RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

વર્ષ : 63 ઈ-આવૃત્તિ-14 સળંગ અંક : 319 ઓક્ટોબર-2025

For Private Circulation Only

મુખપૃષ્ઠ પરનો ગણિતજ્ઞ

પિયર ડેલિગ્ને (Pierre Deligne)

Birth : 3rd October, 1944

email : suganitam2018@gmail.com

આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

સંવર્ધક તંત્રી
ડો. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

અનુક્રમણિકા

સળંક અંક : 319 ઈ-આવૃત્તિ-14 ઑક્ટોબર-2025

	લેખનું શીર્ષક	લેખક	પાના નં.
1	સંપાદકીય		02
2	સો અંક પહેલાં	--	03
3	ઉઘાડી રાખજો બારી-7, આર્યભટ	પ્રા. એમ. એચ. વસાવડા	04
4	‘લીલાવતી’ની લીલા-3	શ્રી મેઘરાજ જ. ભટ્ટ	07
5	ગાણિતિક રમતો અને ગણિત-ગમ્મતો અંકમૂળની સરળ રમતો	પ્રા. પી. કે. વ્યાસ	10
6	ભૂમિતિના વક્રો આમતો શું કામના?	શ્રી અન્સાર પરવેઝમહેદી એ.	15
7	પુસ્તકાવલોકન - આર્ય ભટ	પ્રા. પી. કે. વ્યાસ	21
8	મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ – ફિલ્ડ્સ મેડલ અને આબેલ પુરસ્કાર વિજેતા : પિયર ડેલિગ્ને (Pierre Deligne)	ડૉ. માનસી મહેતા	24
9	સંમેય સંખ્યાઓ	શ્રી કલ્પેશ ડી. અખાણી	29
10	ચાપ વક્રો : Arclets	શ્રી રમેશ કે. માલનિયા	32
11	Math Meets Mythology: Goddess Subhadra’s Place in SAS Similarity	Ms. Sabita Routroy	37
12	પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો	ડૉ. સચિન ગજ્જર	39
13	ગણિત સમાચાર	--	42

સંપાદકીય

વિક્રમ સંવત 2082ના નવા વર્ષના શુભ પર્વે, સમસ્ત ગણિતપ્રેમીઓને સુગણિતમ્ પરિવાર વતી વ્યાવસાયિક સફળતા અને નવી ઊંચાઈઓ પ્રાપ્ત થાય તેવી શુભેચ્છાઓ. સાલ મુબારક!

સુગણિતમ્નો સળંગ અંક 319 (E અંક-14) આપ સર્વે સમક્ષ મૂકતાં હર્ષની લાગણી અનુભવીએ છીએ. આ એક એવું સામયિક છે જેમાં ગણિતરસિકોને રસ પડે તે મુજબની શૈલીમાં લખાયેલ ગણિતનાં વિવિધ વિષયાંગો પરના લેખો પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે. ગુજરાતમાં યોજાતી ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓના અહેવાલો, રસપ્રદ ગણિત કણિકાઓ તથા કોયડાઓ, વાચકોના પ્રતિભાવો વગેરેનો પણ સમાવેશ સુગણિતમ્માં કરવામાં આવે છે.

સુગણિતમ્ના વાચકો માટે રસપ્રદ બની રહે તેવા, ગણિતવિષયને કેન્દ્રમાં રાખીને લખાયેલ. કોઈપણ મૌલિક લેખ સુગણિતમ્ના હવે પછીના અંકોમાં શક્ય પ્રકાશન માટે આવકાર્ય છે. સુગણિતમ્ને વધુ સમૃદ્ધ બનાવવા માટેનાં આપનાં રચનાત્મક સૂચનો તથા અભિપ્રાયો આવકાર્ય છે.

અંક 317-318ના સંપાદકીયમાં જણાવ્યા અનુસાર ગણિત-શિક્ષણને સ્પર્શતા મુદ્દાઓ પર વાચકો પોતાના વિચારો રજૂ કરી શકે તે માટે સુગણિતમ્ દ્વારા 'ગણિત શિક્ષણ વિભાગ' શરૂ કરવામાં આવ્યો છે. આ વિભાગમાં નીચેના તથા આ પ્રકારના અન્ય મુદ્દાઓનો સમાવેશ કરવાનું આયોજન છે.

(1) ગણિત-શિક્ષણને રસપ્રદ કેવી રીતે બનાવી શકાય?
(2) ગણિત-શિક્ષણ દરમિયાન ચર્ચા કરી શકાય તેવા અભ્યાસેતર રસપ્રદ મુદ્દાઓ.
(3) ગણિતના જૂના અને નવા અભ્યાસક્રમો તથા તેમની સરખામણીઓ.
(4) ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકો : ખૂબીઓ અને ખામીઓ.
(5) ગણિતના ઉર્ધ્વમૂલ્યન કે અવમૂલ્યનમાં પાઠ્યપુસ્તકોનો ફાળો.
(6) ગણિતની પરીક્ષા પદ્ધતિ : ખૂબીઓ અને ખામીઓ
(7) શિક્ષકોની સજ્જતામાં વૃદ્ધિ થાય તેવા સરકારી રાહે તથા ખાનગી સંસ્થાઓ દ્વારા ચલાવાતા કાર્યક્રમો.
(8) ગુજરાત ગણિત મંડળ અને તેને સંગત ફાઉન્ડેશનો શિક્ષકોની સજ્જતામાં વૃદ્ધિ થાય તે પ્રકારના કાર્યક્રમો કરી શકે કે કેમ - તે બાબતમાં આપનાં સૂચનો.

આપ સર્વેને ઉપરોક્ત મુદ્દાઓનાં અનુસંધાને લેખ / સૂચનો લખવા આમંત્રણ છે.

સુગણિતમ્ માટે આપના લેખ / ગણિત સમાચાર મોકલવા માટેનું સરનામું નીચે મુજબ છે :

સરનામું : ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત-395007
મોબાઈલ : 98980 57891 ઈ-મેઈલ : suganitam2018@gmail.com

સુગણિતમ્ને વધુ સમૃદ્ધ બનાવવા માટે આપનાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

સુગણિતમ્ના E-અંકો ઈ-મેઈલથી નિઃશુલ્ક મેળવવા માટે આપનું અથવા સંસ્થાનું નામ, સરનામું, ઈ-મેઈલ તથા વોટ્સએપ નંબર અમને જણાવશો.

હરહંમેશની જેમ સુગણિતમ્ના અંકોને તૈયાર કરવા માટે ખૂબ જ જહેમત ઉઠાવનાર પ્રા. પ્રહલાદભાઈ વ્યાસનો સંપાદક મંડળ વિશે આભાર માને છે.

અનિવાર્ય સંજોગોને કારણે સળંગ અંક 319 પ્રગટ કરવામાં મોડું થયું છે. અંક 320 તેના પુર્વ નિર્ધારિત સમય મુજબ જાન્યુઆરી-2026 ના પ્રથમ સપ્તાહમાં પ્રગટ થાય તે માટે અમે પ્રયત્ન કરીશું. - **સંપાદકો**

સો અંક પહેલાં...

[સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 219 જાન્યુઆરી-ફેબ્રુઆરી 2006 નો હતો. આ અંકમાં પ્રાધ્યાપક વસંત ગ. ટીકેકરનો લખેલો લેખ ગણિત મોતી-1 પ્રગટ થયો હતો. આ લેખ અત્રે પુનર્મુદ્રિત કરીએ છીએ.– સંપાદક]

❖ **ગણિત મોતી-1 :**

(1) રામાનુજન (1887-1920) અને આઈન્સ્ટાઈન (1879-1955) એ બન્ને ગણિતના ક્ષેત્રોમાં બહુ મોટી શખ્સીયતો હતી. આઈન્સ્ટાઈન તો મોટા ભૌતિક વિજ્ઞાની પણ હતા. એ બે વચ્ચેનું એક સામ્ય તો એ હતું કે તે બંને ગણિતજ્ઞો કે વૈજ્ઞાનિકો તરીકે પંકાયા તે પહેલાં તે બંનેએ કારકૂનની નોકરી કરી હતી. રામાનુજને મદ્રાસ પોર્ટ ટ્રસ્ટમાં 1912-13 દરમિયાન કારકુનગીરી કરી હતી અને આઈન્સ્ટાઈને 1902 થી 1909 સુધી સ્વીટ્ઝરલેંડમાં બર્ન ખાતે પેટન્ટ ઓફિસમાં કારકુની કરી હતી. રામાનુજનનો હાથ 1914માં હાર્ડીએ પકડ્યો અને તેનો સીતારો ચમક્યો, આઈન્સ્ટાઈનને 1909માં ઝુરિકની પોલીટેકનીકમાં પ્રાધ્યાપકનું સ્થાન મળ્યું.

આઈન્સ્ટાઈન અને કર્ટ ગોડેલ બન્ને પાકા મિત્રો હતા. ગોડેલ ગણિતશાસ્ત્રી હતો અને આઈન્સ્ટાઈને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં સાપેક્ષવાદથી જેટલો ખળભળાટ મચાવી મૂક્યો હતો તેટલો જ ખળભળાટ ગોડેલે પોતાના અપૂર્ણતાના પ્રમેયથી ગણિતમાં મચાવી મૂક્યો હતો. અપૂર્ણતાનું પ્રમેય એમ કહે છે કે તમે ગમે તે પૂર્વધારણાો લઈને વિષયની શરૂઆત કરો તો પણ વિષયમાં એવું કોક વિધાન મળશે જ કે જેને તમે સાચું પણ નહિ સાબિત કરી શકો અને ખોટું પણ સાબિત નહિ કરી શકો. (જેમ કે યુક્લિડીય ભૂમિતિમાં સમાંતરની પૂર્વધારણા તરીકે આખરે જેને લેવું પડ્યું તે વિધાન). આ પ્રમેયથી કેટલાયે ગણિતજ્ઞોના સંશોધનમાં સંકટ ઊભા થઈ ગયાં હતાં. એક અન્ય મજાની વાત એ છે કે આઈન્સ્ટાઈન અને ગોડેલ બંનેએ પોતાના મા-બાપની ઈચ્છા વિરુદ્ધની સ્ત્રીઓ સાથે લગ્ન કર્યાં હતાં.

(2) કેટલાક લોકોને ગણિતની કુદરતી બક્ષિસ મળી હોય છે, કેટલાક બીચારા ખૂબ પરિશ્રમ કરીને ગણિતજ્ઞ બને છે. એક વાર ઈંગ્લેંડના ગણિતજ્ઞ હાર્ડી (1877-1947) એ કુદરતી બક્ષિસવાળા ગણિતજ્ઞોને તેમની ઉત્કૃષ્ટતા પ્રમાણે 100 માંથી માર્ક આપવાનો ચાળો કર્યો હતો. હાર્ડીએ પોતાની જાતને 100 માંથી 25 માર્ક આપ્યા, પોતાના એક સાથી જે. ઈ. લીટલવુડને 30 માર્ક આપ્યા, પ્રખ્યાત જર્મન ગણિતજ્ઞ ડેવીડ હિલ્બર્ટને તેણે 80 માર્ક આપ્યા પણ રામાનુજનને તેણે 100 માંથી 100 માર્ક આપ્યા.

(3) માઈકેલ શાલ્સ (Michael Chasles) (1793-1880) એક ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ હતો અને પેરિસની વિખ્યાત ઈકોલ પોલીટેકનીકમાં ગણિતનો પ્રાધ્યાપક હતો. ગુરુત્વાકર્ષણના સિદ્ધાંતની શોધનો યશ આખી દુનિયા ઈંગ્લેંડના ન્યૂટનને આપતી હતી પણ શાલ્સ દ્રઢ પણે માનતો હતો કે એ સિદ્ધાંતની શોધ ફ્રાન્સના પાસ્કલે કરી હતી. પણ તેની વાત કોઈ માનતું નહોતું.

