૮૦. $\operatorname{cosec}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\operatorname{cosec}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

૮૧. $\dfrac{1}{\left(\sin^5 x\cos^7 x\right)^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{\sec^2 x}{(\tan x)^{\frac{5}{6}}}$ આદેશ $\tan x = t$

૮૨. $e^x\left[\dfrac{x^3-x-2}{\left(x^2+1\right)^2}\right] = e^x\left[\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{1-2x-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right]$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

$\int e^x\left(f(x)+f'(x)dx = e^x f(x)\right)$

૮૩. $\dfrac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1+e^{-x}}} = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}}{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)\sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)^2-1}}$ આદેશ $e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}} = t$

૮૪. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}\sqrt{x^{\frac{8}{5}}-1}}$, $x^{\frac{4}{5}} = t$ આદેશ

૮૫. $\left(x^{30}+x^{20}+x^{10}\right)\left(2x^{20}+3x^{10}+6\right)^{\frac{1}{10}}=\dfrac{\left(x^{30}+x^{20}+x^{10}\right)\left(2x^{30}+20^{20}+6x^{10}\right)^{\frac{1}{10}}}{x}$

આદેશ $2x^{30}+3x^{20}+6x^{10}=t$ લેતાં

૮૬. $\dfrac{1}{\sqrt{(x-4)(7-x)}}$; આદેશ $x-4=t^2$, $4<4<7$

૮૭. $\dfrac{2012\,x+2013}{2013x+2012}$; અંશ $=$ A (છેદનું વિકલન) + B

૮૮. $\dfrac{2\sin x+\cos x}{7\sin x-5\cos x}$; અંશ A (છેદ) + B (છેદનું વિકલન)

૮૯. $\dfrac{\cos 9x+\cos 6x}{2\cos 5x-1}=\dfrac{2\cos\frac{15}{2}\cos\frac{3x}{2}}{4\cos^2\frac{5x}{2}-3}=\dfrac{2\left[4\cos^3\frac{5x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right]\cos\frac{3x}{2}}{4\cos^2\frac{5x}{2}-3}=2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

૯૦. $\dfrac{1}{(x\tan x+1)^2}=\dfrac{\cos^2 x}{(x\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{\cos x}{x}\cdot\dfrac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}$

ખંડશઃ સંકલન $u=\dfrac{\cos x}{x}$; $v=\dfrac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}$

૯૧. $\sqrt{1+\sin\frac{x}{4}}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}\right)^2}=\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}$

૯૨. $\dfrac{x+1}{x\left(1+xe^x\right)^2}=\dfrac{(x+1)\,e^x}{xe^x\left(1+x\,e^x\right)^2}$, આદેશ $x\,e^x=t$ લઈ અપૂર્ણાંશની રીત

૯૩. $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}+2}=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ આદેશ $e^x=t$

૯૪. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\times\dfrac{1}{x}=$ આદેશ $x=\cos^2\theta$

૯૫. $\frac{(x+2)^2}{(x+4)^2}e^x = \left(\frac{x(x+4)}{(x+4)^2} + \frac{4}{(x+4)^2}\right)e^x$

$= \left(\frac{x}{x+4} + \frac{4}{(x+4)^2}\right)e^x \quad f(x) = \frac{x}{x+4}$

૯૬. $\frac{2e^x + 3e^{-x}}{3e^x + 4e^{-x}} = \frac{2e^{2x}+3}{3e^{2x}+4}$ અંશ A (છેદ) + B (છેદનું વિકલન)

૯૭. $\frac{1}{1+\tan^4 x} = \frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^4 x)}$ પછી આદેશ $\tan x = t$

૯૮. $\frac{3^x - 1}{3^x + 1} = \frac{3^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{-x}{2}}}{3^{\frac{x}{2}} + 3^{\frac{-x}{2}}}$; આદેશ $3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = t$

૯૯. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{2\tan x \cdot \sec^2 x}{1+\tan^4 x}$ આદેશ $\tan^2 x = t$

૧૦૦. $e^{2x}(1+\tan x)^2 = e^{2x}(\tan x + \sec^2 x)$ આદેશ $2x = t$

૧૦૧ થી ૧૧૦ જાતે કરવા.

જવાબો

1	d	30	d	59	b	88	b
2	a	31	a	60	a	89	b
3	d	32	a	61	a	90	a
4	b	33	c	62	d	91	a
5	c	34	c	63	b	92	c
6	c	35	a	64	a	93	a
7	a	36	b	65	c	94	d
8	d	37	a	66	c	95	a
9	a	38	b	67	a	96	d
10	a	39	b	68	c	97	b
11	b	40	d	69	b	98	c
12	c	41	a	70	a	99	c
13	b	42	a	71	b	100	b
14	a	43	b	72	c	101	c
15	b	44	b	73	b	102	b
16	a	45	a	74	c	103	a
17	a	46	a	75	c	104	c
18	d	47	c	76	c	105	b
19	b	48	b	77	c	106	d
20	c	49	a	78	c	107	c
21	c	50	a	79	c	108	b
22	c	51	a	80	b	109	d
23	c	52	b	81	b	110	c
24	b	53	b	82	c		
25	b	54	a	83	d		
26	c	55	b	84	a		
27	b	56	b	85	c		
28	c	57	a	86	a		
29	a	58	a	87	b		

પ્રશ્ન બૅન્ક

(નિયત સંકલન)

1. જો $\int_{-K}^{K} |x|\, dx = \frac{1}{K}$, જ્યાં $K \in N$ તો $K =$ ....

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) શક્ય નથી

2. જો $\int_{-1}^{n} x|\,x\,|\, dx = \frac{7}{3}$, $n \in N$ તો $n =$ ....

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) 3

3. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} [\cot x]\, dx =$ ....

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

4. $\int_{0}^{\frac{3}{2}} [\, x^2 \,]\, dx =$ ....

(A) $\frac{3}{4}$ (B) 3 (C) $2 + \sqrt{2}$ (D) $2 - \sqrt{2}$

5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x}\; dx =$ ....

(A) $\sqrt{2} + 1$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $1 - \sqrt{2}$ (D) 0

6. $\int_{0}^{1} 2^{2x} \cdot 3^{-x}\; dx =$ ....

(A) $\log_e \frac{64}{27}$ (B) $\log_e \frac{27}{64}$ (C) $\log_{\frac{3}{4}} e$ (D) $\log_{\frac{64}{27}} e$

7. $\int_{-5}^{5} \left(x - [\,x\,]\right) dx =$ ....

(A) 0 (B) 5 (C) 10 (D) 15

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^{-1}x} \cdot e^{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}}$ (C) $\frac{\pi}{4} e^{\frac{\pi}{2}}$ (D) $e^{\frac{\pi}{2}}$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x) \right) dx = \ldots\ldots\ldots$

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) π (C) $\frac{\pi^2}{4}$ (D) $\frac{\pi^2}{2}$

10. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx = \ldots\ldots\ldots$

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

11. $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \right) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\log 2$ (B) 0 (C) $\log 3$ (D) શક્ય નથી

12. $\int_0^{e} \frac{x\ dx}{\left(x + \sqrt{e^2 - x^2}\right)\sqrt{e^2 - x^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) 0 (B) $\frac{e}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

13. $\int_0^{2\pi} \left(\sin x + |\sin x| \right) dx = \ldots\ldots\ldots$

(A) 0 (B) 2 (C) - 2 (D) 4

14. $\int_0^{\frac{\pi}{9}} \left(\tan x \tan 2x + \tan 3x - \tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x \right) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\frac{1}{3}\log 2$ (B) $\log\sqrt[3]{4}$ (C) $3\log 2$ (D) $4\log\sqrt{3}$

15. $\int_{1}^{e}\left(x^{x}+\log x^{x^{x}}\right)dx=$.........

(A) $\frac{e-1}{2}$ (B) $e^{e}-1$ (C) $e^{e}+1$ (D) e^{e}

16. જો $I=\int_{-1}^{1}\left(x^{7}+\cos^{-1}x\right)dx$ તો $CosI=$............

(A) 1 (B) 0 (C) - 1 (D) $\frac{1}{2}$

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^{3}x}\,dx=$..............

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

18. $\int_{-a}^{a}\left(\frac{|x+a|}{x+a}+\frac{|x-a|}{x-a}\right)dx=$...........

(A) 0 (B) a (C) 2a (D) 4a

19. $\int_{1}^{e}(\log x)^{8}\,dx+8\int_{1}^{e}(\log x)^{7}\,dx$ =................

(a) e-1 (b) $\frac{e-1}{2}$ (c) 0 (d) e

20. જો $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{Kdx}{\sqrt{x^{4}-x^{2}}}dx=\frac{\pi}{4}$ તો K = ...

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

21. $\int_{\log\frac{1}{3}}^{\log 3}2^{x^{2}}\cdot x^{3}dx$ = ...

(a) 0 (b) log 3 (c) -log3 (d) log2

22. યુગ્મ વિધેય f માટે જો $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=K$ તો $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^{2}-1}{x^{2}}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=$............

(A) 0 (B) 2K (C) K (D) 4K

23. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{cosec} 2\theta \log \tan^2 \theta \, d\theta =$............

(A) 0 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 1

24. જો $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{dx}{1+\sqrt[n]{\tan x}} = \propto$ તો $\tan\alpha =$.............

(A) $\sqrt{3}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

25. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\tan^2 x + 8\tan x + 8}{\tan^2 x + 2\tan x + 1} \, dx =$..........

(A) 0 (B) π (C) $\pi + 2$ (D) $\pi - 2$

26. $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \, d\theta =$..........

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

27. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}\right) dx =$..........

(A) $\frac{\pi}{2}\log 2$ (B) $\frac{-\pi}{2}\log 2$ (C) $\pi \log 2$ (D) $-\pi \log 2$

28. $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx =$..........

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

29. $\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\ dx =$..........

(A) 50π (B) 100π (C) $100\sqrt{2}$ (D) $200\sqrt{2}$

30. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{\log x} - \int_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\ dx =$..........

(A) e^2 (B) e (C) $\frac{1}{e}$ (D) 0

31. જો f એ અયુગ્મ આવર્તિ વિધેય છે જેનું આવર્તમાન P છે તો $\int_{2P-a}^{2P+a} f(x)\ dx =$.............

(A) P (B) 2P (C) 4P (D) 0

32. જો $I_n = \int_{0}^{1} x^n e^x\ dx,\ n \in N$ તો $I_{100} + 100\ I_{99} =$.............

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) e^{-1}

33. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\ dx =$..............

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi^2}{16}$ (C) $\frac{\pi^2}{4}$ (D) $\frac{\pi}{16}$

34. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{a + b\sin x}{a + b\cos x}\right) dx =$...........

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) πab

35. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x + x^7} =$.............

(A) $\frac{1}{6}\log\frac{64}{65}$ (B) $\frac{1}{6}\log\frac{128}{65}$ (C) $\frac{1}{6}\log\frac{32}{65}$ (D) $6\log\frac{64}{65}$

36. જો $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ તો $\sum_{r=1}^{5} \frac{1}{I_r + I_{r+2}} =$.............

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

37. જો $\int_{3+\pi}^{4+\pi} f(x-\pi)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ તો a + b = ...

(A) $2\pi + 7$ (B) $\pi + \frac{7}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

38. $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x^3 - x^4}\,dx = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{9}{28}$ (D) $\frac{29}{28}$

39. $\int_{0}^{1} \left(x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1\right) e^{x-1}\,dx = ...$

(A) 5 (B) 5e (C) $5e^2$ (D) $5e^4$

40. $\int_{0}^{2} x^{[x]}\,dx = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

41. જો $f(x) = f(\pi + e - x)$ અને $\int_{e}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{e+\pi}$ તો $\int_{e}^{\pi} x f(x)\,dx = ...$

(A) $\frac{\pi + e}{2}$ (B) $\frac{\pi - e}{2}$ (C) 1 (D) - 1

42. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1 - x + \sqrt{2x - x^2}}\,dx = ...$

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

43. જો $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x}\,dx = \frac{1}{K-1}$ તો K = ..., જ્યાં $n \in N$

(A) n (B) n + 1 (C) n + 2 (D) n + 3

44. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \log\ (\cot 2x)^{\sin 4x}\ dx = ...$

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

45. જો $\int_{n}^{n+1} f(x)dx = n$ જ્યાં n = 0, 1, 2,........અને $\int_{0}^{100} f(x)dx = \frac{K^2 - K}{2}$ તો K = ...

(A) 50 (B) 49 (C) 99 (D) 100

46. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x(1+\sin x)}{1+\cos^2 x}\ dx = ...$

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi^2}{2}$ (D) π^2

47. $\int_{a}^{a+1} |a - x|\ dx = ...$

(A) a (B) $\frac{a}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

48. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \sqrt{\sin 2\theta}\ d\theta = ...$

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

49. $\int_{e^{-1}}^{1} \left| \log x^{\frac{1}{x}} \right| dx = ...$

(A) $\frac{1+e}{2}$ (B) $\frac{e-1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

50. જો a < 0 < b તો $\int_{a}^{b} \frac{|x|}{x}\ dx = ...$

(A) a + b (B) b - a (C) a - b (D) $\frac{b-a}{2}$

51. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec x + 1}\, dx = $ ....

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

52. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\sec\theta - \tan\theta\right) d\theta$

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 0

53. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot \cos \frac{x}{2}\, dx = $ ....

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

54. $\int_{0}^{1} \sqrt{x}\,\sqrt{1 - \sqrt{x}}\, dx = $ ....

(A) $\frac{4}{105}$ (B) $\frac{8}{105}$ (C) $\frac{16}{105}$ (D) $\frac{32}{105}$

55. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}\, d\theta = $ ....

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

56. $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin 100x}{\sin x}\, dx = $ ....

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 2π

57. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f\left(\cos x\right) dx = $ ....

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $\frac{\pi}{2}$

58. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+x\right)|x|\,dx=$............

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

59. $\int_{0}^{\pi}[\cot x]\,dx=$.......... (જ્યાં [ ] = અધિકત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે.)

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 1 (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) - 1

60. જો $f(x)=\int_{0}^{x}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt$ તો $f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)=$..........

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 1

61. $c\int_{1+c}^{a+c}\left(f(x)+1\right)dx-\int_{c}^{ac}f\left(c^2+x\right)dx=$............ જ્યાં $C\neq 0$

(A) 0 (B) c (a - 1) (C) ac (D) a (c + 1)

62. $f:R\rightarrow R$ માટે જો $f(2)=-1,\ f^1(2)=4$ અને $\int_{2}^{3}(3-x)\,f''(x)\,dx=7$ તો $f(3)=$............

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 10

63. $\int_{1}^{\frac{1}{e}}\frac{\log t}{1+t}\,dt+\int_{1}^{e}\frac{\log t}{1+t}\,dt=$............

(A) e (B) $\frac{1}{e}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

64. જો $\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\,dx=2$ તો $\int_{0}^{\pi}x\,f(\sin x)\,dx=$.............

(A) 0 (B) 4 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

65. $\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left[(x+\pi)^3 + \cos^2(x+3\pi) \right] dx =$ ....

(A) $\frac{\pi^3}{8}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4} - 1$ (D) $\frac{\pi}{4} + 1$

66. જો $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ તો $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} fof(x)\, dx =$ ....

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\log 2$ (D) $-\log \frac{1}{2}$

67. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} =$ ....

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

68. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+x}} =$ ....

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{3}+1$ (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$

69. જો $h(x) = [f(x) + g(x)][g(x) - f(x)]$ તો $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\, dx =$ ....

(જ્યાં f એ અયુગ્મ અને g એ યુગ્મ વિધેય છે)

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx$ (D) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx$

70. જો $\int_0^{100} f(x)\, dx = 10$.......... તો $\sum_{K=1}^{100} \int_0^1 f(x+K-1)\, dx =$ ....

(A) 0 (B) 10 (C) 100 (D) 1000

71. અયુગ્મ વિધેય f માટે $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) e (B) $\frac{e^2 + 1}{e}$ (C) $\frac{e^2 - 1}{2e}$ (D) 0

72. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \log \sin\theta \, d\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\log \frac{2}{e}$ (B) $\log 2e$ (C) $\log 2$ (D) $\log \frac{e}{2}$

73. $\int_{0}^{1} \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) 2

74. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sec x + \operatorname{cosec} + \tan x + \cot x} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) 0 (B) $1 - \frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{4} + 1$ (D) $\frac{\pi}{2} + 1$

75. $\int_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 - 3x^2 + 1}} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

76. $\int_{0}^{1} \log\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\frac{1}{2}\left(\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\frac{1}{2}\left(\log 2 - 1 + \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $\frac{1}{3}\left(\log 4 - 1 + \frac{\pi}{8}\right)$ (D) $\frac{1}{4}\left(\log 3 - 1 + \frac{\pi}{2}\right)$

77. જો પરવલય $x^2 = 4by$ અને તેના નાભિલંબ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{8}{3}$ એકમ છે તો $b = ...$

(જ્યાં $b > 0$)

(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 4

78. રેખાઓ $x = 4$ અને $y = 4$ વડે અક્ષો સાથે બનતા ચોરસ અને પરવલયો $y^2 = 4x$ & $x^2 = 4y$ ના આ ચોરસના પ્રદેશનું $y = 4$ થી $y = 0$ તરફ થતા વિભાજિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે S_1, S_2, S_3 છે તો $S_1 : S_2 : S_3 = ...$

(A) 1 : 2 : 3 (B) 2 : 1 : 2 (C) 3 : 2 : 3 (D) 1 : 1 : 1

79. વક્ર $y = \log(x + e)$ અને યામાક્ષોથી બનતી બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3

80. પરવલય $y^2 = 32x$ અને રેખા $x = 8$ થી બનતા છેદ પ્રદેશના ક્ષેત્રફળ અને તે છેદપ્રદેશને સમાવતા સબંધિત લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર = ...

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3

81. રેખાઓ $|x| - |y| = 2$ વડે બનતા બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

(A) 2 એકમ (B) 4 એકમ (C) 8 એકમ (D) 16 એકમ

82. વક્રો $x^2 = y$, $2x + y - 8 = 0$ અને Y – અક્ષ વડે બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 9 એકમ (B) 18 એકમ (C) $\frac{80}{3}$ એકમ (D) 36 એકમ

83. વર્તુળો $x^2 + y^2 = 4$ અને $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ના સામાન્ય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = ...એકમ

(A) $\frac{1}{3}\left(4\pi - 2\sqrt{3}\right)$ (B) $\frac{4}{3}\left(2\pi - \sqrt{3}\right)$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{2}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

84. વક્રો $y = kx^2$ અને $x = ky^2$, $(k > 0)$ થી બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 12 એકમ છે તો $K = ...$

(A) 6 (B) $\frac{1}{6}$ (C) 12 (D) $\frac{1}{12}$

85. જો $y^2 = 32x$ અને $y = mx$, $(m > 0)$ વડે ઘેરાયેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ $\frac{8}{3}$ એકમ છે તો $m = ...$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

86. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 12$ અને પરવલય $x^2 = y$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =.........એકમ

(A) $2\pi - \sqrt{3}$ (B) $4\pi + \sqrt{3}$ (C) $2\pi + \sqrt{3}$ (D) $\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$

87. વક્રો $|x| + |y| \ge 2$ અને $x^2 + y \le 4$ વડે બનતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =............. એકમ

(A) $4\pi - 4$ (B) $4\pi - 2$ (C) $4(\pi - 2)$ (D) $4(\pi - 1)$

88. વક્રો $y = x^2$ અને $y = |x|$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =............. એકમ

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

89. વક્રો $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \frac{5\pi}{4}$ વડે બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =............એકમ

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

90. વક્રો $x^2 = y$, $y = x + 2$ X- અક્ષ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =.............એકમ

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{6}$

91. ઉપવલય $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ અને તેના સહાયકવૃત્ત વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =........... એકમ

(A) 2π (B) 3π (C) 6π (D) 9π

92. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ અને રેખાઓ $x = 1$ અને $x = \sqrt{3}$ થી બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ =.............એકમ

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) π (D) $\frac{4\pi}{3}$

93. જો $y = mx$, $x = 1$, $x = 2$ અને X – અક્ષ વડે બંધ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 6 એકમ હોય તો $m =$..........

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

સૂચનો

1. $|x|$ એ યુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \int_{-k}^{k} |x| \ dx = 2\int_{0}^{k} x\,dx = k^2$

$\therefore k^2 = \frac{1}{k}$

2. અહીં $\int_{-1}^{1} x|x|dx + \int_{1}^{n} x|x|dx$

$\frac{7}{3} = 0 + \int_{1}^{n} x^2\,dx$ $(\therefore x|x|)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે.

$\frac{7}{3} = \frac{x^3-1}{3}$ $(\therefore x > 0)$

3. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 0\ dx$ $\left[\begin{array}{l} \because \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{3}} > \cot x > 0 \end{array}\right]$

$= 0$

4. $\int_{0}^{\frac{3}{2}} \left[x^2\right] dx = \int_{0}^{1} \left[x^2\right] dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left[x^2\right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}} \left[x^2\right] dx$

$= 0 + \int_{1}^{\sqrt{2}} 1.\ dx + \int_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}} 2\,dx$

5. અહિં $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos x \angle \sin x$

$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\ dx$

6. $I = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}\right)^x dx = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]_0^1 \cdot \frac{1}{\log \frac{4}{3}}$

7. $\int_{-5}^{5} \left(x - [x] \right) dx$

$= \int_{-5}^{5} x\,dx - \left[\int_{-5}^{-4} [x]\,dx + \int_{-4}^{-3} [x]\,dx + \ldots\ldots + \int_{4}^{5} [x]\,dx \right]$

$= 0 - [-5 \ -4 - + \ldots\ldots\ldots 3 + 4]$

$= 5$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin^{-1} x} + e^{\cos^{-1} x} \right) dx = e^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$

9. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\tan^{-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2} - x \right)\right) + \cot^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x \right)\right)\right] dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + x)\,dx$

10. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^x} \qquad \ldots.(I)$

$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 (o - x)}{1 + 3^{o-x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \frac{1}{3^x}}\,dx \qquad \ldots.(II)$

$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

11. $f(x) = \log \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right)$

$f(-x) = \log \left(\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}} \right)$

$= \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$= -f(x)$

$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

12. $\therefore \int_{0}^{e} \frac{x\ dx}{\left(x + \sqrt{e^2 - x^2}\right)\sqrt{e^2 - x^2}}$ હવે, $x = e\sin\theta$ લેતાં $dx = e\cos\theta\, d\theta$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{4}$

13. $I = \int_{0}^{\pi} \left(\sin x + |\sin x|\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\sin x + |\sin x|\right) dx$

$= 2\int_{0}^{\pi} \sin x\ dx + 0$ $\left(\because\ \pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0\ \&\ 0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0\right)$

14. $\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan x \cdot \tan 2x}$

$\therefore\ \tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan x \cdot \tan 2x\ \tan 3x = 2\tan 3x$

$\therefore\ I = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} \tan 3x\, dx$

15. $I = \int_{1}^{e^e} .dx$ $x^x = t$ લેતાં

$x^x\left(\log x + 1\right) dx = dt$

16. $I = \int_{-1}^{1} x^7\, dx + \int_{-1}^{1} \cos^{-1} x\, dx$

$= 0 + \int_{-1}^{1} \cos^{-1}\left(1 + (-1) - x\right) dx$

$= \int_{-1}^{1} \left(\pi - \cos^{-1} x\right) dx = \int_{-1}^{1} \pi\, dx - I$

$$2I = \int_{-1}^{1} \pi \; dx$$

17. $I = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot |\sin x| \, dx$ (યુગ્મ વિધેય)

$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \, dx$ $(\because \sin x > 0)$

18. $-a < x < a$

$0 < x + \text{a} < 2\text{a} \;\&\; -2\text{a} < x - \text{a} < 0$

$\therefore \; I = \int_{-a}^{a} \left(\frac{x+a}{x+a} + \frac{a-x}{x-a} \right) dx = 0$

19. $\int_{1}^{e} (\log x)^{8} \; dx = \left[x \, (\log x)^{8} \right]_{1}^{e} - 8\int_{1}^{e} x \, (\log x)^{7} \cdot \frac{1}{x} \; dx$

$\therefore \int_{1}^{e} (\log \text{x})^{8} \, \text{dx} + 8\int_{1}^{e} (\log \text{x})^{7} \; \text{dx} = \left[\text{x} \, (\log \text{x})^{8} \right]_{1}^{e}$

20. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{k dx}{x\sqrt{x^{2}-1}} = \frac{\pi}{4}$

$\text{k} \left[\sec^{-1} x \right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{4}$

21. $I = \int_{-\log 3}^{\log 3} 2^{x^{2}} \cdot x^{3} \; dx$

$= 0$ $(\because \; 2^{x^{2}} \cdot x^{3}$ એ અયુગ્મ વિધેય છે.)

22. $x + \frac{1}{x} = t$

$\left(1 - \frac{1}{x^{2}}\right) dx = dt$

$\therefore \; \text{I} = \int_{-2}^{2} \text{f}(\text{t}) \; \text{dt} = 2\int_{0}^{2} \text{f}(\text{t}) \text{dt}$ $(\because \; f$ યુગ્મ વિધેય છે.)