એક વાર આ શાલ્સની મુલાકાત એક વ્રેન-ડેનીસ લ્યુકાસ (Vrain-Denis Lucas) નામના ગૃહસ્થ સાથે થઈ હતી. આ ભાઈએ શાલ્સને કહ્યું કે તેની પાસે પાસ્કલ અને ન્યૂટન વચ્ચે થયેલો પત્રવ્યવહાર છે. આમ તો તેની પાસે સિકંદર, પ્લેટો, ક્લીઓપેટ્રા વિ. અનેકના હસ્તાક્ષરો પણ હતા. શાલ્સે જોયું કે પાસ્કલ-ન્યૂટનના પત્રવ્યવહારથી એ સાબિત થઈ જતું હતું કે ગુરુત્વાકર્ષણ સિદ્ધાંતની શોધ પાસ્કલે જ કરી હતી. આથી શાલ્સ તો ગેલમાં આવી ગયો અને પત્રવ્યવહાર વેચાતો લેવા તૈયાર થઈ ગયો. પણ લ્યૂકાસે તેનો આખો સંગ્રહ સાથે જ વેચવાની ઈચ્છા જાહેર કરી અને તેની કિંમત 1,40,000 ફ્રાંક કહી. શાલ્સને તો ગમે તે કિંમતે એ સંગ્રહ લેવો જ હતો એટલે તેણે 1,40,000 ફ્રાંક આપ્યા અને પછી પેરિસની એકેડેમી ઑફ સાયન્સને તેણે એ પત્રવ્યવહાર સોંપ્યો. એકેડેમી પાસે તો પાસ્કલના હસ્તાક્ષરો હતા. તેની સાથે શાલ્સના સંગ્રહમાંના પાસ્કલના કહેવાતા પત્રો સરખાવતાં પેલા લ્યૂકાસે આપેલા બધા પત્રો બનાવટી હોવાનું સાબિત થયું ! પછી લ્યૂકાસનો પત્તો શેનો લાગે? બિચારો શાલ્સ !

ક્રમશ :

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

આર્યભટ

એમ. એચ. વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9824669364

આ શ્રેણીમાં અત્યાર સુધીમાં ચાર ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓ - યુક્લિડ, ઈરેટોસ્થેનેસ, પાયથાગોરસ અને આર્કિમિડીસ - ની વાત કરી. ત્યારબાદ શ્રીનિવાસ રામાનુજન સાથે નિકટ રીતે સંકળાયેલા બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી જી.એચ. હાર્ડીની વાત કરી. આ લેખમાં આપણે ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી 'આર્યભટ' ની વાત કારીશું.

આર્યભટના નામથી ભારતના શિક્ષિત જનો પરિચિત છે. 1975 માં ભારતે અવકાશમાં તરતા મૂકેલા સર્વપ્રથમ ઉપગ્રહનું નામ આર્યભટ રાખવામાં આવ્યું હતું. આર્યભટ આ માનને સર્વથા યોગ્ય હતા, કારણ કે તેઓ મહાન ગણિતજ્ઞ અને ખગોળવિદ તો હતા જ, પરંતુ ગણિતના ઈતિહાસને પાને સ્થાન પામનારા તેઓ પહેલા ભારતીય ગણિતજ્ઞ હતા. એવું તો નથી કે આર્યભટ પહેલાં ભારતમાં કંઈ ગણિત હતું જ નહીં. વેદોમાં મોટી મોટી સંખ્યાઓનો ઉલ્લેખ જોવા મળે છે. ઈ.સ.પૂર્વે લખાયેલા શૂલ્બસૂત્રોના ગ્રંથોમાં ભૌમિતિક રચનાઓ વિશે માહિતી છે. શૂન્ય અને દશાંક પદ્ધતિની શોધ ભારતમાં આર્યભટ પહેલાં ત્રણસો-ચારસો વર્ષ અગાઉ થયાનું મનાય છે. આમ છતાં આર્યભટ પહેલાંના કોઈ ભારતીય ગણિતજ્ઞનું નામ ઈતિહાસમાં જોવા મળતું નથી એ નવાઈની વાત છે. એક કારણ એ હોઈ શકે કે એ સમયની ભારતીય પ્રણાલી પ્રમાણે ગણિતનું ચિંતન કરનારા ઋષિઓએ પ્રસિદ્ધિના મોહથી દૂર રહેવાનું યોગ્ય માન્યું હોય.

આર્ટભટ પહેલાંના ભારતીય ગણિતજ્ઞો વિશે તો કંઈ માહિતી નથી. પરંતુ આર્યભટ વિશે પણ આછી પાતળી જ માહિતી છે. તેમના વિશે જે માહિતી ઉપલબ્ધ છે. તે તેમના એકમાત્ર ગ્રંથ 'આર્યભટીય' માંથી મળે છે. આ ગ્રંથના એક શ્લોકને આધારે એવું તારવવામાં આવે છે કે આર્યભટનો જન્મ ઈસ્વીસન 476 માં થયો હતો. આ શ્લોકમાં તેઓએ લખ્યું છે કે તેમની વય જ્યારે 23 વર્ષની હતી ત્યારે કળિયુગની શરૂઆત પછીનાં 3600 વર્ષ વીત્યાં હતાં. આનો અર્થ એવો થાય કે આર્યભટના જન્મ વખતે કળિયુગનાં 3600 - 23 = 3,577 વર્ષ વીત્યાં હતાં. ભારતીય જ્યોતિષાચાર્યોની માન્યતા મુજબ શક કાળના પ્રારંભ સમયે કળિયુગનાં 3179 વર્ષ થયાં હતાં હવે 3,577 - 3,179 = 398. આથી આર્યભટનો જન્મ શક સંવત 398 માં થયો હતો. શક કાળની શરૂઆત ઈસ્વીસનની શરૂઆત પછી 78 વર્ષે થઈ અને 78 + 398 = 476. આમ આર્યભટનો જન્મ ઈસ્વીસન 476 માં થયો હતો. (આ ઉપરથી એમ કહી શકાય કે અત્યારે કળિયુગનાં 3,577 + (2025 – 476) = 5126 વર્ષ વીત્યાં છે. જો કે તમે કહેશો કે આપણને તો કળિયુગનાં કેટલા વર્ષો વીત્યાં તેના કરતાં કેટલાં વર્ષ બાકી રહ્યાં, એ જાણવામાં વધુ રસ છે. માફ કરજો, મારી પાસે એ અંગે કંઈ માહિતી નથી.)

તમે નોંધ્યું હશે કે આર્યભટના નામની જોડણી આપણે 'આર્યભટ' કરી છે, જ્યારે કેટલીક જગ્યાએ 'આર્યભટ્ટ' જોવામાં આવે છે. તો કઈ જોડણી સાચી ? તેમના ગ્રંથ આર્યભટીયની જોડણી પરથી અને તેમના પછી થયેલા કેટલાક ગણિતજ્ઞોએ તેમના નામની કરેલી જોડણી પરથી આધારભૂત રીતે કહી શકાય કે ખરી જોડણી 'આર્યભટ' છે, આર્યભટ્ટ નહીં.

આર્યભટના જન્મ સ્થળ વિશે સંદિગ્ધતા પ્રવર્તે છે. તેમના ગ્રંથમાં તેઓ એ ગ્રંથ કુસુમપુરમાં લખી રહ્યા છે તેવો ઉલ્લેખ છે. કુસુમપુર એટલે અત્યારનું પટણા. બીજી બાજુ તેમના ગ્રંથનો દક્ષિણ ભારતમાં ઘણો પ્રચાર થયો છે. આ ગ્રંથની હસ્તપ્રતો પણ દક્ષિણ ભારતમાંથી મળી આવી છે. એટલે એમ માનવામાં આવે છે કે આર્યભટનો જન્મ ગોદાવરી નદીના કિનારાના કોઈ પ્રદેશમાં થયો હતો અને ત્યારબાદ તેઓએ પટણાને તેમનું નિવાસસ્થાન બનાવ્યું હતું.

આર્યભટ કેટલું જીવ્યા અને તેમનાં માતા-પિતા કોણ હતાં, એ વિશે કોઈ માહિતી મળતી નથી.

આર્યભટ લિખિત ગ્રંથ ‘આર્યભટીય’ સંસ્કૃતમાં છે અને પદ્યમાં છે. ગ્રંથમાં ચાર ભાગમાં કુલ 121 શ્લોકો છે.

ગ્રંથના પહેલા ભાગ ‘દશ ગીતિકા પાદ’માં આર્યભટે અક્ષરોની મદદથી સંખ્યાલેખનની વાત કરી છે. તેમની આ રીતથી તેઓ એક યુગના દિવસોની સંખ્યા, સૂર્ય, ચંદ્ર અને ગ્રહો એક યુગમાં કેટલાં પરિભ્રમણ કરે છે તે સંખ્યાઓ વગેરે દર્શાવે છે. બીજા ભાગ ‘ગણિતપાદ’માં અંક ગણિત, બીજગણિત, ભૂમિતિ અને ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરની વાત છે. ત્રીજા ભાગ ‘કાલ ક્રિયા પાદ’ માં સમયના જુદા જુદા ખંડ અને તે વચ્ચેના સંબંધોની વાત છે. ચોથા ભાગ ‘ગોલપાદ’ માં 50 શ્લોકો છે અને આ ભાગ સૌથી મોટો છે. આ ભાગમાં ખગોલીય ઘટનાઓની ચર્ચા છે. પૃથ્વીના તેની ધરી આસપાસના ભ્રમણ અંગેના અને સૂર્ય, ચંદ્ર ગ્રહણ વિશેના તેમના એ સમયના ક્રાંતિકારી વિચારો આર્યભટ્ટ આ ભાગમાં રજૂ કરે છે.

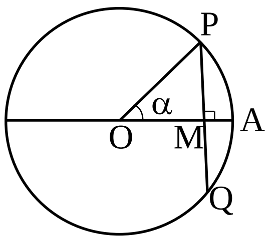
આ લેખશ્રેણીનો એક (અને મુખ્ય) હેતુ અભ્યાસક્રમમાં હોય તેવી ગણિતને લગતી, પરંતુ પાઠ્યપુસ્તકમાં ન હોય તેવી અને વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓને કહી શકાય તેવી વાતો આલેખવાનો છે. તો જોઈએ આર્યભટનાં કયાં કયાં પ્રદાનોની વાત વર્ગમાં કરી શકાય.

1. દિવસ અને રાતનો ખ્યાલ બહુ અગત્યનો છે. દિવસ અને રાત પૃથ્વીના તેની ધરી આજુબાજુના પરિભ્રમણને કારણે થાય છે. આ પરિભ્રમણનો ખ્યાલ સૌ પહેલાં આર્યભટે આપ્યો હતો.