23. $\log \tan\theta = t$ લેતાં

$$\frac{1}{\tan\theta}\cdot\sec^2\theta\cdot d\theta = dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\log\sqrt{3}}^{\log\sqrt{3}} t\, dt = 0$$

24. $$I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\cos x} + \sqrt[n]{\cos x}}\, dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\cos x} + \sqrt[n]{\sin x}}\, dx$$

$$2I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} 1.dx = \frac{\pi}{3}$$

25. $$I = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan^2 x + 2\tan x + 2}{\tan^2 x + 2\tan x + 1}\, dx$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1.dx + 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{(\tan x + 1)^2} \qquad \begin{pmatrix} \because 1 + \tan x = t \\ \sec^2 x\, dx = dt \end{pmatrix} \text{લેતાં}$$

$$= \pi + 4\int_{1}^{2} \frac{1}{t^2}.dt$$

26. $$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\, d\theta \qquad ...(i)$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(3(\pi - \theta))}{\cos(\pi - \theta) + \sin(\pi - \theta)}\, d\theta \qquad ...(ii)$$

$$(i) + (ii) \Rightarrow 2I = \int_{0}^{\pi} \frac{2\cos 3\theta.\cos\theta}{\cos 2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{\cos 4\theta + \cos 2\theta}{\cos 2\theta}\, d\theta$$

27. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(2\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{2\tan\frac{x}{2}}\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\ dx$

$= \frac{\pi}{2}\log 2 - \left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right)$

28. $\sin(2n+1)\frac{x}{2} = \sin(2n+1)\frac{x}{2} - \sin(2n-1)\frac{x}{2} + \sin(2n-1)\frac{x}{2}$

$-\sin(2n-3)\frac{x}{2} + \ldots\ldots\ldots + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$

$= 2\cos nx.\sin\frac{x}{2} + 2\cos(n-1)x.\sin\frac{x}{2} + \ldots\ldots\ldots + 2\cos x\,.\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$

$I = 2\int_0^{\pi}\left(\cos nx + \cos(n-1)x + \ldots\ldots\ldots + \cos x + \frac{1}{2}\right)dx$

29. $I = \int_0^{100\pi} \sqrt{2}\,|\sin x|\, dx$

$= \sqrt{2}\left[\int_0^{\pi}\sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\, dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\sin x dx + \ldots\ldots\ldots + \int_{98\pi}^{99\pi}\sin x\, dx - \int_{99\pi}^{100\pi}\sin x\, dx\right]$

30. $\int_e^{e^2}\frac{dx}{\log x} = \int_1^2 \frac{e^t}{t}\, dt$ $\qquad$ $\log x = t$ લેતાં $x = e^t$ $dx = e^t\, dt$

$= \int_1^2 \frac{e^x}{x}dx$

$\therefore \int_e^{e^2}\frac{dx}{\log x} - \int_e^2\frac{e^x}{x}\, dx = 0$

31. $\int_{2P-a}^{2P+a} f(x)\,dx = \int_{2P-a}^{2P+a} f(4P-x)\,dx$

$= -\int_{2p-a}^{2p+a} f\left(x + (-4P)\right)\,dx$

[$\because$ f $(-x) = -$ f (x) અને -4P એ f નુ આવર્તમાન છે.)

$= -\int_{2P-a}^{2P+a} f(x)\,dx$

$= -$ I

32. $I_{100} = \int_0^1 x^{100} e^x\ dx$

$= \left[x^{100} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 100x^{99} e^x dx$

$= \mathrm{e} - 100\,\mathrm{I}_{99}$

33. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\ dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \frac{\cos x \sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x} - I$

34. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{a + b\ \sin x}{a + b \cos x}\right) dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{a + b \cos x}{a + b\ \sin x}\right) dx$

$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 1\ dx = 0$

35. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x(1+x^6)}$ $\left(t = x^6 \text{ લેતાં } dt = 6x^5 dx\right)$

$= \int_{1}^{64} \frac{dt}{6t\,(t+1)}$

36. $I_K + I_{K+2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^k x \left(1 + \tan^2 x\right) dx$

$= \left[\frac{\tan^{k+1} x}{k+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{k+1}$

$\sum_{r=1}^{5} \frac{1}{I_r + I_{r+2}} = \frac{1}{I_1 + I_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{I_5 + I_7} = 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 6$

$= 20$

37. $\int_{3+\pi}^{4+\pi} f\left(x-\pi\right) dx$

$= \int_{3}^{4} f\ (t)\, dt$ $\quad (x - \pi = t) \text{ લેતાં } dx = dt -)$

$a = 3, b = 4 \ \ a + b = 7$

38. $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x^3 - x^4} = \int_{0}^{1} x\ \sqrt[3]{1 - x}$

$= \int_{0}^{1} (1 - x)\ \sqrt[3]{x}\ dx$

39. $\int_{0}^{1} (x^5 + 5x^4 + x^4 + 4x^3 + x^3 + 3x^2 + x^2 + 2x + x + 1)\ \frac{e^x}{e}\ dx$

$= \frac{1}{e}\left[\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x\ \ e^x\right)\right]_0^1$

40. $I = \int_0^1 x^{[x]}\, dx + \int_1^2 x^{[x]}\, dx$

$= \int_0^1 dx + \int_1^2 x\, dx$

41. $I = \int_e^{\pi} (e + \pi - x)\, f(e + \pi - x)\, dx$

$= \int_e^{\pi} (e + \pi) f(x)\, dx - I \quad (\because f(e + \pi - x) = f(x))$

$I = \frac{e+\pi}{2} \cdot \frac{2}{e+\pi} = 1$

42. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1-(1-x)+\sqrt{2(1-x)-(1-x)^2}}$

$= \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\, d\theta \qquad [\because x = \sin\theta,\ dx = \cos\theta\ .\ d\theta]$

43. $\frac{1}{k-1} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} cot^n x\, .\, cosec^2 \times dx$

$= -\left[\frac{\cot^{n+1} x}{n+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$

44. $I = \int_0^{\pi/4} \sin 4x \log \cot 2x\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sin\left[\frac{4\pi}{4} - 4x\right] \log \cot\left[\frac{\pi}{2} - 2x\right] dx$

$I = \int_0^{\pi/4} \sin 4x\ .\ \log \tan 2x\, dx \qquad 2I = 0$

45. $\int_0^{100} f(x)\,dx = \int_0^{1} f(x)\,dx + \int_0^{2} f(x)\,dx + ... + \int_{99}^{100} f(x)\,dx$

$\frac{k\,(k-1)}{2} = 0 + 1 + 2 + ... + 99$

46. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\,(1+\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\,dx}{1+cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

$= 0 + 2\int_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

47. $\int_a^{a+1} |\,a - x\,|\,dx$

$= \int_a^{a+1} (x - a)\,dx$

$(a < x < a + 1;\; 0 < x - a < 1)$

48. $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2\theta}\,\sin\theta\,d\theta$ .... (i)

$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(\pi - 2\theta)}\;.\;\sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{sin\,2\theta}\;.\cos\theta.d\theta$ ..... (ii)

$2I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{sin\,\alpha\theta}\;(\sin\theta + \cos\theta)\,d\theta$ ($\because$ (i) + (ii))

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin\theta - \cos\theta)^2}\;.\;(\sin\theta + coos\theta)\,d\theta$

$\sin\theta - \cos\theta = t$ લેતાં

$(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = dt$

49. $\int_{1/e}^{1} \left|\log x^{\frac{1}{x}}\right| dx$

$= -\int_{1/e}^{1} \frac{1}{x} \log x \, dx$ $\qquad [\because \frac{1}{x} > 0 \text{ \& ;} \log x < 0]$

$= -\left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$

50. $a < 0 < b$

$\therefore \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^0 \frac{|x|}{x} dx + \int_a^b \frac{|x|}{x} dx$

$= -\int_a^0 1 \,.\, dx + \int_a^b 1 \,.\, dx$

51. $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\cos x}} \, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}}} \, dx$

$t = \sin \frac{x}{2}$

$dt = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \, dx$

$\therefore I = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2dt}{\sqrt{1 - 2t^2}}$

52. $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \log(\sec\theta - \tan\theta)\, d\theta$

$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \log(\sec\theta + \tan\theta)\, d\theta \qquad 2I = 0$

53. $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot \cos\frac{x}{2}\, dx$

$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta$... (i) $\qquad [\because \frac{x}{2} = \theta,\ dx = 2d\theta]$

$I = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2\theta} \cdot \sin\theta\, d\theta$... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2I = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2\theta}\ (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$

take $\sin\theta - \cos\theta = t$

$(\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta = dt$

54. $I = \int_0^{1} \sqrt{x}\ \sqrt{1-\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} = t$

$dx = 2tdt$

$I = 2\int_0^{1} t^2 (\sqrt{1-t})\, dt$

$= 2\int_0^{1} (1-t)^2 \sqrt{t}\, dt$

55. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta}{1-\frac{1}{2}(\sin 2\theta)} d\theta$

$\cos 2\theta = t$

$-2\sin 2\theta d\theta = dt$

$I = \int_0^{1} \frac{2dt}{1+t^2}$

56. $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 100x}{\sin x}\, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{\sin 100(\pi - x)}{\sin(\pi - x)}\, dx = -I$

57. $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, f(\cos x)\, dx$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right) f\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right)\right) dx$

$= -I$

58. $I = \int_{-1}^{1} (x^2 + x)\,|x|\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,|x|\,dx + \int_{-1}^{1} x\,|x|\,dx$

$= 2\int_{0}^{1} x^2 \,.\, x\, dx + 0$ ($\because$ $x\,|x|$ એ અયુગ્મ વિધેય છે)

59. $I = \int_{0}^{\pi} [\cot x]\, dx = \int_{0}^{\pi} [\cot(\pi - x)]dx = \int_{0}^{\pi} [-\cot x]\, dx$

$2I = \int_{0}^{\pi} ([\cot x] + [-\cot x])\, dx$

$= \int_{0}^{\pi} (-1)\, dx$

[$\because x \in R$ if x is an integer then $[x] + [-x]=0$ and if x is not an integrer then $[x] + [-x] = -1$]

60. $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt - \int_{0}^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt$

$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt$

$= = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt$

$= 0$ ($\because \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે)

61. $cx = c^2 + t$

$$I = \int_{1+c}^{a+c} 1\ dx = c\,(a-1)$$

62. $7 = [(3-x)f'(x)]_2^3 - \int_2^3 (0-1)f'(x)dx$

$$7 = 0 - f'(2) + f(3) - f(2)$$

63. $\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{\log t}{1+t}\ \text{dt}$

$$= -\int_1^e \frac{\log\frac{1}{u}}{u(u+1)}dy \qquad \left[\because t = \frac{1}{u}\,dt = -\frac{1}{u}dy\right]$$

$$= \int_1^e \frac{\log u}{u(u+1)}$$

$$\int_1^e \frac{\log t}{1+t}dt + \int_1^{\frac{1}{e}} \frac{\log t}{1+t}dt$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t}\log t\ dt$$

64. $I = \int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\ dx$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x)\ f(\sin(\pi - x)\ dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\ dx - I$$

65. $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi/2} [(x+\pi)^3 + \cos^2(x+3\pi)]\ dx$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi/2} \left[\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} - x + \pi\right)^3 + \cos^2\left(-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x + 3\pi\right)\right] dx$$

$$= -I + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx$$

66. $\int_{1/3}^{2/3} f o f(x)\, dx = \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{1-x}\, dx$

67. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ $\qquad \sqrt{x} = t$

$= \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2}$ $\qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt$

68. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$

$= \int_0^{\sqrt{3}} dt$ $\qquad \left[\frac{1+x}{1-x} = t^2,\ \ \frac{2}{(1-x)^2}\, dx = 2t\, dt\right]$

69. $h(-x) = (f(-x) + g(-x))\,(g(-x) - f(-x))$
$= (-f(x) + g(x))\,(g(x) + f(x))$
$= h(x)$

$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} h(x)\, dx$

70. $\sum_{k=1}^{100} \int_0^1 f(x + k - 1)\, dx$

$= \sum_{k=1}^{100} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ $\qquad$ [x+k-1=t, $\quad$ dx=dt] લેતાં

$= \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^2 f(t)\, dt + \ldots.. + \int_{99}^{100} f(t)\, dt$

$= \int_0^{100} f(t)\, dt$

71. $\int_{1/e}^{e} \frac{1}{x} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ $\qquad \because \frac{1}{x} = t \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\, dx = dt$

$$= = \int_{e}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t} - t\right) dt$$

$$= = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{t}\left[-f\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] dt$$

$= -$ I

72. t = cosθ લેતાં

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin\theta \log\left(1 - \cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} d\theta = -\frac{1}{2}\int_{1}^{0} [\log\,(1 \,\square\, t) + \log\,(1 + t)]\, dt$$

73. $\int_{1}^{0} \log\left(\frac{1-x}{x}\right) dx$

$$= \int_{0}^{1} log\ (1 - x)\ dx - \int_{0}^{1} log\ x\ dx$$

$$= \int_{0}^{1} log\ (1 - (1 - x))\ dx - \int_{0}^{1} log\ x\ dx$$

$= 0$

74. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x + 1)}\, dx$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x}{(\tan x + 1 + \sec x)}\left(\frac{\tan x + 1 - \sec x}{\tan x + 1 - \sec x}\right) dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x - 1)\, dx$$

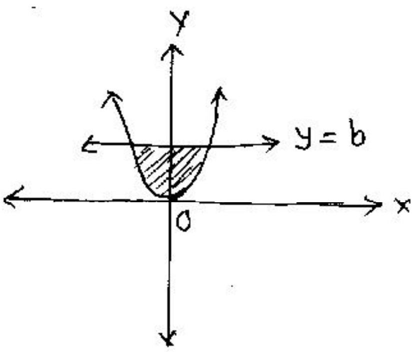
75. Take $x - \frac{1}{x} = t$

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$$

76. Applying integration by parts

77. $I = \int_0^b xdy$

$\frac{4}{3} = \int_0^b 2\sqrt{b}\,\sqrt{y}\,dy$



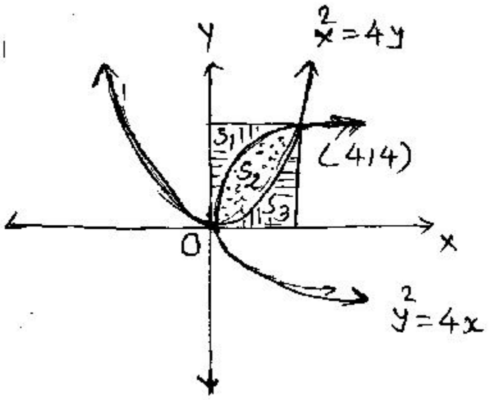
78. $S_1 = S_3$ ..... (i)

$\& S_2 = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{16}{3}$

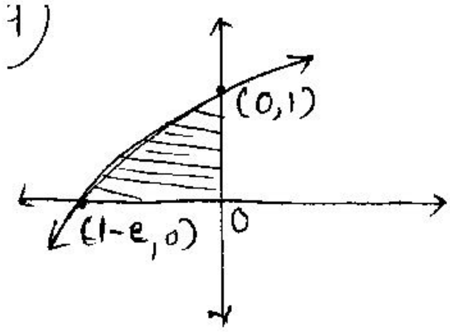
$S_1 + S_2 + S_3 = 4 \times 4$

$2S_1 = 16 - \frac{16}{3}$

$S_1 = \frac{16}{3}$ Sq. unit

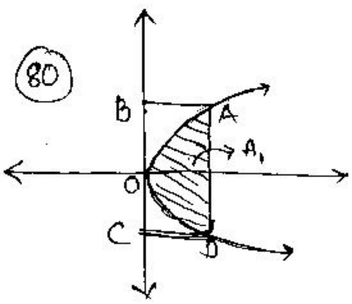


79. $A = \int_{1-e}^{0} \log_e (x + e)\, dx$



80. $A_1 = 2\,|\,I\,|$

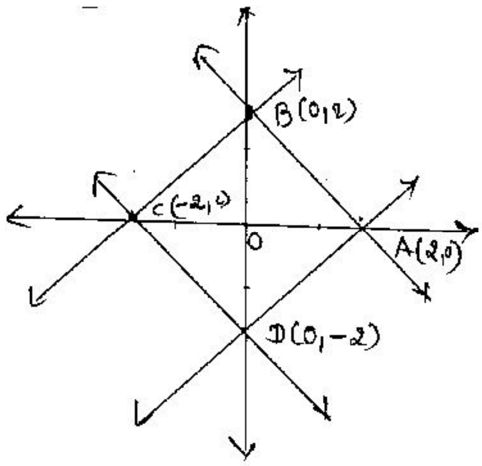
$I = \int_0^8 4\sqrt{2}\,\sqrt{x}\,dx$



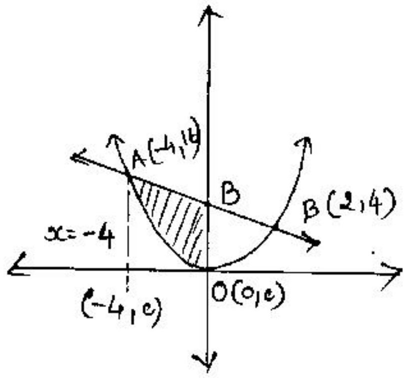
81. $A = 4\,|\,I\,|$

$$= 4 \int_0^2 (2 - x)\, dx$$

$$\text{OR } A = 4 \cdot \frac{1}{2}\,(2)\,(2)$$



82. $I = \int_{-4}^{0} (8 - 2x - x^2)\, dx$



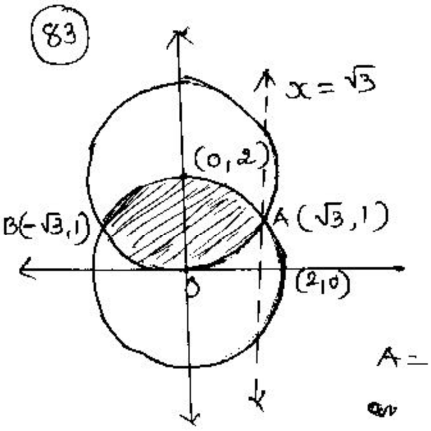
83. $A = 2\,|\,I\,|$

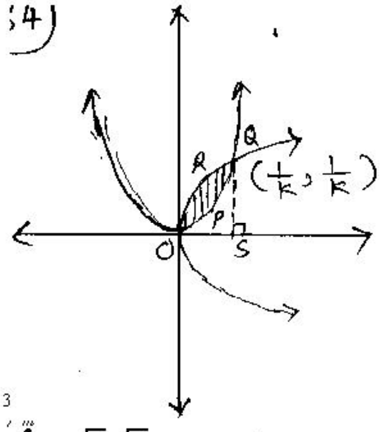
$$I \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2^2 - x^2} - 2 + \sqrt{2^2 - x^2}\right) dx$$

અથવા

$A = 4\,|\,I\,|$

$$I = \int_0^1 \sqrt{4 - (y - 2)^2}\; dy$$



84. 

$$12\int_0^{\frac{1}{k}}\left[\sqrt{\frac{x}{k}}-kx^2\right]dx$$

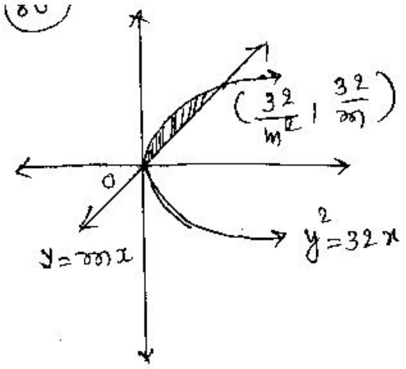
$$3k^2 = \frac{1}{12}$$

$$k = \frac{1}{6}\ (\because\ k > 0)$$

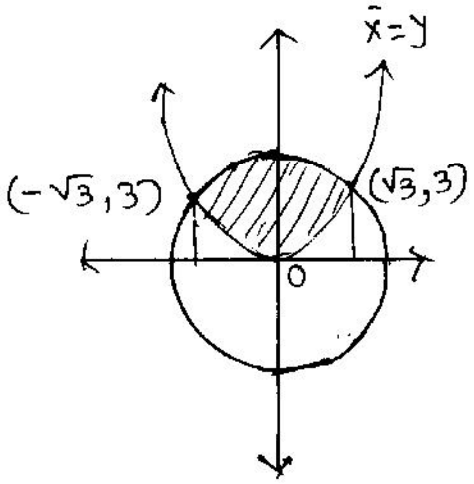
85. $\frac{8}{3} = \int_0^{\frac{3}{m}} 4\sqrt{2}\sqrt{x} - mx\ \ dx$

$$\frac{8}{3} = \frac{512}{3m^3}$$

$$m = 4$$

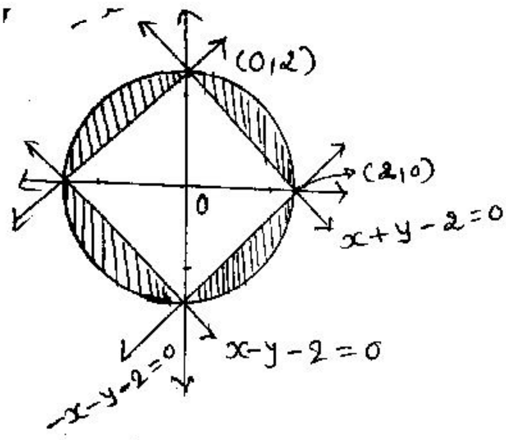


86. $A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} - x^2\ \ dx$

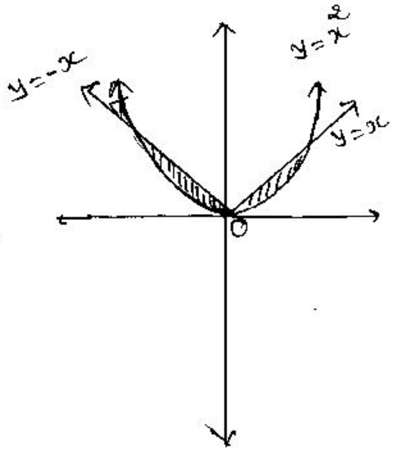


87. $A = \pi\,(2)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2$

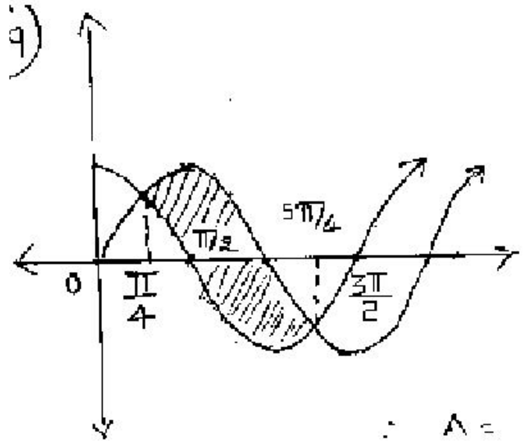
$= 4\pi - 8$



88. $A = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$



89.



$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$

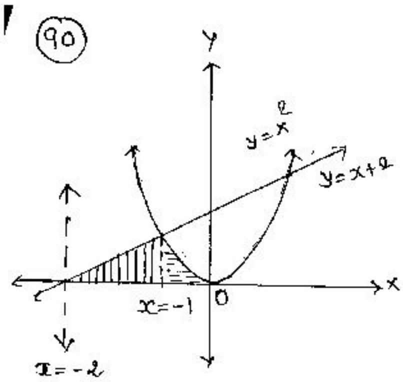
$\Rightarrow \sin x \le \cos x$

$\therefore\ A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx$

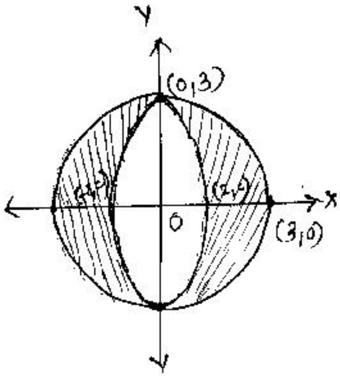
90. $A=|I_1|+|I_2|$

$$I_1=\int_{-2}^{-1}(x+2)\,dx$$

$$I_2=\int_{-1}^{0}x^2\,dx$$



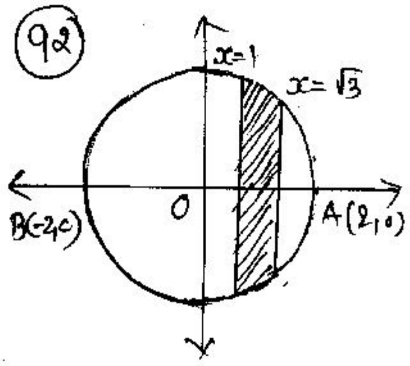
91.



$$=4\int_0^3\left(\sqrt{9-y^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}\right)dy$$

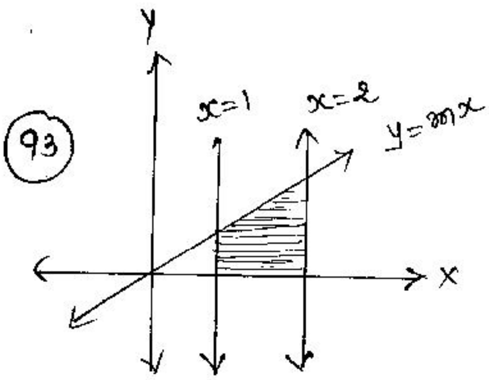
$$=\frac{4}{3}\int_0^3\sqrt{(3)^2-y^2}\;dy$$