2. સૂર્યગ્રહણ અને ચંદ્રગ્રહણ એ અત્યંત મહત્ત્વની ખગોલીય ઘટનાઓ છે. આ અંગે રાહુ અને કેતુ સૂર્ય અને ચંદ્ર ને ગળી જાય છે એવી ભ્રામક માન્યતા પ્રવર્તતી હતી. આર્યભટે આ માન્યતાનું ખંડન કર્યું અને ગ્રહણ માટેનાં સાચાં ખગોલીય કારણ આપ્યાં. ખરેખર આ મહાન વિચાર ક્રાંતિ હતી. કમનસીબે આર્યભટના જન્મ બાદ લગભગ સવાસો વર્ષ પછી જન્મેલા ભારતના મહાન ગણિતજ્ઞ બ્રહ્મગુપ્તે આર્યભટની પૃથ્વીની ધરી આસપાસના ભ્રમણની અને સૂર્ય, ચંદ્રનાં ગ્રહણના કારણની એ બંને વાત નકારી કાઢી હતી. પણ આજે આપણે જાણીએ છીએ કે આર્યભટના એ બંને ખ્યાલો સાચા હતા અને એ માટે તેમના પ્રતિ આદરની લાગણી અનુભવીએ છીએ.

3. આર્કિમિડીસ નું જીવન આલેખતી વખતે આપણે π નો ઉલ્લેખ કર્યો હતો. આર્યભટે પણ πના આસન્ન મૂલ્યની બાબતમાં અગત્યનું પ્રદાન કર્યું છે. આર્યભટે π નું આસન્ન મૂલ્ય $\frac{62832}{20000}$ આપ્યું છે. ચાર દશાંશ સ્થળ સુધીનું πનું આ વધુમાં વધુ સચોટ મૂલ્ય છે.

4. જ્યા, કોજ્યા જેવા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરના નામાભિધાનમાં અને અભ્યાસમાં આર્યભટનું પ્રદાન પાયાનું છે. જ્યાને માટે વપરાતા અંગ્રેજી શબ્દ sineના ઉદ્ભવની કહાની રસપ્રદ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જો એકમ વર્તુળમાં $\angle AOP = \alpha$ અને $\overline{PQ}$ એ $\overline{OA}$ ને લંબ હોય તેવી જીવા હોય, તો જ્યા α = PM. હવે $PM = \frac{1}{2}PQ$, એટલે કે PM અર્ધજીવા છે.



પાછળથી ગમે તે કારણસર અર્ધ શબ્દ નીકળી ગયો અને ગુણોત્તર $\frac{PM}{OP} = PM$ માટે જીવા શબ્દ વપરાવા લાગ્યો. (જ્યા પણ જીવા માટેનો જ શબ્દ છે અને તેનો અર્થ ‘ધનુષની દોરી’ એવો થાય છે) આઠમી સદીમાં ભારતીય ગણિતનો અરબી ભાષામાં અનુવાદ થવા લાગ્યો. જીવાને માટે અરબીમાં જીબા શબ્દ પ્રયોજવામાં આવ્યો. હવે અરબી ભાષામાં કેટલીક વાર શબ્દની જોડણી સ્વર વગર જ થાય છે. સ્વર વગરની જોડણીવાળો શબ્દ ખરેખર શું શબ્દ

છે તે આજુબાજુના સંદર્ભ પરથી સમજવામાં આવે છે. એટલે અરબી અનુવાદમાં જીબા માટે જ-બ શબ્દ વપરાયો. અગિયારમી સદીમાં અરબી ગ્રંથનો લૅટિનમાં અનુવાદ કરતી વખતે અનુવાદકને જ-બ શબ્દ શું છે તે ખ્યાલ ન આવ્યો. તેણે એ શબ્દ 'જેબ' હશે તેમ માની લીધું. હવે જેબ એટલે ખીસ્સું. ખીસ્સું છાતી પર હોય છે. છાતી માટે લૅટિન શબ્દ sinus છે એટલે અરબીમાંથી લૅટિનમાં અનુવાદ કરનારે મૂળ જીબા શબ્દનો અનુવાદ sinus કર્યો. sinus પરથી sine (અને સંક્ષેપમાં sin) શબ્દ આપ્યો. આમ જ્યાનો અનુવાદ sine થયો.

સંદર્ભ :

1. વિશ્વ પ્રસિદ્ધ ગણિત પ્રતિભાઓ
   લેખક : ગુણાકાર મૂળે
   અનુવાદ : મોહનભાઈ એચ. વિરોજા,
   નવભારત સાહિત્ય મંદિર, અમદાવાદ, 1995.
2. આર્યભટ
   લેખક : ગુણાકર મૂળે
   અનુવાદ : ડૉ. સુશ્રુત પટેલ,
   ગુજરાત વિશ્વકોષ ટ્રસ્ટ, અમદાવાદ, 2025

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

લેખક સન્માન

સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થતા ગાણિતિક લેખોના લેખકો માટે સુગણિતમ્‌ના પ્રકાશક - પ્રા. અરૂણ મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ - નીચેના પુરસ્કારો જાહેર કરતાં આનંદ અનુભવે છે.

(1) સુગણિતમ્ માટે લેખ લખતા લેખકો પોતાનો કિંમતી સમય લેખ તૈયાર કરવા માટે આપે છે. તેમનું લેખન કાર્ય અમૂલ્ય છે. આવા લેખનને કોઈ પુરસ્કાર આપી મૂલવવું યોગ્ય નથી. પણ ક્યારેક તો લેખકો લેખને ટાઈપ કરાવીને મોકલે છે. ટાઈપ કર્યા પછી કુરીયરથી મોકલે છે. ટાઈપ કરાવવાનો ખર્ચ, કુરીયર દ્વારા મોકલવાનો ખર્ચ તેઓ જાતે ભોગવે છે. લેખકે કરેલા પ્રયત્નને બિરદાવવા માટે અને તેમણે કરેલા ખર્ચને આંશિક રીતે ભરપાઈ કરવા માટે અમે નીચેની જાહેરાત કરીએ છીએ.

(2) કોઈપણ કક્ષાએ અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા, સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત થયેલા, ગાણિતિક લેખ દીઠ રૂા.300/- લેખકને પુરસ્કારરૂપે આપવામાં આવશે.

"દરેક ગાણિતિક લેખના, સુગણિતમ્‌માં છપાયેલાં પાનાં દીઠ લેખકને રૂા.100/- આપવા.
લખાણ એક પાનાથી ઓછું હોય તો લેખકને તે પાના માટે રૂા.50/- આપવા."

‘લીલાવતી’ની લીલા-3

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
E-mail : mjbhatt9@yahoo.com; (M) 99258 37247

આ લેખમાં સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવાની રીત સમજીશું.

❖ **સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવાની રીત :**

આપેલી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવા માટે પ્રથમ સંખ્યાના એકમના અંક પર ઉભી લીટી કરી ડાબી તરફના દશકના અંક પર આડી લીટી- એમ વારાફરતી નિશાની કરી જવી. જો સંખ્યાના અંકોની સંખ્યા એકી હશે તો છેલ્લે ઉભી લીટી આવશે આથી તે એક જ અંકથી શરૂઆત કરવી. જો સંખ્યાના અંકોની સંખ્યા બેકી હશે તો છેલ્લે આડી લીટી આવશે ત્યારે છેલ્લા બે અંકોથી શરૂઆત કરવી. જેમકે –

```
       |   _   |   _   |
-      a   b   c   d   e        →     a થી શરૂ કરવું.
       _   |   _   |   _   |
-      a   b   c   d   e   f    →     ab થી શરૂ કરવું.
```

त्यक्त्वाऽन्त्याद्विषमात्कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तत् हृते
त्यक्त्वालब्धकृतिं तत् आद्य विषमात् लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ।
वड्क्त्यां पडिक्तहृते समे अन्यविषमात् त्यक्त्वाऽऽप्तवर्गं फलं
पड्क्त्यां तत्द्विगुणं न्यसेत्इति मुहुः पड्त्केर्दलं स्यात्पदम् ॥ २५ ॥

અર્થ :

ડાબી બાજુના (એક) અંક અથવા (બે) અંકોમાંથી જે મોટામાં મોટી સંખ્યાનો વર્ગ બાદ થઈ શકે તે સંખ્યા (ધારો કે a_1)નો વર્ગ બાદ કરો અને જવાબમાં a_1 લખો. મૂળ સંખ્યામાંથી ત્યારબાદનો અંક નીચે ઉતારો. a_1 ના બમણા $2a_2$ ને પ્રથમ પંક્તિમાં મૂકો અને નવા ભાજકને $2a_1$ વડે ભાગો, જે a_2 મળે. (આ ભાગફળ વધુમાં વધુ 9 લેવું. હવે $2a_2$ ને $2a_1$ નીચે જમણી તરફ એક સ્થાન ખસેડીને લખો અને સરવાળો કરો જે દ્વિતીય પંક્તિ છે. ફરીથી ઉપરથી એક અંક નીચે લઈ નવો ભાજ્ય મેળવો અને તેમાંથી a_2નો વર્ગ બાદ કરો. હવે તફાવતની સાથે ઉપરથી અંક ઉતારીને જે મળે તેને દ્વિતીય પંક્તિ વડે ભાગો. આ ક્રિયા વારંવાર કરવાથી જવાબમાં વર્ગમૂળ મળશે.

ઉદાહરણ : 46225 નું વર્ગમૂળ શોધવું.

ગણતરી :

```
        ક્રિયા          | જવાબ   | પંક્તિ
     -------------------+--------+---------
     | _| _|            | 2 1 5  | 4
     4 6 2 2 5          |        |   2
     4                  |        | ----
   4 | 0 6              |        | 4 2
     | - 4              |        |   1 0
     -----              |        | -----
         2 2            |        | 4 3 0
        - 1
       -----
  42 |   2 1 2
       - 2 1 0
       -------
             2 5
           - 2 5
           -----
               0
```

સમજૂતી :

(1) | અને __ નિશાનીઓ કરવી. ડાબી તરફથી છેલ્લો એક જ અંક (4) લેવાનો છે.

(2) પ્રથમ અંક 4 છે અને $2^2=4$. આમ જવાબનો પ્રથમ અંક 2 લખો અને 4 ની નીચે 4 લખી બાદ કરતાં 0 મળે.

(3) ઉપરથી 6 લેવો. જવાબમાંના 2 ના 2 ગણા (4) પંક્તિમાં લખો અને 6 નો 4 વડે ભાગાકાર કરતાં ભાગફળ (1)ને જવાબના બીજા અંક તરીકે લખો અને 6 ની નીચે 4 લખી બાદ કરતાં 2 મળે. ઉપરથી 2 નીચે ઉતારો.

(4) જવાબના બીજા અંકના બમણા (2) ને પંક્તિમાં 4 ની નીચે જમણી તરફ એક સ્થાન છોડીને લખો અને સરવાળો કરતાં 42 મળે છે.

(5) જવાબના બીજા અંક 1 ના વર્ગ 1 ને 22 નીચે લખી બાદ કરતાં 21 મળે અને ઉપરથી 2 નીચે ઉતારતાં 212 થાય.

(6) 212 ને 42 વડે ભાગતાં $42 \times 5 = 210$ અને શેષ=2. આથી જવાબનો ત્રીજો અંક 5 મળે અને તેનાથી બમણાં (10) ને પંક્તિમાં 42 ની નીચે એક સ્થાન જમણી તરફ લખીને સરવાળો કરતાં 430 મળે.

(7) $212 - 210 = 2$ અને ઉપરથી 5 ઉતારતાં 25 થાય. જવાબના છેલ્લા અંકો વર્ગ 25 બાદ કરતાં શેષ = 0.

$\therefore$ 46225 નું વર્ગમૂળ = 215.