92.



$$A=2\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

93.



$$6=\int_1^2 mx\,dx$$

$$6=m\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

<u>જવાબો</u>

(1)	b	(26)	b	(51)	d	(76)	b
(2)	b	(27)	c	(52)	d	(77)	c
(3)	b	(28)	c	(53)	c	(78)	d
(4)	d	(29)	d	(54)	d	(79)	a
(5)	b	(30)	d	(55)	c	(80)	b
(6)	d	(31)	d	(56)	a	(81)	c
(7)	b	(32)	c	(57)	c	(82)	c
(8)	b	(33)	b	(58)	b	(83)	d
(9)	c	(34)	a	(59)	c	(84)	b
(10)	c	(35)	b	(60)	a	(85)	c
(11)	b	(36)	d	(61)	b	(86)	c
(12)	d	(37)	d	(62)	d	(87)	c
(13)	d	(38)	c	(63)	d	(88)	c
(14)	b	(39)	a	(64)	d	(89)	d
(15)	b	(40)	c	(65)	b	(90)	c
(16)	c	(41)	c	(66)	d	(91)	b
(17)	d	(42)	c	(67)	c	(92)	b
(18)	a	(43)	c	(68)	c	(93)	d
(19)	d	(44)	a	(69)	d		
(20)	c	(45)	d	(70)	b		
(21)	a	(46)	d	(71)	d		
(22)	b	(47)	d	(72)	a		
(23)	a	(48)	d	(73)	c		
(24)	c	(49)	d	(74)	b		
(25)	c	(50)	a	(75)	a		

પ્રશ્ન બેન્ક

1. જો z = x + iy, x, y $\in$ R અને 3 x + (3 x - y) i = 4 - 6i તો z = _____

(a) $\frac{4}{3} + i\,10$ (b) $\frac{4}{3} - i\,10$ (c) $\frac{-4}{3} + i\,10$ (d) $\frac{-4}{3} - i\,10$

2. કિંમત શોધો. $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^2$

(a) 4 (b) -4 (c) 5 (d) -5

3. $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots + i^{1000}$ = ______

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) None

4. સંકર સંખ્યાની પદાવલી $\frac{1}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$ નું a + ib સ્વરૂપ _______ છે.

(a) $\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} + i\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2} - i\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$

(c) $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}$ (d) $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} - i\frac{1}{2}$

5 જો $\frac{(1+i)x-2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y+i}{3-i} = i$ તો (x,y) = _____

(a) (3,1) (b) (3,-1) (c) (-3,1) (d) (-3,-1)

6. જો Z = $\frac{4+3i}{5-3i}$ તો Z^{-1} = ________

(a) $\frac{11}{25} - \frac{27}{25}i$ (b) $\frac{-11}{25} - \frac{27}{25}i$ (c) $\frac{-11}{25} + \frac{27}{25}i$ (d) $\frac{11}{25} + \frac{27}{25}i$

7. જો z = x + y i અને $|3z| = |z-4|$ તો $x^2 + y^2 + x$ = ______

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) -2

8. જો z સંકર સંખ્યા હોય અને $|z+3| \le 8$ તો $|z-2|$ ની કિંમત _____ માં મળે.

(a) [-2,13] (b) [0,13] (c) [2,13] (d) [-13,2]

9. જો એકમ (1) ના ઘનમૂળ 1,w,w^2 હોય તો 1+w+w^2 = ______

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) w

10. જો sinx + i cos $2x$ અને cos$x$ - i sin $2x$ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ છે. તો તે માટે ____

(a) $x = k\pi,\ k\in z$ (b) $x = o$

(c) $x = (k + \frac{1}{2})\ \pi, k\in z$ (d) x ની કિંમત મળતી નથી.

11. જો z = x - iy અને $z^{\frac{1}{3}}$ = p+i q તો $\frac{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}{p^2+q^2}$ = ______

(a) 2 (b) -1 (c) 1 (d) -2

12. ધારો કે z, w સંકર સંખ્યાઓ છે જેથી $\bar{z}+i\bar{w}=o$ અને Arg (zw) = π તો Arg (z) =_____

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

13 જો $w = \frac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ અને $|w| = 1$ તો z _______ પર મળે.

(a) વર્તુળ (b) ઉપવલય (c) પરવલય (d) રેખા

14 જો $z^2 + z + 1 = 0$ જ્યાં z સંકર સંખ્યા છે તો

$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)^2 + ... + \left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)^2$ ની કિંમત _____ છે.

(a) 18 (b) 54 (c) 6 (d) 12

15. જો $|z- 4/z| = 2$ તો $|z|$ ની મહત્તમ કિંમત ______ છે.

(a) $\sqrt{5}+1$ (b) 2 (c) $2+\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}+1$

16. જો $\frac{1+2i}{2+i}$ = r (cos θ + i sin θ),તો

(a) $r = 1, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (b) $r=\sqrt{5}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

(c) $r = 1, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (d) $r=2, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

17. $(1+i)^{2n} = (1-i)^{2n}$ માટે ન્યુનત્તમ ધન પૂર્ણાંક n ______ છે.

(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) 12

18. જો z_1, z_2 સંકર સંખ્યાઓ હોય તથા $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ તો _____

(a) arg (z_1) + arg (z_2) = 0 (b) arg $(z_1 \cdot z_2)$ =0

(c) arg (z_1) = arg (z_2) (d) એકપણ નહી

19. સંકર સંખ્યા z માટે $|z-1| = |z+1| = |z-i|$ થાય તેવી સંકર સંખ્યાઓની સંખ્યા _______

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞

20. α, β વાસ્તવિક અને z સંખ્યા છે. જો $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ ના બે ભિન્ન બીજ રેખા Re(z) = 1 પર મળે તો

(a) $\beta \in (-1,0)$ (b) $|\beta| = 1$

(c) $\beta \in [1, \infty)$ (d) $\beta \in (0,1)$

21. જો $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ તો $z^2 - z + 1 =$ _______

(a) - 2i (b) 2 (c) 0 (d) -2

22. $(1 + i)(2 + ai) + (2 + 3i)(3 + i) = x + iy$, x, x y $\in$ R અને x=y તો a = ________

(a) 5 (b) -4 (c) -5 (d) 4

23. જો $z_1 = 2 - i$ અને $z_2 = 1 + i$ તો $\left|\frac{z_1 - z_2 + 1}{z_1 + z_2 + i}\right| =$ ___________

(a) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$ (d) $\sqrt{\frac{5}{4}}$

24. $-2\sqrt{3} - 2i$ નો મુખ્ય કોણાંક _____ છે.

(a) $\frac{-5\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{-2\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

25. જો x>1 તો $1 - i\sqrt{x^2 - 1}$ નું વર્ગમૂળ _______ છે.

(a) $\pm\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}} - i\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)$ (b) $\pm\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}} + i\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)$

(c) $\pm\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}} - i\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)$ (d) $\pm\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}} + i\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)$

26. જો 1 ના ઘનમૂળ 1, w, w^2 હોય તો $(1-w)(1-w^2)(1-w^4)(1-w^8) =$ ______

(a) 16 (b) 8 (c) 9 (d) 64

27. $w \neq 1$એ 1 નું ઘનમૂળ છે અને $(1+w^2)^n = (1+w^4)^n$ તો n ની ન્યુનત્તમ ઘન કિંમત ______ છે.

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6

28. જો $|z| = 1$ અને $w = \frac{z-1}{z+1}$ $(z \neq -1)$ તો Re (w) = ______

(a) 0 (b) $\frac{1}{|z+1|^2}$ (c) $\frac{1}{|z+1|^3}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2}$

29. જો z = - 1 તો arg $\left(z^{\frac{2}{3}}\right)$ = _______

(a) $\frac{\pi}{3}, 2\pi$ (b) $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$ (c) $\frac{10\pi}{3}$ (d) π, 2π

30. જો $Z = \cos\frac{4\pi}{7} + i \ \sin\frac{4\pi}{7}$ તો Re $(z+z^2+z^3)$ =_____

(a) $\cos\frac{\pi}{3}$ (b) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (c) $\cos\frac{\pi}{6}$ (d) $\cos\frac{5\pi}{6}$

31. $\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}}\right)^{36}$ = _______

(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

32. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ = _____

(a) $\pm\left(1+\sqrt{3}i\right)$ (b) $\pm\left(2+2\sqrt{3}i\right)$

(c) $\pm\left(\sqrt{3}+i\right)$ (d) $\pm\left(2-2\sqrt{3}i\right)$

33. જો Z સંકર સંખ્યા છે. તો $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{4}$ નું સમાધાન કરતાં બિંદુ z ના બિંદુગણ _______ છે.

(a) (-1,0) કેન્દ્ર અને $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ

(b) (0,0)કેન્દ્ર અને $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ

(c) (0,1) કેન્દ્ર અને $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ

(d) (1,1) કેન્દ્ર અને $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ

34. સંકર સંખ્યાઓ z, iz અને z + iz થી આગૅડ આકૃતિમાં રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ___ છે.

(a) $|z|^2$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2$ (c) $\frac{1}{2}|z|^2$ (d) $\frac{3}{2}|z|^2$

35. ધારો કે સમીકરણ $z^2 + az + b = 0$ ના બે બીજો z_1, z_2 છે. જ્યાં Z સંકર સંખ્યા છે. જો ઉગમબિંદુ z_1 અને z_2 સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરે તો _______

(a) $a^2 = 2b$ (b) $a^2 = 3b$ (c) $a^2 = 4b$ (d) $a^2 = b$

36. $\sqrt{-1-\sqrt{-1-\sqrt{-1-\ldots\ldots\infty}}} =$ _____

(a) 1 (b) w. w^2 (c) w (d) w^2

37. જો a = cos α + i sin α , b = cos β + *i* sin β c = cos γ + *i* sin γ અને $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=1$

તો cos (α - β) + cos (β - γ) + cos (γ - α) = ______

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) 0 (d) 1

38. $(-i)^{(-i)}$ ની કિંમત = _____

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ (d) $e^{\frac{\pi}{2}}$

39. જો 1 ના ઘનમૂળો 1,w,w^2 હોય તો સમીકરણ $(x-1)^3 + 8 = 0$ ના બીજો _______ છે.

(a) -1,-1,-1 (b) -1,-1+2w, $-1-2w^2$

(c) -1,1+2w, $1+2w^2$ (d) -1, 1-2w, $-1-2w^2$

40. જો $f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 5x^2\ 4x - 34i$ અને $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = a + ib$ તો a : b = _____

(a) 2 (b) -2 (c) 17 (d) -17

41. જો z= cos θ + *i* sin θ તો arg (z^2+z) = _______

(a) $\frac{3\theta}{2}$ (b) θ (c) $\frac{\theta}{2}$ (d) 3θ

42. જો *x* = a+b, y = a∝+bβ અને z = aβ + bα , જ્યાં α , β ≠ 1 ના ઘનમૂળો છે તો xyz=___

(a) $2\ (a^3 + b^3)$ (b) $2\ (a^3 - b^3)$ (c) $a^3 + b^3$ (d) $a^3 - b^3$

43. $\frac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^7 (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^{12} (\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^{-6}} =$ ______

(a) cos 33θ + *i* sin 33θ (b) cos 33θ - *i* sin 33θ

(c) cos 47θ + *i* sin 47θ (d) cos 47θ - *i* sin 47θ

44. જો $z=\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ તો z નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ _____ છે.

(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ (d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

45. કોઈપણ પૂર્ણાંક n માટે arg $\left(\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{4n+1}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{4n}}\right)$ = ________

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$

46. જો $\frac{2z-3}{iz+1}$ નો કાલ્પનીક ભાગ -2 હોય તો આર્ગંડ સમતલમાં બિંદુ Z ના બિંદુગણનું સમીકરણ ________ છે.

(a) વર્તુળ (b) રેખા (c) પરવલય (d) ઉપવલય

47. અસમતા $|z-4|<|z-2|$ વડે દર્શાવતો પ્રદેશ ________

(a) Re(z) >o (b) Re (z) < o (c) Re (z) >2 (d) Re (z) >3

48. જો સમીકરણ $|z-i|+|z+i|=k$ ઉપવલય દર્શાવે તો K=_____

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) -1

49. ધારો કે Z સંકર સંખ્યા 2 જેનો માનાંક 2 તથા કોર્ણાંક $\frac{-2\pi}{3}$ તો z = _______

(a) $-1+i\sqrt{3}$ (b) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (c) $-1-i\sqrt{3}$ (d) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

50. જો $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy$ તો ______

(a) x = 3, y = 1 (b) x = 1, y = 3 (c) x = o, y = 3 (d) x = o, y = o

51. જો સંકર સંખ્યા z $|z-i\,\mathrm{Re}(z)|=|z-\mathrm{Im}(z)|$ નું સમાધાન કરે તો z કોના પર મળે ?

(a) y = x (b) y = -x (c) y = x + 1 (d) y = -x + 1

52. જો w એ 1 ના ઘનમૂળનું 1 સીવાયનું કોઈ એક ઘનમૂળ છે તો $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-w^2 & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{vmatrix}$ =____

(a) 3w (b) 3w (w-1) (c) $3w^2$ (d) 3w (1-w)

53. જો $z = x + iy,\ x, y \in R$ અને $|x|+|y| \le k|z|$ તો $k =$ ____

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{4}$

54. જો $a = \cos\frac{2\pi}{7} + i \sin\frac{2\pi}{7}$ તો $\alpha = a + a^2 + a^4$ અને $\beta = a^3 + a^5 + a^6$ બીજો વાળુ દ્વિઘાત સમીકરણ ____

(a) x^2-x+2 (b) x^2+x-2 (c) x^2-x-2 (d) x^2+x+2

55. જો z, iz અને z+iz શીરાબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 2 એકમ હોય તો $|z|$ ની કિંમત ____

(a) 4 (b) 2 (c) -2 (d) None of these

56. $A(z_1)$, $B(z_2)$ અને $C(z_3)$ એ ΔABC ના શિરોબિંદુઓ હોય જ્યાં $m\angle C = \frac{\pi}{2}$ અને AC=BC, z_1, z_2, z_3 સંકર સંખ્યાઓ છે. જો $(z_1 - z_2)^2 = k\,(z_1 - z_3)\,(z_3 - z_2)$ તો K =____

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) એકપણ નહી

57. જો $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ તો $x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots\infty$ =____

(a) $-i$ (b) -1 (c) i (d) 1

58. જો z_1, z_2, z_3 સંકર સંખ્યાઓ છે અને $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$ તો $|z_1 + z_2 + z_3|$ = ...

(a) =1 (b) < 1 (c) > 1 (d) = 3

59. ધારો કે $Z = \cos\theta + i \sin\theta$ તો $\sum_{n=1}^{15} \text{Im}\left(Z^{2n-1}\right)$ ની $\theta = 2^0$ આગળ કિંમત ____

(a) $\frac{1}{\sin 2^0}$ (b) $\frac{1}{3\sin 2^0}$ (c) $\frac{1}{2\sin 2^0}$ (d) $\frac{1}{4\sin 2^0}$

60. ધારો કે $Z = \frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta}$ અને $z = \bar{z}$ તો θ =________

(a) $(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in z$ (b) $2k\pi,\ k \in z$

(c) $k\pi,\ k \in z$ (d) એકપણ નહી

61. z_1, z_2 સંકર સંખ્યાઓ માટે જો $|z_1| = 12$ અને $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ તો $|z_1 - z_2|$ની ન્યુનતમ કિંમત__________ છે.

(a) 0 (b) 2 (c) 7 (d) 17

62. ધારો કે z = x + iy સંકર સંખ્યા છે જ્યાં x,y પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તો સમીકરણ $\bar{z}z^3 + z\bar{z}^3 = 350$ ના બીજો લંબચોરસના શીરોબિંદુઓ હોય તેવા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ ________ છે.

(a) 48 (b) 32 (c) 40 (d) 80

63. જો a,b,c પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને દરેક સમાન નથી તથા w,1 ના ઘનમૂળો છે $(w \neq 1)$ તો $|a + bw + cw^2|$ ની ન્યુનતમ કિંમત ________ છે.

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

64. સમીકરણ $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ નું સમાધાન કરતી સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2 અને z_3 ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ છે. તો તે ત્રિકોણ _________.

(a) નું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય છે. (b) સમદ્વિબાજુ કાટકોણ

(c) સમબાજુ (d) સમદ્વિબાજુ ગુરુકોણ

સૂચનો

1. Ans : (a)

Z = x + iy અને 3x + (3x-y)i = 4 - 6i

3x = 4, 3x-y = 6

$$\therefore z = \frac{4}{3} + i10$$

2. Hint :- i^2 = -1, $\frac{1}{i} = -i$

3. Hint :- i^2 = -1, $\frac{1}{i} = -i$

4. Ans : (c)

$$z = \frac{1}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2.2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{2}$$

5. Ans : (b)

$$\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$$

(4x + 9y - 3) + i (2x -7y-3) = 0+10 i

$$\left.\begin{matrix}\therefore 4x + 9y - 3 = 0 \\ 2x - 7y - 3 = 10\end{matrix}\right\}$$ સમીકરણો ને ઉકેલતા

x = 3, y = -1

$$\therefore (x_1y) = (3, -1)$$

6. Ans : (a)

$$z=\frac{11+27i}{34} = \frac{11}{34}+\frac{27}{34}i$$

$$z^{-1}=\frac{11/34}{\left(\frac{11}{34}\right)^2+\left(\frac{27}{34}\right)^2}-i\frac{27/34}{\left(\frac{11}{34}\right)^2+\left(\frac{27}{34}\right)^2}$$

$$\frac{11}{25}-\frac{27}{25}i$$

7. Ans : (c)

$z = x + iy$, $|3z| = |z-4|$

$\therefore |3x+i3y| = |x-4+iy|$

$\therefore x^2+y^2+x = 2$

8. Ans : (b)

$|z+3| \le 8$

$\therefore |z-2| = |z+3-5|$

$\le |z+3|+|-5|$

$\le 8+5$

≤ 13 ———— (i)

હવે $|z-2|=|5-(z-3)|$

$\ge |5| \sim |z-3|$

$\ge 5 \sim 8$

≥ 3

પરંતુ $|z+3| \le 8$

$\therefore -11 \le z \le 5$ અને $z = 2$ માટે $|z-2|=0$

$\therefore |z-2|$ ની ન્યુનતમ કિંમત = 0

$\therefore 0 \le |z-2| \le 13$

9. Ans : (b)

ધારો કે $z=\sqrt[3]{1}$

$\therefore z^3 = 1 \qquad \therefore z^3 - 1 = 0$

$\therefore (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

$\therefore z = 1,\ z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ z = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z = 1 \qquad = w \qquad\qquad = w^2$

આપેલ બીજો 1, w, w^2 છે.

$\therefore 1 + w + w^2 = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$= 0$

10. Ans : (d)

$\sin x + i\cos 2x$ અને $\cos x - i\sin 2x$

એકબીજાની અનુબધ્ધ સંકર સંખ્યાઓ છે.

$\therefore \text{Im}(z) = 0$

$\therefore \cos 2x = 0,\ \sin 2x = 0$

જે શક્ય નથી.

$\therefore$ x ની કિંમત મળતી નથી

11. Ans : (d)

z = x - iy અને $z^{1/3} = p + iq$

$z = (p+iq)^3$

$= p^3 + (iq)^3 + 3(p)(iq)(p+iq)$

$x - iy = (p^3 - 3pq^2) - i(q^3 - 3p^2q)$

$\therefore x = p^3 - 3pq^2, \quad y = q^3 - 3p^2q$

$\therefore \dfrac{x}{p} = p^2 - 3q^2, \qquad \dfrac{y}{p} = q^2 - 3p^2$

$\therefore \dfrac{\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}}{p^2 + q^2} = -2$

12. Ans : (a)

$\bar{z} + i\bar{w} = 0$

$\bar{z} = -i\bar{w}$

$z = iw \qquad \therefore w = -iz$

$\therefore \mathrm{Arg}(zw) = \pi$ આવેલ છે.

$\therefore \mathrm{Arg}((z)(-iz)) = \pi$

$\therefore \mathrm{Arg}(-iz^2) = \pi$

$\therefore \mathrm{Arg}(-i) + 2\mathrm{Arg}(z) = \pi$

$\therefore -\pi_2 + 2\mathrm{Arg}(z) = \pi$

$\therefore \mathrm{Arg}(z) = 3\pi/4$

13. Ans : (d)

$w = \dfrac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ અને $|w| = 1$

$|w| = \left|\dfrac{z}{z - \frac{1}{3}i}\right| = 1$

ધારોકે $z = x + iy$

$\therefore \dfrac{|x + iy|}{|x + (y - \frac{1}{3})i|} = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = x^2 + (y - \frac{1}{3})^2$

$\therefore 6y = 1$

$\therefore$ z રેખા પર આવેલ છે.

14. Ans : (d)

$z^2 + z + 1 = 0$

$\therefore (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \qquad \therefore z^3 - 1 = 0$

$\therefore z^3 - 1, z^2 + z = -1$

$\therefore \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + (z^2 + \frac{1}{z^2})^2 + (z^3 + \frac{1}{z^3})^2 + (z^4 + \frac{1}{z^4})^2 + (z^5 + \frac{1}{z^5})^2 + (z^6 + \frac{1}{z^6})^2$

$=(z+z^2)^2+(z^2+z)^2+(1+1)^2+(z+z^2)^2+(z^2+z)^2+(1+1)^2$

$= (-1)^2 + (-1)^2 + 4 + (-1)^2 + (-1)^2 + 4$

$= 12.$

15. Ans : (a)

$$\left|z-\frac{4}{z}\right|=2$$

$$|z|=\left|z-\frac{4}{z}+\frac{4}{z}\right|$$

$$\leq \left|z-\frac{4}{z}\right|+\left|\frac{4}{z}\right|$$

$\therefore |z| \leq 2+\frac{4}{|z|}$

$\therefore |z|^2 \leq 2\,|z|+4$

$\therefore |z|^2-2\,|z|+1\leq 5$

$\therefore \left(|z|-1\right)^2 \leq 5$

$\therefore \left||z|-1\right|\leq\sqrt{5}$

$-\sqrt{5}\leq|z|-1\leq\sqrt{5}$

$\therefore -\sqrt{5}+1\leq |z| \leq\sqrt{5}+1$

$\therefore$ $|z|$ ની મહત્તમ કિંમત $\sqrt{5}+1$ છે.

16. Ans : (c)

$$\frac{1+2i}{2+i} = r\cos\theta+i\,r\sin\theta$$

$\therefore \frac{(1+2i)(2-i)}{5} = r\cos\theta+i\,r\sin\theta$

$\therefore \frac{4}{5}+i\,\frac{3}{5} = r\cos\theta+i\,r\sin\theta$

$r^2 = 1,\ r = 1$

$\tan\theta=\frac{3}{4}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$r = 1, \quad \theta = \tan^{-1}(3/4)$

17. Ans : (c)

$$(1+i)^{2n} = (1+i)^{2n}$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = 1$$

$(i)^{2n} = 1$

$(-1)^n = 1$

n = 2 લેતા શક્ય બને છે

∴ ન્યુમતમ ઘન પૂર્ણાંક n = 2 છે.

18. Ans : (c)

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

ધારોકે $z_1 = r_1 \cos\theta_1 + i\, r_1 \sin\theta_1 \quad |z_1| = r_1$

$z_2 = r_2 \cos\theta_2 + i\, r_2 \sin\theta_2 \quad |z_2| = r_2$

$$\therefore |z_1 + z_2|^2 = (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)^2 + (r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)^2$$

$$= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

હવે, $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = (r_1 + r_2)^2$$

$$\therefore \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 = \cos 0$$

$$\therefore \theta_1 - \theta_2 = 0$$

$$\therefore \theta_1 = \theta_2$$

$\therefore \arg(z_1) = \arg(z_2)$

19. Ans : (b)

$$|z-1| = |z+1| = |z-i|$$

ધારોકે $z = (x,y) = x + iy$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$\therefore d((x, y), (1, 0)) = d((x, y), (-1, 0)) = d((x, y), (0, 1))$

ધારોકે A (1, 0), B (-1, 0), C (0, 1) અને z = p(x, y)

તો AP = BP = CP

∴ z એ પરીકેન્દ્ર દર્શાવે છે. જે unique છે.

20. Ans : (c)

$z^2+\alpha z+\beta=0$, $\alpha,\beta\in R$, $z\in c$

ધારોકે z = x + iy

Re(z) = 1 (આપેલ છે.) ∴ x = 1

∴ z = 1 + iy

ધારોકે 1 + iy & 1 - iy બે ... બીજો છે.

હવે બીજોનો ગુણાકાર = β

$\therefore \beta=(1+iy)(1-iy)=1+y^2$

હવે $1+y^2\geq 1$ $\therefore \beta\geq 1$

$\therefore \beta\in(1,\infty)$

21. Ans : (c)

$z=\left(\cos\pi/3-i\sin\pi/3\right) = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore z^2=\left(\cos\pi/3-i\sin\pi/3\right)^2$

$=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore z^2-z+1=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1 = 0$

22. Ans : (b)

(1+i) (2+ai) + (2+3i) (3+i) = x + iy

∴ (5-a) + i (13+a) = x + iy

∴ x = 5-a, y = 13+a

x = y આપેલ છે.