નોંધ : (1) $\sqrt{21025}$ ની ગણતરીમાં અપવાદ.

```
          ક્રિયા              જવાબ        પંક્તિ
      | _ | _ |
  1 | 2 1 0 2 5             1 4 5           2
    | 1                                   + 8
  2 | 1 1                                 2 8
    | − 8                                   1 0
        3 0                               2 9 0
      − 1 6
 28 |   1 4 2
    | − 1 4 0
          2 5
      −   2 5
          0
```

અહીં જુઓ કે 11 નો 2 વડે ભાગ ચલાવતાં ખરેખર તો $2 \times 5 = 10$ આવે પરંતુ $2 \times 4 = 8$ લીધા છે. કેમ? કારણ કે $2 \times 5 = 10$ લેતાં શેષ 1 મળે અને નવો ભાજ્ય 10 થાય. જેમાંથી $5^2=25$ બાદ થઈ શકે નહીં. આમ જ્યારે પણ આવું થાય ત્યારે નાની સંખ્યાથી ભાગ ચલાવવો. આવો અપવાદ આવી શકે છે.

(2) ભાગાકારથી વર્ગમૂળ મેળવવાની જે રીત આપણે જાણીએ છીએ તે નીચે આપી છે. સરખાવી જુઓ :

```
          |    |   |
    2  | 4  6 2 2 5        | 2 1 5
  + 2  | 4
  4 1  | 0  6 2
    1  |    4 1
  4 2 5|    2 1 2 5          ∴ √46225 = 215
      5|    2 1 2 5
  4 3 0|        0
```

ઉદાહરણ :

मूलं चतुर्णांच तथा नवानां पूर्व कृतानां च सखे कृतीनाम् ।
पृथक्पृथग्वर्गपदानि विधि बुद्धें विवृद्धिः यदि तेऽग ज्ञाता ॥ २६ ॥

અર્થ : હે મિત્ર ! જો તારી બુધ્ધિ આ વર્ગમૂળની ક્રિયા સમજી શકી હોય તો 4, 9 અને આગળના ઉદાહરણમાં કરેલા બધા વર્ગોના વર્ગમૂળ કરી બતાવો.

ગણતરી :

(i)
```
2 | 4 | 2
  |-4
  ----
    0
```
$\therefore \sqrt{4} = 2$

(ii)
```
3 | 9 | 3
   -9
   ---
    0
```
$\therefore \sqrt{9} = 3$

(iii)
```
     _ |
9 | 8 1 | 9
  |-8 1
   ----
     0
```
$\therefore \sqrt{81} = 9$

(iv)
```
   | _ |
1 |1 9 6  | 1 4 | 2
  |1               8
  ----           ----
2 |0 9            2 8
  |-8
  ----
4 |  1 6
  |-1 6
   -----
      0
```
$\therefore \sqrt{196} = 14$

(v)

ક્રિયા	જવાબ	પંક્તિ
see below	2 9 7	4, 18, 58, 14, 594

```
      ક્રિયા            જવાબ     પંક્તિ
     | _ | _ |
 2 | 8 8 2 0 9         2 9 7      4
   |-4                            1 8
    ----                         -----
 4 | 4 8                          5 8
   |-3 6                            1 4
    -----                        -----
   | 1 2 2                        5 9 4
   | -8 1
    ------
5 8|   4 1 0
   | -4 0 6
    --------
   |       4 9
   |     -4 9
    --------
           0
```
$\therefore \sqrt{88209} = 297$

(vi)
```
          ક્રિયા                 જવાબ       પંક્તિ
        | _ | _ | _ | _ |
1     | 1 0 0 1 0 0 0 2 5  | 1 0 0 0 5 |   2
      | 1                                  0
        --                               -------
2     | 0 0                              2 0 0 0
         0                                   1 0
        ---                              ---------
        0 0                              2 0 0 1 0
        0 0
      ------
20    | 0 0 1
      |     0
       ------
          1 0
          0 0
       --------
200   |   1 0 0
      |   0 0 0
          -------
          1 0 0 0
          0 0 0 0
       ----------
2000  |   1 0 0 0 2
      |   1 0 0 0 0
          -----------
                  2 5
                -2 5
                 ----
                   0
```
$\therefore \sqrt{100\ 1000\ 25} = 10005.$

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

અંકમૂળની સરળ રમતો

પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784, vyaspk123@gmail.com

ગાણિતિક રમતોની ચર્ચામાં 'સંખ્યા' શબ્દનો અર્થ 'ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા' એવો કરવાનો છે. ક્યારેક શૂન્યની પણ જરૂર પડે. ગાણિતિક રમતો વિશેના આગળના લેખોમાં આપણે આ સ્પષ્ટતા કરી છે.

આ લેખમાં અંકમૂળની સંકલ્પના પર આધારિત કેટલીક સરળ રમતોની વાત કરવી છે.

અંકમૂળની વ્યાખ્યા સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 317માં ગાણિતિક રમતોમાં આપવામાં આવી હતી. અંકમૂળ અને સમશેષતાના કેટલાક ગુણધર્મોની ચર્ચા પણ આ જ અંકમાં કરવામાં આવી હતી. અહીં તેનું ટૂંકમાં પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

❖ **અંકમૂળની વ્યાખ્યા**

આપેલ પૂર્ણાંક સંખ્યાને 9 વડે ભાગતાં મળતી શેષ એ તે સંખ્યાનું અંકમૂળ છે, જેમ કે 37ને 9 વડે ભાગતાં શેષ 1 મળે છે. માટે 37નું અંકમૂળ 1 છે. 45 ને 9 વડે ભાગતાં મળતી શેષ 0 (શૂન્ય) છે. માટે 45નું અંકમૂળ શૂન્ય છે.

સમશેષતાના સ્વરૂપમાં : આપેલ પૂર્ણાંક a માટે પૂર્ણાંક b એવો મળે કે જેથી $0 \le b \le 8$ અને $a \equiv b \text{ Mod } 9$ તો a નું અંકમૂળ b છે. સ્પષ્ટ છે કે 9ના કોઈપણ ગુણકનું અંકમૂળ 0 છે.

❖ **અંકમૂળ શોધવાની સરળ રીત :**

આપેલી સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો કરો.

1. જો આ સરવાળો 8 કે તેથી ઓછો હોય તો તે સરવાળો આપેલી સંખ્યાનું અંકમૂળ છે.
2. જો આ સરવાળો 9 હોય તો આપેલી સંખ્યાનું અંકમૂળ 0 ગણવું.
3. જો આ સરવાળો 10 કે તેથી વધુ હોય તો તેના અંકોનો સરવાળો કરો, જ્યાં સુધી સરવાળો 9 કે તેથી નાનો પૂર્ણાંક ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો.

   છેલ્લે મળતો પૂર્ણાંક એ (1) અથવા (2) અનુસાર આપેલી સંખ્યાનું અંકમૂળ છે.

ઉદાહરણ તરીકે 1 2 5 7 2 3 9 8 ના અંકોનો સરવાળો 37 એ 10 કે તેથી વધુ છે. 37ના અંકોનો સરવાળો 10; 10 ના અંકોનો સરવાળો 1 છે અને $1 \le 8$ તેથી 1 એ આપેલી સંખ્યાનું અંકમૂળ છે.

❖ **અંકમૂળના સરળ ગુણધર્મો :**

1. જો સંખ્યા a નું અંકમૂળ b હોય તો $a - b$ એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.
2. સંખ્યા a અને b નાં અંકમૂળ અનુક્રમે p અને q હોય તો $(a+b)$ નું અંકમૂળ અને $(p+q)$નું અંકમૂળ સમાન છે.

   દા.ત. $a=32,\ b=57 \quad \therefore \quad a+b=89$

   $a+b$ નું અંકમૂળ : $8+9=17$ અને $1+7=8$

   aનું અંકમૂળ $p=5$, bનું અંકમૂળ $q=3$, $p+q=8 \quad \therefore\ p+q$નું અંકમૂળ 8 છે.
3. સંખ્યા a માં 9 નો કોઈપણ ગુણક ઉમેરવામાં આવે (કે બાદ કરવામાં આવે) તો પરિણામી સંખ્યાનું અંકમૂળ a ના અંકમૂળ જેટલું જ રહે છે.

   કોઈ સંખ્યામાં અંક 9 વારંવાર આવતો હોય તેવી મોટી સંખ્યાઓનાં અંકમૂળ શોધવા માટે ગુણધર્મ 3 ખાસ ઉપયોગી છે. એક ઉદાહરણ લઈ આ વાત સમજીએ.

ધારો કે a = 379249658971 નું અંકમૂળ શોધવું છે. a ના અંકોનો સરવાળો 70 છે. તેથી a નું અંકમૂળ 7 છે. 12 અંકોની સંખ્યા a માં જુદા જુદા ત્રણ સ્થાનો પર 9 આવે છે. આ બધાં જ 9 ને અવગણીએ (અથવા 9ના બદલે 0 લખીએ) તો નવી સંખ્યા : b = 370240658071 મળે. b ના અંકોનો સરવાળો 43 છે અને તેથી b નું અંકમૂળ 7 છે. આમ a અને b નાં અંકમૂળ સમાન છે. નોંધો કે a = 379249658971 માંથી 9009000900 બાદ કરતાં સંખ્યા b મળે છે. બાદ કરેલી સંખ્યા 9 નો ગુણક છે.

4. 9 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાનું અંકમૂળ 0 છે.

હવે આપણે અંકમૂળની સંકલ્પના પર આધારિત ગણિત ગમ્મતો પર આવીએ. આ રમતો માધ્યમિક કક્ષાના (ધોરણ 9-10 માં અભ્યાસ કરતા) વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ રજૂ કરી શકાય. વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ આ ગમ્મતો રજૂ કરતાં પહેલાં અંકમૂળની વ્યાખ્યા, અંકમૂળ મેળવવાની રીત અને ખાસ કરીને અંકમૂળના ગુણધર્મો વિદ્યાર્થીઓને જુદા જુદા ઉદાહરણો લઈને સમજાવવા ખાસ જરૂરી છે.

❖ ગણિત ગમ્મત 1 :

શિક્ષક એક વિદ્યાર્થીને બોલાવીને બોર્ડ પર એક સંખ્યા લખવાનું કહે છે. ત્યારબાદ તે સંખ્યાનું અંકમૂળ શોધીને સંખ્યાની સામે લખવાનું કહે છે. હવે શિક્ષક વિદ્યાર્થીને સૂચના આપે છે કે તે મૂળ સંખ્યામાંથી શૂન્ય સિવાયનો એક અંક છેકી નાખે અને તેમ કરવાથી બનતી નવી સંખ્યાનું અંકમૂળ શોધે.

ઉપરોક્ત સૂચનો આપતી વખતે શિક્ષક બોર્ડ સામે જોતા નથી, શિક્ષકને ખબર નથી કે મૂળ સંખ્યા કઈ હતી અને કયો અંક વિદ્યાર્થીએ છેકી નાખ્યો.

હવે શિક્ષક વિદ્યાર્થીને પૂછે છે, ‘‘મૂળ સંખ્યાનું અંકમૂળ કેટલું છે ?’’ વિદ્યાર્થી જવાબ આપે છે. શિક્ષક બીજો પ્રશ્ન પૂછે છે, ‘‘એક અંક છેકી નાખ્યા પછી રચાતી સંખ્યાનું અંકમૂળ કેટલું છે?’’ વિદ્યાર્થી જવાબ આપે છે.

ઉપરોક્ત બન્ને પ્રશ્નોના જવાબ મળતાં માત્ર પાંચ સેકંડમાં જ વિદ્યાર્થીએ છેકી નાખેલો અંક શિક્ષક કહી આપે છે. વર્ગના બધાં જ વિદ્યાર્થીઓ ખૂશ થઈ તાળીઓ પાડે છે.

શિક્ષકને છેકેલો અંક કેવી રીતે મળ્યો?

બે ઉદાહરણો દ્વારા રમત સમજીએ.