∴ 5-a = 13+a ∴ a = -4

23. Ans : (c)

$z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$

$$\therefore \left|\frac{z_1 - z_2 + 1}{z_1 + z_2 + i}\right| = \left|\frac{2-i-1-i+1}{2-i+1+i+i}\right|$$

$$= \left|\frac{2-2i}{3+i}\right| = \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

24. Ans : (a)

ધારોકે $z = -2\sqrt{3} - 2i = x + iy$

$r = |z| = 4$

ધારોકે $\arg(z) = \theta$, $\theta \in (-\pi, \pi]$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}}{4} \qquad = \frac{-2}{4}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0, \qquad = \frac{-1}{2} < 0$$

$$\therefore \theta = -\left(\pi - \pi/6\right) = -5\pi/6$$

25. Ans : (a)

$z = 1 - i\sqrt{x^2 - 1}$ $\qquad \therefore |z| = x = r$

ધારોકે $\theta = \arg(z)$

$$\therefore \cos\theta = 1/x > 0, \quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{x^2-1}}{x} < 0$$

$$\therefore -\pi/2 < \theta < 0$$ ચોથુ ચરણ

$$\cos\theta/2 = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \sin\theta/2 = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+1/x}{2}} \qquad = -\sqrt{\frac{1-1/x}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+x}{2x}} \qquad = -\sqrt{\frac{x-1}{2x}}$$

$$\therefore \sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\,(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$$

$$= \pm\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} - i\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}\sqrt{x}}\right)$$

$$\sqrt{z} = \pm\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

26. Ans : (c)

$1, w, w^2,$ 1 ના ઘનમૂળો છે.

$\therefore 1 + w + w^2 = 0$ & $w^3 = 1$

$(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^8)$

$= (1 - w)(1 - w^2)(1 - ww^3)(1 - w^2.(w^3)^2)$

$= (1 - w)(1 - w^2)(1 - w)(1 - w^2)$

$= (1 - w^2 - w + w^3)^2$

$= 3^2 = 9$

27. Ans : (b)

$w \neq 1$ એ 1 નું ઘનમૂળ છે $\therefore w^3 = 1$

$(1 + w^2)^n = (1 + w^4)^n$

$\therefore (1 + w^2)^n = (1 + w)^n$

$\therefore \left(\frac{1+w^2}{1+w}\right)^n = 1$ $\therefore \left(\frac{-w}{-w^2}\right)^n = 1$

$\therefore \left(\frac{w^2}{w^3}\right)^n = 1$ $\therefore w^{2n} = 1$

જો $n = 2,$ $w^{2n} = w^4 = \therefore$

$n = 3,$ $w^{2n} = w^6 = 1^2 = 1$

$n = 4,$ $w^{2n} = w^8 = w^6 . w^2 = w^2 \neq 1$

$\therefore n = 3$

28. Ans : (a)

$|z| = 1$ અને $w = \frac{z-1}{z+1}$

ધારોકે z = x + iy $|z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$w = \frac{x + iy - 1}{x + iy + 1}$$

$$= \frac{(x-1) + iy}{(x+1) + iy}$$

$$= \frac{[(x-1) + iy][(x+1) - iy]}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - iy(x - 1 - x - 1) + y^2}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{x^2 + y^2 + 1 + 2x}$$

$$= \frac{i\,2y}{2(1+x)}$$

$$w = {iy}/{1+x}$$

$\therefore$ Re (w) = 0

29. ANS : (b)

i ૹz = - 1 તો $Z^{2/3} = (-1)^{2/3} = \sqrt[3]{1}$

ધારો કે $Z_1 = Z^{2/3} = \sqrt[3]{1}$

$\therefore Z_1 = 1$ અથવા $Z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ અથવા $Z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

જો $Z_1 = 1$ $\therefore \arg(z_1) = \arg(1) = 0$

જો $Z_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\arg(z_1) = 2\pi/3$

જો $Z_1 = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\arg(z_1) = -2\pi/3$

$$\therefore \arg(Z^{2/3}) = 0,\ 2\pi/3,\ -2\pi/3$$

30. ANS : (b)

$$Re(z+z^2+z^3)=\frac{(z+z^2+z^3)+(\overline{z+z^2+z^3})}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[z+z^2+z^3+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right]$$

$$=\frac{1}{2z^3}\left[z^6+z^5+z^4+z^2+z+1\right]$$

$$=\frac{1}{2z^3}\left[1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6-z^3\right]$$

$$=\frac{1}{2z^3}\left[\frac{1-z^7}{1-z}-z^3\right]-----(i)$$

$$z=\cos\frac{4\pi}{7}+i\ \sin\frac{4\pi}{7}$$

$$\therefore z^7=\cos\ 4\pi+i\ \sin\ 4\pi=1+0=1$$

$$\therefore Re(z+z^2+z^3)=\frac{1}{2z^3}\left[\frac{1-1}{1-z}-z^3\right]$$

$$=-1/2$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}$$

31. ANS : (a)

ધારોકે $z=\cos\pi/12+i\ Sin\ \pi/12$

$$\therefore \bar{z}=\cos\pi/12-i\ \sin\ \pi/12$$

$$\therefore \left[\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}+i\ \sin\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}-i\ \sin\frac{\pi}{12}}\right]^{36}=\left[\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right]^{36}$$

$$=z^{36}\qquad(\because \bar{z}=1/z)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\ \sin\frac{\pi}{12}\right)^{36}$$

$= \cos 3\pi + i \sin 3\pi$

$= -1 + i(0)$

$= -1$

32. ANS : (c)

ધારોકે $z = -8 + 8\sqrt{3}i = a + ib$

$\therefore a = -8,\ b = 8\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{64 \times 4} = 16$

$$\therefore \sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right]$$

$= \pm(\sqrt{4} + i\sqrt{12})$

$= \pm(2 + i2\sqrt{3})$

ધારો કે $w = \sqrt{z} = 2 + i\ 2\sqrt{3} = a + ib$

$a = 2,\ b = 2\sqrt{3}$

$\therefore |w| = \sqrt{4+12} = 4$

$$\therefore \sqrt{w} \pm \left[\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\ \sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right]$$

$\therefore \sqrt[4]{z} = \pm(\sqrt{3} + i)$ ans.

33. ANS : (a)

ધારો કે $z = x + iy$

વળી $agr\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \pi/4$

$\therefore agr(x + i(y-1)) - arg(x + i(y+1)) = \pi/4$

$\therefore \tan^{-1}\frac{y-1}{x} - \tan^{-1}\frac{y+1}{x} = \pi/4$

$$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{\frac{y-1}{x}-\frac{y+1}{x}}{1+\frac{y^2-1}{x^2}}\right)=\pi/4$$

$$\therefore \frac{y-1-y-1}{x}\times\frac{x^2}{x^2+y^2-1}=\tan\pi/4=1$$

$$\therefore -2x=x^2+y^2-1$$

$$\therefore x^2+y^2+2x=1$$

જે (-1, 0) કેન્દ્ર અને $\sqrt{2}$ ત્રીજ્યા વાળા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

34. ANS : (c)

ધારો કે z = x+iy

તથા P = p(z) = (x, y)

Q = Q(iz) = (-y, x)

R = R(z+iz) = (x-y, x+y)

$\therefore \Delta PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}|D|$

જ્યાં $D=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -y & x & 1 \\ x-y & x+y & 1 \end{vmatrix}$

$=-(x^2+y^2)$

$=-|z|^2$

$\therefore \Delta PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}|z|^2$

35. ANS : (b)

$z^2+az+b=0,$ z સંકર સંખ્યા છે.

z_1, z_2 બીજો છે.

$\therefore z_1+z_2=-a \qquad ,z_1z_2=b$

Hint : z_1, z_2, z_3 સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 ધ્વારા દર્શાવતા બિંદુઓથી રચાતો ત્રીકોણ સમબાજુ હોય તો અને તો જ $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

અહીં $z_3 = 0$

$$z_1^2 + z_2^2 + o^2 = z_1 z_2 + o + o$$

$$\therefore (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = z_1 z_2$$

$$\therefore (-a)^2 - 2b = b$$

$$\therefore a^2 = 3b$$

36. ANS : (b)

ધારો કે $\sqrt{-1-\sqrt{-1-\sqrt{-1----\infty}}}$

$$\therefore Z = \sqrt{-1-z}$$

$$\therefore z^2 + z + 1 = 0$$

$$\therefore z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ અથવા } \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ Z = W અથવા w^2

37. ANS : (d)

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

$$b = \cos\beta + i\sin\beta = e^{i\beta}$$

$$c = \cos\gamma + i\sin\gamma = e^{i\gamma}$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\beta-\gamma)} + e^{i(\gamma-\alpha)} = 1$$

$$\Rightarrow \left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha)\right]$$

$$+i\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)\right] = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) = 1$$

38. ANS : (c)

ધારો કે $z = (-i)^{(-i)}$

$$\therefore \log z = (-i)\ \log(-i)$$

$$= (-i)\ \log(0 + i(-1))$$

$$= (-i)\ \log(\cos \pi/2 + i\,\mathrm{Sm}\ \pi/2)$$

$$\therefore \log z = (-i)\ \log\ e^{i(-\pi/2)}$$

$$= (-i)i\left(-\pi/2\right) \log e$$

$$= i^2 \cdot \pi/2$$

$$\log z = -\pi/2$$

$$\therefore z = e^{-\pi/2}$$

39. ANS : (d)

$$(x-1)^3 + 8 = 0$$

$$\therefore \left(\frac{x-1}{-2}\right)^3 = 1$$

$$\therefore \frac{x-1}{-2} = \sqrt[3]{1}$$

$\therefore \frac{x-1}{-2} = 1$ અથવા $\therefore \frac{x-1}{-2} = w,\ \frac{x-1}{-2} = w^2$

$$\therefore x = -1,\ \ x = 1-2w,\ \ x = 1-2w^2$$

$\therefore$ બીજો -1, 1-2w, 1-2w^2

40. ANS : (c)

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4x - 34i$$

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = a + ib$$

ધારો કે $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = w$ $\quad\quad \therefore w^3 = 1,\ w + w^2 = -1$

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = f(w)$$

$$= 4w^5 + 5w^4 - 8w^3 + 5w^2 + 4w - 34i$$

$$a + ib = -17 - 34i$$

$$a : b = (-17) : (-34)$$

$$a : b = 1 : 2$$

41. ANS : (c)

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\therefore \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$\therefore z^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i\, 2\cos\theta\sin\theta$

$\therefore z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

$\therefore z^2 + \bar{z} = (\cos\, 2\theta + \cos\theta) + i(\sin 2\theta - \sin\theta)$

$$= 2\,\cos\frac{3\theta}{2}\cos{\theta}/{2} + i\; 2\,\cos\frac{3\theta}{2}\,\sin{\theta}/{2}$$

$\therefore \arg(z^2 + \bar{z}) = \tan^{-1}\left(\tan{\theta}/{2}\right) = {\theta}/{2}$

42. ANS : (d)

અહીં $\alpha, \beta \neq 1$ તથા 1 ના ઘનમૂળો છે.

$$\therefore \alpha + \beta = w + w^2 = -1 \quad, \alpha\beta = 1,\ \alpha^2 + \beta^2 = -1$$

$xyz = (a+b)(a\alpha + b\beta)(a\beta + b\alpha)$

$= (a+b)[(a^2+b^2)\alpha\beta + ab(\alpha^2 + \beta^2)]$

$= (a+b)[a^2 + b^2 - ab]$

$xyz = a^3 - b^3$

43. ANS : (d)

$$\text{પદાવલી} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-14}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-15}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{48}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-30}}$$

$= (\cos\theta + i\,\sin\theta)^{-47}$

$= \cos(-47)\theta + i\sin(-47)\theta$

$= \cos 47\theta - i\sin 47\theta$

44. ANS : (a)

$$z = \frac{1+7i}{(2-i)^2} = \frac{1+7i}{3-4i}$$

$$\therefore z = \frac{(1+7i)(3-4i)}{9+16} = -1 + i$$

a = -1, b = 1, $\theta \in ({\pi}/{2},\ \pi)$

$r = |z| = \sqrt{2}$ અને $\theta = \tan^{-1}(-1) = 3{\pi}/{4}$

$z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

45. ANS : (b)

ધારો કે $$z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{4n+1}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{4n}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{4n}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)}(\sqrt{3}+i)$$

$$z = i^{4n}(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i$$

$$\therefore \arg z = \arg(\sqrt{3}+i)$$

$$= \tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right) = \pi/6$$

46. ANS : (b)

$$\frac{2z-3}{iz+1} = \frac{2(x+iy)-3}{i(x+iy)+1}$$

$$= \frac{(2x-3)+2y}{(1-y)+ix}$$

$$\text{Im}\left(\frac{2z-3}{z+1}\right) = \frac{\left[(2x+3)+i\,2y\right]\left[(1-y)-ix\right]}{(1-y)^2+x^2}$$

$$= \frac{2y(1-y)-x(2x-3)}{x^2+(1-y)^2} = -2$$ આપેલ છે.

$\therefore$ $3x - 2y + 2 = 0$

જે રેખાનું સમીકરણ દર્શાવે છે.

47. ANS : (d)

$$|z-4| < |z-2|$$

$$\therefore |x+iy-4| < |x+iy-2|$$

$$\therefore (x-4)^2 + y^2 < (x-2)^2 + y^2$$

$$\therefore 12 < 4x$$

$x > 3$ $\qquad \therefore \text{Re}(z) > 3$

48. ANS : (c)

$|z-i|+|z+i|=k$

$\therefore |x+iy-i|+|x+iy+i|=k$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=k$

$\therefore -4y=k\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)$

$\therefore \dfrac{-4y}{k}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

$\& k=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

$\therefore k-\dfrac{4y}{k}=2\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\therefore 4\left[x^2+(y-1)^2\right]=(k-{}^{4y}/_{k})^2$

$\therefore 4x^2+4y^2-8y+4=k^2-8y+{}^{16y^2}/_{k^2}$

$\therefore x^2+y^2+1=\dfrac{k^2}{4}+\dfrac{4y^2}{k^2}$

$\therefore x^2+\left(1-{}^{4}/_{k^2}\right)y^2=\dfrac{k^2}{4}-1$

$\therefore \dfrac{x^2}{\left(k^2-4\right)/4}+\dfrac{y^2}{k^2/4}=1$

ઉપવલય માટે $k^2-4>0$

$\therefore k^2>4$

$\therefore k^2>2$

k = 3, 4 k=4

49. ANS : (c)

$r=|z|=2$ અને $\theta=\arg z=-{}^{2\pi}/_{3}$ આપેલ છે.

$\therefore \theta$, ત્રીજા ચરણમાં મળે છે.

$\cos\theta={}^{x}/_{r}$, $\sin\theta={}^{y}/_{r}$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$= 2\cos\left(-2\pi/3\right)$ $\quad = 2\sin\left(-2\pi/3\right)$

$= -1$ $\quad = -\sqrt{3}$

$z = x + iy = -1 - i\sqrt{3}$

50. ANS : (d)

$$\begin{vmatrix} 6i & -3i & -1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy$$

$0 = x + iy$

$\therefore x = 0, y = 0$

51. ANS : (c)

$z = x + iy$

$|z - i\ \mathrm{Re}(z)| = |z - \mathrm{Im}(z)|$

$\therefore |x + i(y - x)| = |x - y + iy|$

$\therefore x^2 + (y - x)^2 = (x - y)^2 + y^2$

$\therefore x^2 = y^2$

$\therefore x = \pm y$

52. ANS : (c)

ધારો કે $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w^2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $w^3 = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-w^2 & w^2 \\ 1 & w & w^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w & w \end{vmatrix} \quad (\because 1 + w + w^2 = 0)$$

$= 1(w^2 - w^3) - 1(w - w^2) + 1(w - w)$

$= 3w^2$

53. ANS : (b)

Hint $\left\{\forall\ a \in R,\ |a| = \sqrt{a^2} \quad |a|^2 = a^2\right\}$

$$(|x|-|y|)^2 \geq 0$$

$$\therefore |x|^2 - |y|^2 \geq 2|x|\ |y|$$

$$\therefore 2|x|\ |y| \leq |x|^2 + |y|^2$$

$$\therefore |x|^2 + 2|x|\ |y| + |y|^2 \leq 2|x|^2 + |y|^2$$

$$\therefore (|x|+|y|)^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$$

$$\therefore (|x|+|y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

$$\therefore (|x|+|y|)^2 \leq 2|z|^2$$

$$\therefore |x|+|y| \leq \sqrt{2}|z|$$

$$\therefore k = \sqrt{2}$$

54. ANS : (d)

$$a = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7} \qquad \therefore a^7 = 1$$

$$\alpha+\beta = a + a^2 + a^4 + a^3 + a^5 + a^6$$

$$= a(a^6 - 1)/a - 1$$

$$= a^7 - a / a - 1$$

$$= (1\text{-}a) / (a\text{-}1)$$

$$\alpha+\beta = -1$$

$$\alpha\beta = (a + a^2 + a^4)(a^3 + a^5 + a^6)$$

$$= a^4 + a^6 + a^7 + a^5 + a^7 + a^8 + a^7 + a^9 + a^{10}$$

$$= 2a^7 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10}$$

$$= 2 + a^4(1-1)$$

$$\alpha\beta = 2$$

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore x^2 + x + 2 = 0$$

55. ANS : (b)

ધારોકે z = x+iy   iz = ix-y

=(x, y)   =(-y, x)

z+iz = x+iy + ix-y = (x-y, x+y)

$\Delta = 2$ આપેલ છે. $\therefore \frac{1}{2}|D| = 2$ $\therefore |D| = 4$

જ્યાં $D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -y & x & 1 \\ x-y & x+y & 1 \end{vmatrix}$

$D = -(x^2 + y^2)$

હવે $|D| = 4$ $\therefore x^2 + y^2 = 4$

$\therefore |z|^2 = 4$ $\therefore |z| = 2$

56. ANS : (b)

ABC માં $m\angle C = \pi/2$ અને AC =BC

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

અહીં $AB = |z_1 - z_2|,\ BC = |z_3 - z_2|,\ AC = |z_1 - z_3|$

AC = BC

$\therefore |z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$

$\therefore (z_1 - z_3)^2 = \pm i(z_3 - z_2)^2$

$\therefore z_1^2 + z_3^2 - 2z_1z_3 = -(z_3^2 + z_2^2 - 2z_2z_3)$

$\therefore z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = 2z_1z_3 - 2z_1z_2 - 2z_3^2$

$\therefore (z_1 - z_2)^2 = 2(z_1z_3 - z_3^2 - z_1z_2 + z_2z_3)$

$= 2(z_2 - z_3)(z_3 - z_2)$

$\therefore k = 2$

57. ANS : (b)

$x_n = \cos\left(\pi/2^n\right) + i\ \sin\left(\pi/2^n\right)$

$\therefore x_1 = \cos \pi/2 + i\ \sin \pi/2 = e^{i\pi/2}$

$$\therefore x_2 = \cos \pi/4 + i \sin \pi/4 = e^{i\pi/4}$$

$$\therefore x_3 = \cos \pi/8 + i \sin \pi/8 = e^{i\pi/8}$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 ------\infty = e^{i\pi/2} \cdot e^{i\pi/4} \cdot e^{i\pi/8} ---$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}------\infty\right)}$$

$$= e^{\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+---\infty\right)}$$

$$= e^{\pi i}\left(\frac{1/2}{1-1/2}\right) = e^{\pi i}$$

$$= \cos \pi + i \sin \pi$$

$$= -1$$

58. ANS : (a)

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$|z| = 1 \qquad \therefore \bar{z} = 1/z$$

$$\left|1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3\right| = \left|\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3\right|$$

$$1 = \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right|$$

$$\therefore |z_1 + z_2 + z_3| = 1$$

59. ANS : (d)

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$z^{2n-1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{2n-1}$$

$$= e^{i(2n-1)\theta}$$

$$\sum_{n=1}^{15} \operatorname{Im}\left(z^{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{15} \operatorname{Im}\left(e^{i(2n-1)\theta}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{15} \sin(2n-1)\theta$$

$= \sin\theta + \sin 3\theta + - - - + \sin 29\theta$

$\therefore \sum_{n=1}^{15} \text{Im}\left(z^{2n-1}\right) = \frac{1}{2\sin\theta}\left[2\sin\theta\sin\theta + 2\sin 3\theta\sin\theta + - - + 2\sin 29\theta\sin\theta\right]$

$= \frac{1}{2\text{Sin}\theta}\left[(\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + - - - - + (\cos 28\theta - \cos 30\theta)\right]$

$= \frac{1}{2\text{Sin}\theta}[\cos 0 - \cos 30\theta]$

$\theta = 2^0$ મૂકતાં

$\frac{1}{2\sin 2^0}[1 - \cos 60] = \frac{1}{2\sin 2^0}(1 - \frac{1}{2})$

$\frac{1}{4\sin 2^0}$

60. ANS : (c)

$z = \frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta}$

$\therefore z = \frac{(3 + 2i\sin\theta)(1 + 2i\sin\theta)}{1 + 4\sin^2\theta}$

$\therefore z = \frac{3 - 4\sin^2\theta}{1 + 4\sin^2\theta} + i\frac{8\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta}$

$z = \bar{z}$ આપેલ છે.

$\therefore \text{Im}(z) = 0$

$\therefore \frac{8\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta} = 0$

$\therefore \text{Sin}\ \theta = 0 \qquad \therefore \theta = k\pi,\ k \in z$

61. ANS : (b)

$|z_1| = 12, \qquad |z_2 - 3 - 4i| = 5$

$|z_2 - (3 + 4i)| \geq |z_2| \sim |3 - 4i|$

$\therefore 5 \geq |z_2| \sim 5$

$\therefore 10 \geq |z_2| \qquad \therefore |z_2| \leq 10$

હવે $|z_1 - z_2| \ge |z_1| \sim |z_2|$

$\ge 12 \sim 10$

≥ 2

$\therefore |z_1 - z_2|$ ની ન્યુનતમ કિંમત = 2

62. ANS : (a)

$\bar{z} z^3 + z \bar{z}^3 = 350$ જ્યાં z = x + iy

$\therefore z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) = 350$

$\therefore (x^2+y^2)\left[(x+iy)^2 + (x-iy)^2\right] = 350$

$\therefore (x^2+y^2)\cdot 2(x^2-y^2) = 350$

$\therefore (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 175 = 25\times 7$

$\therefore x^2+y^2 = 25 \qquad x^2-y^2 = 7$

સમીકરણોને ઉકેલતાં, $x^2 = 16, y^2 = 9$

$\therefore -x = \pm 4, y = \pm 3$

$\therefore$ (4, 3), (-4, 3), (-4, -3), (4, -3)

લંબચોરસના શિરોબિંદુઓ છે.

$\therefore$ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= 8\times 6 = 48$

63. ANS : (b)

$w \ne 1$, 1 ના ઘનમૂળો છે.

$\therefore w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $w^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$$|a+bw+cw^2| = \left|a + b\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + c\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(2a-b-c) + (b\sqrt{3} - c\sqrt{3})i\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2a-b-c)^2 + (\sqrt{3}b - \sqrt{3}c)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ac + 3b^2 + 3c^2 - 4ac\right]^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[4a^2+4b^2+4c^2-4ab-2bc-4ac\right]^{1/2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]^{1/2}$$

a, b, c ભીન્ન હોવાથી $a \neq b \neq c$ તથા

a, b, c પૂર્ણાંકો છે.

∴ તેમની વચ્ચેનો ન્યુનતમ તફાવત 1 છે.

∴ a = b લેતાં અને $|b-c|=1,\ |c-a|=1$

તો $|a+bw+cw^2| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1+1)^{1/2}$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}(2)^{1/2}$$

$$\geq 1$$

∴ ન્યુનતમ કિંમત $|a + bw + cw^2|$, 1 છે.

64. ANS : (c)

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|=1$$

$$\therefore |z_1-z_3|=|z_2-z_3| ------(1)$$

વળી, $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}-1$

$$\therefore \frac{z_1-z_3-z_2-z_3}{z_2-z_3}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ |z_1-z_2|=|z_2-z_3| -------------(2)$$

(1) & (2) પરથી

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|$$

∴ આપેલ ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

જવાબો

1	a	21	c	41	c	61	b
2	b	22	b	42	d	62	a
3	b	23	c	43	d	63	b
4	c	24	a	44	a	64	c
5	b	25	a	45	b		
6	a	26	c	46	b		
7	c	27	b	47	d		
8	b	28	a	48	c		
9	b	29	b	49	c		
10	d	30	b	50	d		
11	d	31	a	51	b		
12	a	32	c	52	c		
13	d	33	a	53	b		
14	d	34	c	54	d		
15	a	35	b	55	b		
16	c	36	b	56	b		
17	c	37	d	57	b		
18	c	38	c	58	a		
19	b	39	d	59	d		
20	c	40	a	60	c		

● ● ●

ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ

સેક્ટર-૧૦ બી, જૂના સચિવાલય પાસે, ગાંધીનગર-૩૮૨ ૦૧૦