(1) વિદ્યાર્થીએ લખેલી સંખ્યા, x=357089 લઈએ. ઉપર લખેલી સંખ્યા x નું અંકમૂળ, a=5

વિદ્યાર્થીએ એક અંક, ધારો કે 3 છેકી નાખ્યા પછીની સંખ્યા, y=□57089

(અહીં છેકી નાખેલા અંકના સ્થાનમાં આપણે □ સંકેત મૂક્યો છે.)

સંખ્યા yનું અંકમૂળ, b=2

શિક્ષકે આપેલો જવાબ : 3

(જો $a>b$ તો છેકેલો અંક $a–b$ = 5–2=3)

જો $a<b$ હોય તો? ઉદાહરણ 2 જૂઓ.

(2) ધારો કે x=357089 (આ સંખ્યા ઉદાહરણ (1) માં પણ લીધી હતી.)

x નું અંકમૂળ, a=5

વિદ્યાર્થીએ એક અંક છેકી નાખ્યા પછીની સંખ્યા, y=3570□9 (વિદ્યાર્થીએ 8 છેકી નાખ્યા છે)

yનું અંકમૂળ, b=6

શિક્ષકે આપેલો જવાબ : 8

(જો $a<b$ તો છેકેલો અંક $a-b+9$ = 5–6+9=8)

હવે $a=b$ હોય તો?

જો $a=b$ હોય તો બે ઉત્તર મળે, 0 અથવા 9. પણ શિક્ષકે આપેલી સૂચના મુજબ 0 સિવાયનો અંક જ દૂર કરવાનો (છેકવાનો) છે. અને આપણે જાણીએ છીએ કે આપેલી સંખ્યામાંથી 9 (કે તેના કોઈપણ ગુણક) બાદ કરવાથી સંખ્યાનું અંકમૂળ બદલાતું નથી. તેથી $a=b$ હોય તો વિદ્યાર્થીએ છેકેલો અંક 9 હોવો જોઈએ.

❖ **ગણિત ગમ્મત 2:**

(1) શિક્ષક વિદ્યાર્થી પાસે બોર્ડ પર એક સંખ્યા x લખાવે છે.

(2) શિક્ષક વિદ્યાર્થીને સંખ્યા x ના અંકોનો સરવાળો કરવાનું કહે છે. (ધારો કે આ સરવાળો y છે)

(3) શિક્ષક વિદ્યાર્થીને મૂળ સંખ્યામાંથી તેના અંકોનો સરવાળો બાદ કરવાનું કહે છે. વિદ્યાર્થી $x-y$ મેળવે છે.

ઉપરોક્ત સૂચનાઓ આપતી વખતે શિક્ષક બોર્ડ પર જોતા નથી. તેથી વિદ્યાર્થીએ કઈ સંખ્યા લખી, તે સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો કેટલો મળ્યો અને મૂળ સંખ્યા અને તેના અંકોના સરવાળાનો તફાવત કેટલો છે તે શિક્ષક જાણતા નથી.

હવે શિક્ષક વિદ્યાર્થીને સૂચના આપે છે, ‘‘તને મળેલા છેલ્લા પરિણામ $x-y$ માંથી કોઈ એક અંક છેકી નાખ અને બાકી રહેલી સંખ્યાનું અંકમૂળ કેટલું છે તે મને જણાવ, પણ યાદ રાખ, તેં છેકેલો અંક 0 અને 9 સિવાયનો હોવો જોઈએ.’’

વિદ્યાર્થી સૂચના પ્રમાણે અંકમૂળ મેળવે છે અને તે અંકમૂળ શિક્ષકને જણાવે છે.

શિક્ષક પાંચ સેકંડમાં વિદ્યાર્થીએ છેકી નાખેલો અંક કહી આપે છે. એક ઉદાહરણ લઈ રમત સમજીએ.

વિદ્યાર્થીએ લખેલી સંખ્યા : x=375426

x ના અંકોનો સરવાળો : y = 27

x અને y નો તફાવત : $x-y$ = 375399

ધારો કે વિદ્યાર્થી 7 છેકી નાખે છે. બાકી રહેલા અંકોથી મળતી સંખ્યા 3□5399 નું અંકમૂળ 2 છે, જે શિક્ષકને જણાવે છે. શિક્ષક તરત જ ઉત્તર આપે છે : ‘‘તેં 7 છેકી નાખ્યા છે.’’

કારણ : $x-y$ નું અંકમૂળ a=0 છે. સંખ્યા $(x-y)$ માંથી એક અંક છેકી નાખ્યા પછી રચાતી સંખ્યાનું અંકમૂળ b=2

$\therefore$ $a<b$ તેથી છેકી નાખેલ અંક : $a-b+9 = 0-2+9 = 7$

નોંધ : કોઈપણ સંખ્યામાંથી તેના અંકોનો સરવાળો બાદ કરતાં મળતી સંખ્યા 9 વડે વિભાજ્ય હોય અને તેથી તેનું અંકમૂળ 0 હોય.

❖ **ગણિત ગમ્મત 3 :**

શિક્ષક બોર્ડ ઉપર એક કોષ્ટક દોરે છે. કોષ્ટકના પહેલા સ્તંભમાં સંખ્યાનો ક્રમ છે, બીજા સ્તંભમાં વિદ્યાર્થીઓએ સંખ્યા લખવાની છે. ત્રીજા સ્તંભમાં જે તે સંખ્યાઓનાં અંકમૂળ લખવાનાં છે. શિક્ષક તમામ વિદ્યાર્થીઓને પોતે બનાવેલું કોષ્ટક તેમની નોટબુકમાં દોરવાનું કહે છે. બધા વિદ્યાર્થીઓ કોષ્ટક દોરી લે પછી શિક્ષક એક વિદ્યાર્થીને બોલાવી બોર્ડ પર દોરેલા કોષ્ટકમાં ત્રણ સંખ્યાઓ લખવાનું કહે છે, દરેક સંખ્યાનું અંકમૂળ લખવાનું કહે છે, સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવાનું કહે છે અને અંકમૂળોનો પણ સરવાળો કરવાનું કહે છે. આ દરમિયાન શિક્ષકની નજર વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ તરફ છે, બોર્ડ પર નથી. વિદ્યાર્થી શિક્ષકની સૂચના મુજબ કોષ્ટક પૂરું કરે છે.

હવે તમામ વિદ્યાર્થીઓને શિક્ષક પૂછે છે, ‘‘તમે બધાં ચકાસો કે તેણે લખેલો સંખ્યાઓનો સરવાળો, દરેક સંખ્યાનાં અંકમૂળ અને અંકમૂળોનો સરવાળો સાચો છે કે નહીં.’’

કોષ્ટક-1

સંખ્યાનો ક્રમ	**વિદ્યાર્થીએ લખેલી સંખ્યા**	**સંખ્યાના અંકમૂળ**
(1)	327	3
(2)	6430	4
(3)	25	7
સરવાળા	6782	14

વિદ્યાર્થીઓ તરફથી મળેલા ઉત્તરો પરથી શિક્ષક વિદ્યાર્થીએ કરેલા કાર્યની ખરાઈની ચકાસણી કરે છે.

શિક્ષક દરેક વિદ્યાર્થીને પોતાની નોટબુકમાં બનાવેલ કોષ્ટકમાં પોતાની ત્રણ સંખ્યાઓ લખી, ગણતરીઓ કરી, કોષ્ટક પૂરું કરવાનું કહે છે અને સૂચના આપે છે કે બધા જ વિદ્યાર્થીઓ સંખ્યાના અંકમૂળ, સંખ્યાનો સરવાળો અને અંકમૂળનો સરવાળો ફરી ચકાસી જાય.

બધા જ વિદ્યાર્થીઓ શિક્ષકની સૂચના પ્રમાણે પોતપોતાની ગણતરીઓ ચકાસવા માંડે છે.

થોડીક વાર પછી શિક્ષક વિદ્યાર્થીઓને કહે છે.

‘‘ધ્યાનથી સાંભળો, તમે કઈ સંખ્યાઓ લખી છે, તે સંખ્યાઓનો સરવાળો કેટલો છે, દરેક સંખ્યાનાં અંકમૂળ કે અંકમૂળનો સરવાળો – આમાનું કાંઈ મને ખબર નથી’’,

‘‘હવે તમારે બધાંએ બે કામ કરવાનાં છે. તમે લખેલી સંખ્યાઓના સરવાળામાંથી એક અંક છેકી નાખવાનો છે, પણ છેકેલો અંક 0 અને 9 ન હોવો જોઈએ. અંક છેકી નાખ્યા પછી જે સંખ્યા મળે તે સંખ્યાનું અંકમૂળ તમારે મને કહેવાનું છે. (2) સાથે તમે બધાએ અંકમૂળોનો સરવાળો મેળવ્યો છે તે મને જણાવવાનો છે.’’

‘‘બસ, આ બે વિગત મળશે એટલે તરત જ હું તમને છેકી નાખેલો આંકડો કહી આપીશ.’’

આમતો શિક્ષકે અંકમૂળોના સરવાળાનું અંકમૂળ માંગવું જોઈએ પણ શિક્ષક જાણે છે કે ત્રણ સંખ્યાના અંકમૂળોનો સરવાળો 24 થી વધુ ન હોય અને તેથી તેના અંકમૂળની મૌખિક ગણતરી કરવી અઘરી નથી.

‘‘બધાં સમજી ગયાં ?’’ બધાં વિદ્યાર્થીઓ બોલી ઉઠ્યા, ‘‘યસ, સર.’’

બોર્ડ પાસે ઉભેલા વિદ્યાર્થીને સંબોધીને શિક્ષક પૂછે છે, ‘‘તું સમજી ગયો ?’’

વિદ્યાર્થી માથું હલાવીને જવાબ આપે છે ‘‘હા, સર’’

શિક્ષક પોતાના ખિસ્સામાં રહેલો એક કોરો કાગળ અને પેન કાઢે છે. હવે વિદ્યાર્થીને પૂછે છે,

"બોલ, તારા અંકમૂળોનો સરવાળો કેટલો છે?"

વિદ્યાર્થી જવાબ આપે છે, "સર, 14". શિક્ષક પોતાના કાગળમાં લખે છે 5. "હવે તેં લખેલા સંખ્યાઓના સરવાળામાંથી એક અંક છેકી નાખ અને બાકીના અંકોનો સરવાળો કરી તેનું અંકમૂળ મને જણાવ."

થોડીક વાર પછી વિદ્યાર્થી જવાબ આપે છે, "સર, 3".

શિક્ષક કહે છે "તેં છેકી નાખેલો અંક 2 છે." વિદ્યાર્થી કહે છે, "હા, સર."

આ રીતે જુદા જુદા ચાર વિદ્યાર્થીઓ સાથે શિક્ષક આ રમત રમે છે. દરેક વખતે શિક્ષક વિદ્યાર્થીઓને તેમનો છેકી નાખેલો અંક કહી આપે છે.

પણ પાંચમાં વિદ્યાર્થીએ કહ્યું, "સર, તમે કહ્યું કે મેં 4 છેકી નાખ્યા છે પણ મેં તો 6 છેકી નાખ્યા હતા. આવું કેમ થયું ?"

શિક્ષક કહે, "ચાલો, ક્યાં ભૂલ થઈ શોધી કાઢીએ. તારી સખ્યાઓનો સરવાળો બોલ."

વિદ્યાર્થી સરવાળો કહે છે.

"હવે, આ સરવાળાનું અંકમૂળ બોલ"

વિદ્યાર્થી થોડો સમય લઈ આ અંકમૂળ પણ બોલે છે.

"હવે અંકમૂળોનો સરવાળો તો તેં કર્યો જ છે. તે સરવાળાનું અંકમૂળ બોલ." વિદ્યાર્થી તે પ્રશ્નનો પણ ઉત્તર આપે છે.

હવે શિક્ષક કહે છે, "જો, આ બન્ને અંકમૂળ સમાન થવા જોઈએ પણ તેં કહેલાં અંકમૂળ સમાન નથી. તેમના વચ્ચે 2 નો તફાવત છે અને તેથી તેં કાં તો સંખ્યાઓનો સરવાળો ખોટો કર્યો હોય અથવા સંખ્યાઓના અંકમૂળ શોધવામાં ભૂલ કરી હોય અથવા અંકમૂળોનો સરવાળો ખોટો કર્યો હોય. તું જાતે શોધી કાઢ કે ક્યાં ભૂલ થઈ છે."

સમગ્ર વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને સંબોધતા તેઓ બોલ્યા, "હવે તમારે એ શોધી કાઢવાનું છે કે તમે આપેલી વિગત પરથી તમે છેકેલો અંક હું કેવી રીતે જણાવું છું." આવતી કાલે આવી જ કોઈ બીજી રમત આપણે શીખીશું.

શિક્ષક વર્ગ છોડી જવા લાગ્યાં. ત્યાં વર્ગનો એક સૌથી તેજસ્વી વિદ્યાર્થી બોલ્યો, "સર, સર, મારે એક વાત પૂછવી છે." શિક્ષક, "બોલ."

સર મારી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો જ એક અંકનો છે. હું તેને છેકી નાખું તો કાંઈ વધે નહીં. હવે શું કરવું?"

શિક્ષકે હસીને સામો પ્રશ્ન પૂછ્યો, 'તારા અંકમૂળોનો સરવાળો કેટલો છે?'

વિદ્યાર્થી કહે, "8". શિક્ષક કહે, "તારી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો પણ 8 છે, સાચું ને ?" વિદ્યાર્થી કહે, "યસ, સર." શિક્ષક : બસ, એ 8 જ તારો છેકી નાખેલો અંક છે.

શિક્ષકે મેળવેલા અંકની સમજૂતી

(1) અંકમૂળોના સરવાળાનું અંકમૂળ : a

(2) સંખ્યાઓના સરવાળામાંથી એક અંક છેકી નાખ્યા પછીના અંકોના સરવાળાનું મૂલ્ય : b

જો $a>b$ તો શિક્ષકનો જવાબ : $a-b$.

જો $a<b$ તો શિક્ષકનો જવાબ : $a-b+9$.

$a=b$ શક્ય જ નથી કારણ કે 0 અને 9 છેકી નાખવાની મનાઇ છે.

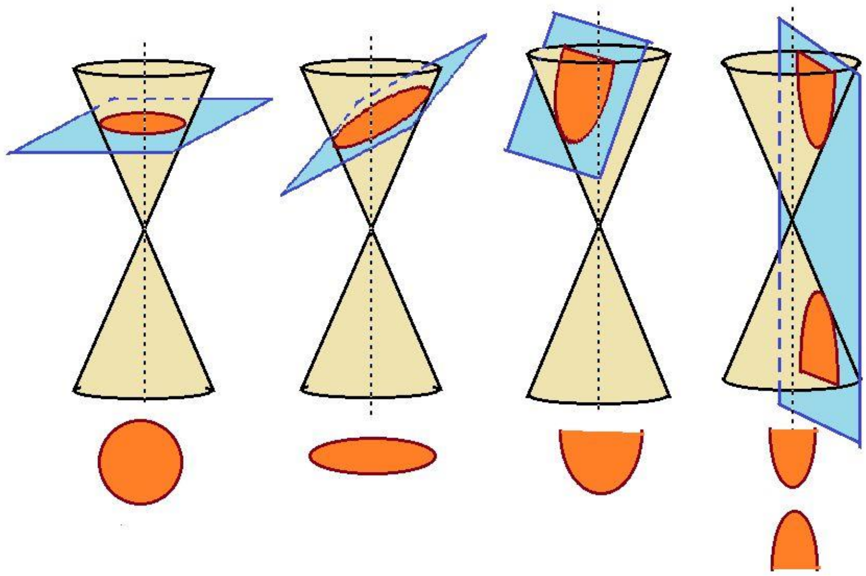
ક્રમશઃ

ભૂમિતિના વક્રો આમતો શું કામના?

અન્સાર પરવેઝમહેદી એ.,
ભૌતિક વિજ્ઞાન શિક્ષક, મોડેલ સ્કૂલ, માનવડ
E-mail : parvezmahedi@gmail.com

લેખના શીર્ષકમાં પૂછેલા પ્રશ્નનો જવાબ મેળવવા માટે આપણે શાકંવો વિશે વિચાર કરીએ. શાંકવ એટલે લંબવૃત્તીય દ્વિશકું (right circular double cone) નો સમતલ સાથેના છેદ તરીકે મળતો ભૌમિતિક વક્ર. આપણે વિવિધ પ્રકારના શાંકવોની ચર્ચા કરીશું. રોજબરોજના જીવનમાં અને વિજ્ઞાનમાં આ વક્રોની ઉપયોગિતાની પણ વાત કરીશું.

શાંકવો એ સમતલ દ્વારા જ્યારે દ્વિશંકુના જુદી જુદી રીતે છેદ લેવામાં આવે ત્યારે મળતા વક્રો છે.

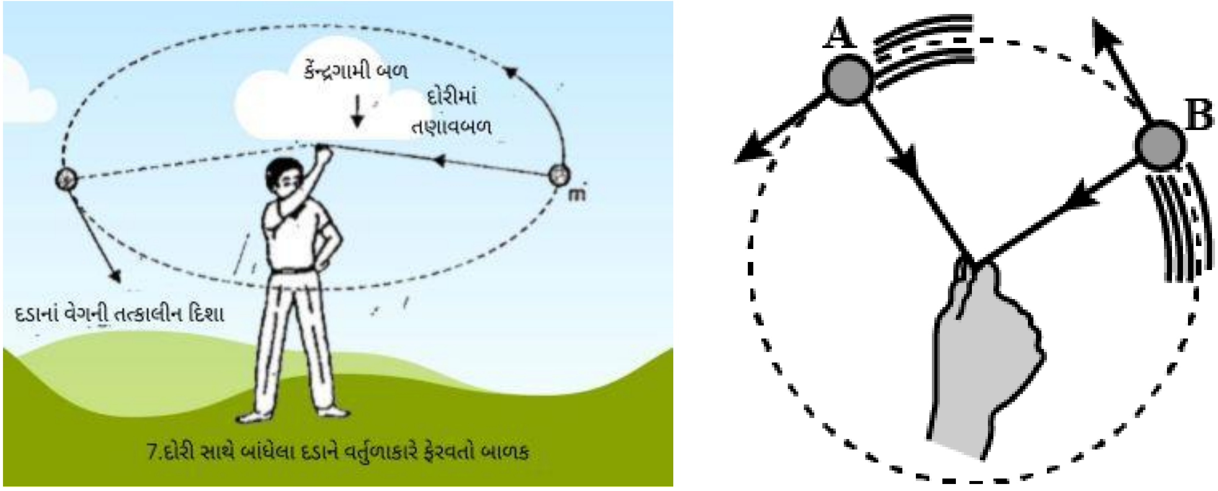


આકૃતિ-1 (a) વર્તુળ (b) ઉપવલય (c) પરવલય (d) અતિવલય

આમાં સૌ પ્રથમ આવે વર્તુળ. આમ તો વર્તુળ એટલે સમતલમાંના કોઈ એક નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં એ જ સમતલમાંનાં બિંદુઓથી રચાતો બંધ વક્ર. શંકુની ધરીને લંબ હોય એવા સમતલથી જ્યારે શંકુનો છેદ લેવામાં આવે ત્યારે વર્તુળ મળે છે. (આકૃતિ-1(a)) આથી વર્તુળ શાંકવ છે.

વર્તુળાકાર પદાર્થોનાં ઘણાં ઉદાહરણો આપણને જોવા મળે છે. બંગડી અને સાયકલના પૈડાનું ટાયર વર્તુળાકાર છે. રોટલી, ચાંદલો, સૂર્ય અને ચંદ્ર એ બધાની કોર વર્તુળાકાર છે. એક પથ્થરને દોરીને છેડે બાંધીને ગોળ ગોળ ઘૂમાવવાની રમતો આપણે સૌએ માણેલ છે. દોરીને બરાબર મજબૂત રીતે પકડીને પથ્થરને ઘૂમાવીએ તો તેનો ગતિપથ વર્તુળાકાર છે. આ સાદા ઉદાહરણમાં વર્તુળાકાર ગતિનું સામાન્ય ભૌતિક વિજ્ઞાન પણ શીખવા મળે છે. (આકૃતિ-2(a) અને 2(b))

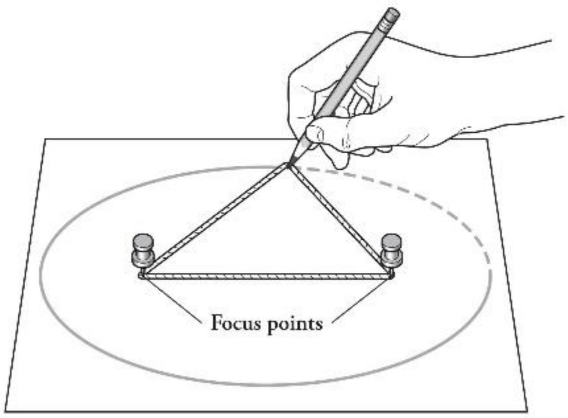
આકૃતિ-2(a)



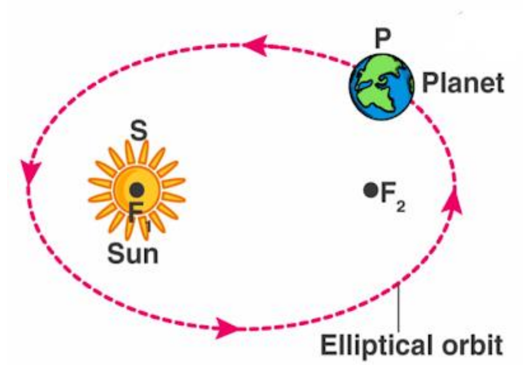
આકૃતિ-2(b) દોરી સાથે બાંધેલા દડાને ફેરવતો બાળક અને તેનો વર્તુળાકાર ગતિપથ

હવે વાત કરીએ ઉપવલયની. જ્યારે શંકુને કોઈ સમતલ વડે તેની ધરીની સાપેક્ષ ત્રાંસું છેદવામાં આવે (એટલે કે શંકુને તેની ધરી સાથે લઘુકોણ બનાવતા કોઈ સમતલ વડે છેદવામાં આવે) તો જે વક્ર મળે છે તેને ઉપવલય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. પાણી ભરેલા ગ્લાસને ત્રાંસો કરતાં પ્રવાહીની ઉપરની સપાટી ઉપવલય આકાર ધારણ કરે છે.

તમે સરળતાથી એક કાગળ ઉપર ઉપવલય દોરી શકો (આકૃતિ-3(a)). એક દોરી લો. હવે તે દોરીની લંબાઈ કરતાં ઓછા અંતરે રહેલાં બે બિંદુઓ પર દોરીના છેડા બાંધી દો. હવે એક પેન્સિલની અણીને દોરી સાથે રાખી દોરી ખેંચાયેલી રહે તે રીતે ફેરવતાં મળતો વક્ર ઉપવલય હશે. દોરીના છેડા જે બે બિંદુઓ પર છે, તે ઉપવલયનાં બે નાભિ થશે.



આકૃતિ-3(a) ઉપવલય દોરવાની રીત



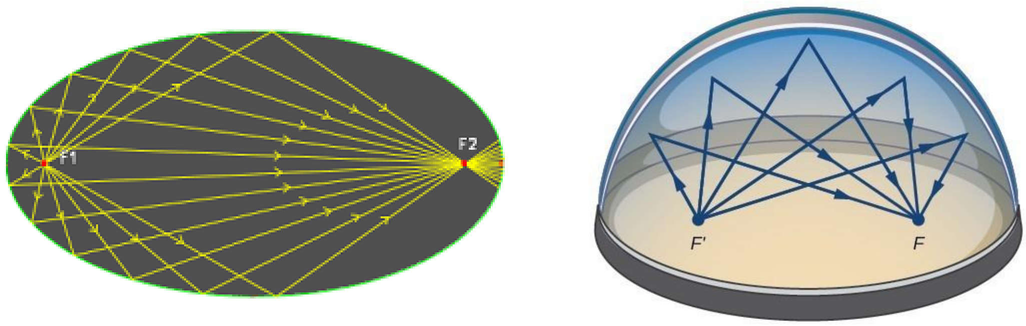
આકૃતિ-3(b) સૂર્યની ફરતે પૃથ્વીની દીર્ઘવૃત્તીય કક્ષા

પ્રાચીન ગ્રીક ખગોળશાસ્ત્રીઓની માન્યતા હતી કે પૃથ્વી સ્થિર છે અને તે બ્રહ્માંડનું કેન્દ્ર છે. 15 મી સદીમાં પોલેંડના ખગોળશાસ્ત્રી નિકોલસ કોપરનિકસે પ્રતિપાદિત કર્યું કે પૃથ્વી અને અન્ય ગ્રહો સૂર્યની આસપાસ વર્તુળાકાર ભ્રમણ કક્ષામાં ફરે છે. 17મી સદીમાં જર્મન ખગોળશાસ્ત્રી જોહાન્ન કેપ્લરે ગણતરીઓને આધારે એવું તારવ્યું કે સૂર્ય આસપાસની ગ્રહોની ભ્રમણ કક્ષા વર્તુળાકાર નહીં, પરંતુ ઉપવલીય છે અને સૂર્ય ઉપવલયના એક નાભિ પર છે. (આકૃતિ-3(b))

ઉપવલયનાં ઉદાહરણોની વાત કરીએ તો તડબૂચ, દૂધી કે કાકડીને ત્રાંસી કાપવાથી મળતા છેદનો આકાર ઉપવલીય હોય છે. ટેનિસની રમતમાં વપરાતા રેકેટનો જાળી વાળો ભાગ ઉપવલીય હોય છે અને બેડમિન્ટનના રેકેટના હેન્ડલની ઉપરનો ભાગ ઉપવલીય આકારનો હોય છે. (આકૃતિ-3(c))

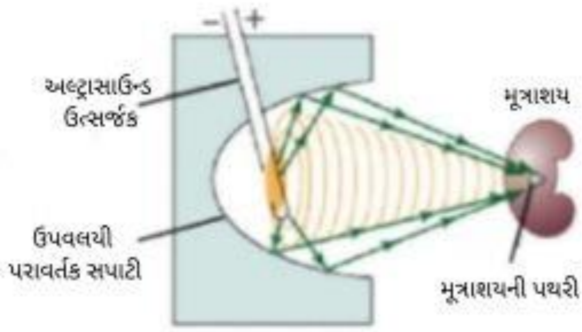
આકૃતિ-3(c) ઉપવલયનાં ઉદાહરણો

વર્તુળથી વિપરીત ઉપવલયમાં બે કેન્દ્રો હોય છે જેને ઉપવલયનાં નાભિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. હવે જો ઉપવલીય અરીસાનું એક નાભિ પ્રકાશ કે ધ્વનિ કે કોઈપણ તરંગનું ઉદ્ગમ સ્થાન હોય તો તેમાંથી નીકળતાં કિરણો અરીસા વડે પરાવર્તિત થઈ ઉપવલયના બીજા નાભિમાં કેન્દ્રિત થાય છે. આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને આપણા પ્રાચીન સ્થાપત્યકારોએ વિશેષ પ્રકારના ધ્વનિ કક્ષ તૈયાર કર્યા છે, જે કર્ણાટકના બીજાપુર અને હૈદરાબાદના ગોલકોંડા ખાતે આવેલ છે. ટેલિસ્કોપના નિર્માણમાં પણ ઉપવલયના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ થાય છે. (આકૃતિ-3(d))



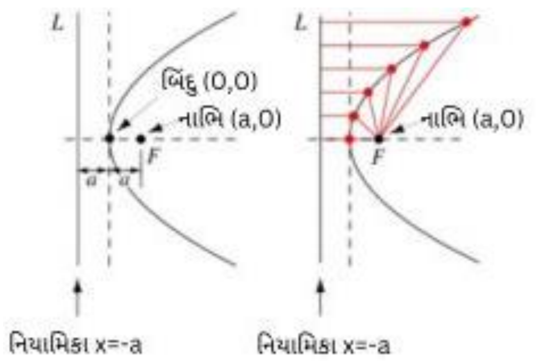
આકૃતિ-3(d) ઉપવલયના વિશિષ્ટ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ બાંધકામ ક્ષેત્રે

તબીબી શાસ્ત્રમાં મૂત્રપિંડની પથરી તોડવા માટે લીથોટ્રીપ્ટર મશીનનો ઉપયોગ થાય છે. લીથોટ્રીપ્ટરને ઉપવલયના એક નાભિ પાસે મૂકવામાં આવે છે. મશીનમાંથી નીકળતા ઉચ્ચ આવૃત્તિવાળા અલ્ટ્રાસાઉન્ડ તરંગો ઉપવલીય સપાટી પરથી પરાવર્તન પામી બીજા નાભિ પર કેન્દ્રિત થાય છે અને એ નાભિ પર રહેલા મૂત્રપિંડની પથરીને તોડી પાડે છે. (આકૃતિ-3(e))



આકૃતિ-3(e) લીથોટ્રીપ્ટરની કાર્યપ્રણાલી

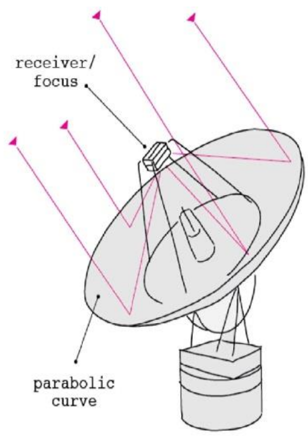
હવે વાત કરીએ બીજા એક મજાના વક્રની જેને પરવલય (Parabola) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જ્યારે શંકુને તેની કોઈ જનક રેખા (generator) ને સમાંતર સમતલથી છેદવામાં આવે ત્યારે જે વક્ર મળે છે તે પરવલય છે. (જનક રેખાનો સામાન્ય ખ્યાલ આપવો હોય તો એમ કહી શકાય કે શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતી જે રેખાનું પ્રત્યેક બિંદુ શંકુની વક્ર સપાટી ઉપર હોય તે રેખા શંકુની જનક રેખા છે.)



સમતલમાં પરવલયની આકૃતિ નીચેની રીતે પણ મળી શકે છે : સમતલમાં એક રેખા અને રેખા પર ન હોય તેવું એક બિંદુ લો. આ રેખા અને આ બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં તમામ બિંદુઓને જોડતો વક્ર પરવલય છે. (આકૃતિ-4(a))

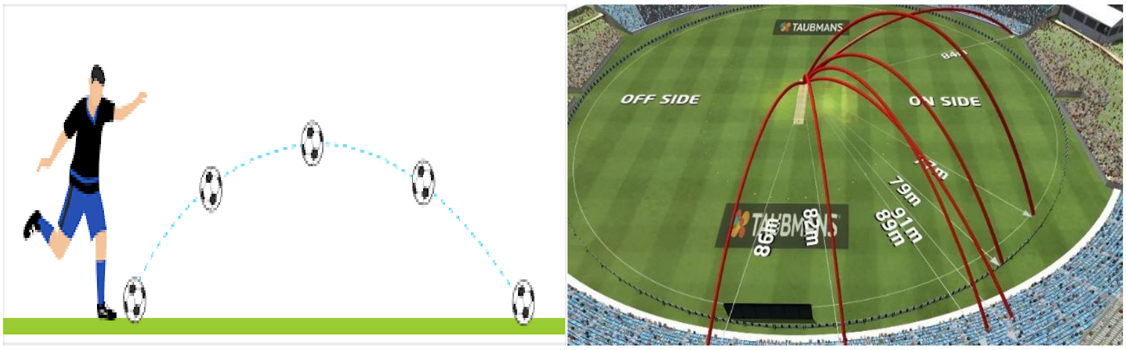
આકૃતિ-4 (a) પરવલય

પરવલયનો વ્યવહારુ ઉપયોગ પ્રકાશશાસ્ત્રમાં અરીસાઓ તૈયાર કરવા માટે થાય છે. જો પ્રકાશનો સ્રોત પરવલયાકાર અરીસાના નાભિ પાસે હોય તો પ્રકાશ પરિવર્તન પામી અરીસાના અક્ષને સમાંતર ગતિ કરે છે. આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ મોટરગાડીની હેડલાઈટમાં થાય છે. મોટરગાડીની હેડલાઈટના અરીસા, તેમજ બંદર પરની દીવાદાંડીના અરીસાનો આકાર પરવલયના પરિભ્રમણથી રચાતી સપાટી જેવો હોય છે. પરવલયના નાભિ પર પ્રકાશનું ઉદ્ભવ સ્થાન રાખવામાં આવે છે. જેથી આ ઉદ્ભવસ્થાનમાંથી કોઈપણ દિશામાં નીકળતાં પ્રકાશનાં કિરણો અરીસા પર પડ્યા પછી અક્ષને સમાંતર દિશામાં પરાવર્તન પામે છે, અને લાંબા અંતર સુધી જઈ શકે છે. આવી જ રીતે પરવલયાકાર અરીસાના અક્ષને સમાંતર આયાત થતાં પ્રકાશનાં કિરણો પરાવર્તન પામી નાભિ પર કેન્દ્રિત થાય છે. આનો ઉપયોગ ટેલિવિઝન તેમજ રેડિયો ટેલિસ્કોપની ડીશમાં દૂરથી આવતા સિગ્નલ ઝીલવા માટે થાય છે. (આકૃતિ-4(b))

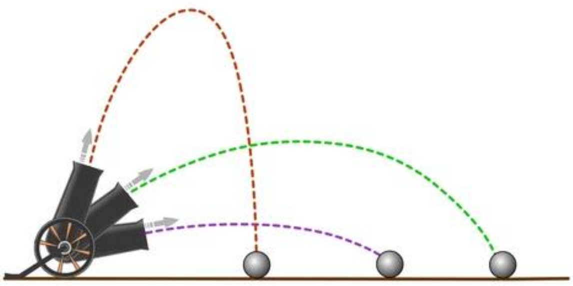


આકૃતિ-4 (b) વાહનની પરવલયાકાર હેડલાઈટ અને પરવલયાકાર ડીશ એન્ટેના

ભાલાફેંકની રમતમાં ભારતનો ચેમ્પિયન ખેલાડી નીરજ ચોપડા જ્યારે ભાલો ફેંકે છે ત્યારે અને ફૂટબોલમાં રોનાલ્ડો જ્યારે દડાને દૂર સુધી મોકલવા માટે કિક મારે છે ત્યારે ભાલા અને ફૂટબોલનો ગતિપથ પરવલય આકાર હોય છે. હકીકતમાં પદાર્થની ગુરુત્વાકર્ષણ બળની અસર હેઠળ ઊર્ધ્વ સમતલમાં થતી દરેક દ્વિપરિમાણીય ગતિમાં પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે. આને કારણે તોપમાંથી છૂટેલા ગોળાના અને જોરથી ફટકારાયેલા, હવામાં અધ્ધર ગયેલા, ક્રિકેટના દડાના ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે. વિરાટ કોહલીના વિરાટ ફટકાનું રોમાંચક દૃશ્ય જુઓ ત્યારે દડાના પરવલયાકાર ગતિપથને નીરખવાનું પણ ન ચૂકશો. (આકૃતિ-4(c))



આકૃતિ-4 (c) ફુટબોલના દડા અને ક્રિકેટના દડાનો પરવલયાકાર ગતિપથ

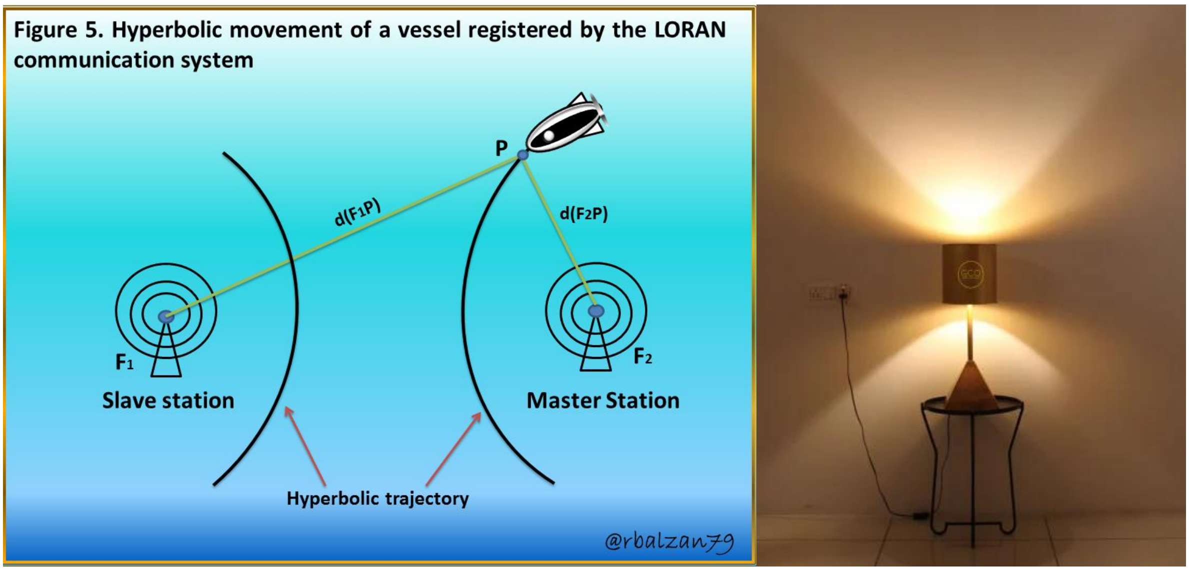


કોઈ પદાર્થને નિશ્ચિત વેગથી નિશ્ચિત ખૂણે ફેંકવામાં આવે તો તેનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે. પદાર્થને આપેલા વેગથી કેટલા ખૂણે ફેંકવામાં આવે તો તે જ્યારે જમીન પર પાછો આવે ત્યારે તેનું પ્રારંભના સ્થળથી જમીન પરનું અંતર મહત્તમ હોય એ પ્રશ્નો જવાબ ગણિતથી મળે છે. (આકૃતિ-4(d))

આકૃતિ-4 (d) તોપ માંથી નિકળેલા ગોળાનો પરવલયાકાર ગતિપથ

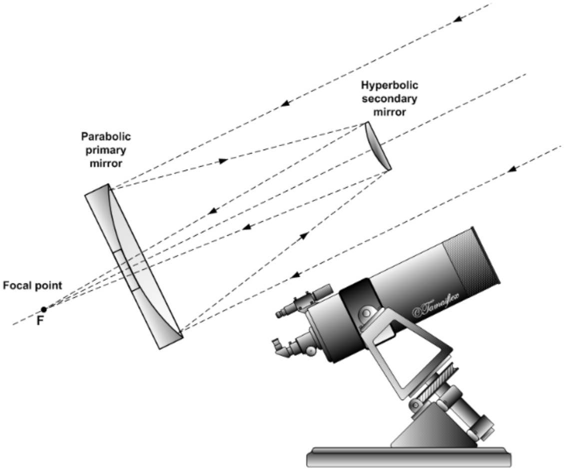
છેલ્લે વાત કરીએ અતિવલયની. દ્વિશંકુના બંને ભાગને છેદતી સમતલથી મળતા છેદતા અતિવલય કહેવાય છે.

સામાન્ય અંતર્ગોળ લેન્સ ગોળાકાર હોય છે પરંતુ તેમાં વર્ણ વિપથનની ક્ષતિ (જુદી જુદી તરંગ લંબાઈ ધરાવતા પ્રકાશનું જુદાં જુદાં પ્રમાણમાં વક્રીભવન થવું) ને નિવારવા માટે ક્યારેક અંતર્ગોળ લેન્સનો આકાર અતિવલયાકાર હોય છે. મોટા ન્યુક્લિયર રિએક્ટરની વિશાળ ચીમનીનો આકાર પણ અતિવલયાકાર હોય છે. જહાજોમાં વપરાતી LORAN (Long Range Navigation System) તરીકે ઓળખાતી નેવિગેશન સિસ્ટમમાં અતિવલયનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ઉપરની અને નીચેની બંને બાજુએથી ખુલ્લા શેઈડવાળા નાઈટ લેમ્પમાંથી નીકળતો પ્રકાશ દીવાલ પર અતિવલય આકાર રચે છે. (આકૃતિ-5(a))



આકૃતિ-5 (a) અતિવલયનાં ઉદાહરણો, LORAN અને નાઈટલેમ્પનાં પ્રકાશ વડે રચાતો અતિવલય

કેસેગ્રેઈન (cassegrain) ટેલિસ્કોપમાં પ્રકાશનાં કિરણો પરવલયાકાર અરીસા પર અથડાઈને તેના નાભિ તરફ જતાં હોય છે. વચ્ચે એક અતિવલયાકાર અરીસો મૂકવામાં આવે છે આ અતિવલયી અરીસાનું એક નાભિ પરવલાયાકાર અરીસાના નાભિ સાથે સંપાતી હોય છે. પરવલયથી અરીસા પરથી પરાવર્તિત થયેલાં કિરણો અતિવલયી અરીસા પર આપાત થાય છે. આ કિરણો પરાવર્તન પામી અતિવલય અરીસાના બીજા નાભિ પર જાય છે. અવલોકનકાર અહીં પ્રતિબિંબ જોઈ શકે છે. પરવલયનું નાભિ અરીસાથી દૂર હોય છે. આ ગોઠવણથી અરીસાનું કદ ઘટાડી શકાય છે. મોટા સેટેલાઈટની ડીશમાં પણ આ ટેકનિકનો ઉપયોગ થાય છે. (આકૃતિ-5(b))



આકૃતિ-5 (b) કેસેગ્રેઈન ટેલિસ્કોપની રેખાકૃતિ

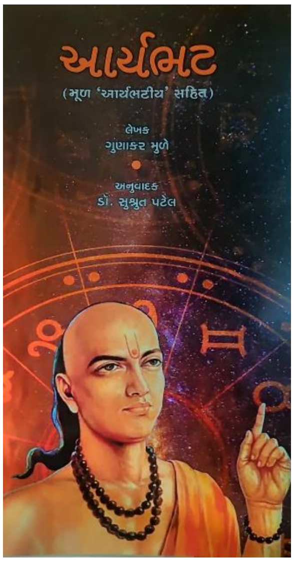
આ ઉપરાંત ભૌતિકવિજ્ઞાન, ખગોળશાસ્ત્ર, એન્જિનીયરિંગ વગેરે જેવી શાખાઓમાં અનેક જગ્યાએ શાંકવોના સંદર્ભ જોવા મળે છે. શાંકવો ઉપરાંત બીજા પણ ઘણા ભૌમિતિક વક્રો આપણા રોજિંદા જીવનમાં અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. ભૌમિતિક વક્રો અથવા તો ભૂમિતિ શું કામમાં આવે છે તેનો ખ્યાલ આપને હવે આવી જ ગયો હશે. મહાન વૈજ્ઞાનિક આઈન્સ્ટાઈનના શબ્દો ભૂમિતિની ઉપયોગિતા વધુ સ્પષ્ટ કરે છે. આઈન્સ્ટાઈન કહે છે, ‘‘આ વિશ્વના ગુણધર્મોને માત્ર ભૂમિતિ દ્વારા જ જાણી શકાય છે. સંક્ષેપમાં આ સંપૂર્ણ વિશ્વ ભૂમિતિમય છે. આ વિશ્વની રચના, ગતિ અને સ્થિતિનું અધ્યયન કેવળ ભૂમિતિ ગણિતથી જ સંભવિત છે.’’

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

પુસ્તકાવલોકન

આર્ય ભટ

પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784, vyaspk123@gmail.com



પુસ્તકનું નામ : આર્યભટ (મૂળ આર્યભટીય સહિત)

મૂળ લેખક : ગુણાકાર મુળે

અનુવાદક : ડૉ. સુશ્રુત પટેલ

કુલ પાનાં : 206 + 18 = 224

પ્રકાશક : ગુજરાત વિશ્વકોશ ટ્રસ્ટ, ઉસ્માનપુરા, અમદાવાદ-380013

કિંમત : રૂા.300/-

મુખ્ય વિક્રેતા : ગુર્જર સાહિત્ય ભવન, રતનપોળ નાકા સામે, ગાંધી માર્ગ, અમદાવાદ-380001

હિંદી ભાષામાં લખાયેલ મૂળ પુસ્તકના લેખક શ્રી ગુણાકાર મુળે અને ગુજરાતી અનુવાદક ડૉ. સુશ્રુત પટેલથી ગુજરાતી ભાષી ઘણા ગણિત રસિકો પરિચિત હશે જ. શ્રી ગુણાકાર મુળે એક સિદ્ધકલમ લેખક હતા. ગણિતના અનુસ્નાતક હતા. તેમણે આશરે 35 પુસ્તકો લખ્યાં છે, ઉપરાંત જુદાં જુદાં સામયિકોમાં 3000 થી વધુ લેખો લખ્યા છે. તેમનાં બે પુસ્તકો પૈકી એક, 'સંસાર કે મહાન ગણિતજ્ઞ'નું ગુજરાતી રૂપાંતરણ, 'વિશ્વ પ્રસિદ્ધ ગણિત પ્રતિભાઓ', આજથી વીશેક વર્ષ પહેલાં થયું હતું. તેના અનુવાદક શ્રી મોહનભાઈ વિરોજાથી પણ સુગણિતમ્‌ના જૂના વાચકો પરિચિત છે જ. 1980 અને 90ના દાયકામાં તેમના લેખો સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થયેલા છે. આ પુસ્તક નવભારત પ્રકાશન, અમદાવાદ દ્વારા પ્રકાશિત થયું છે.

શ્રી ગુણાકાર મુળેનું ગુજરાતીમાં રૂપાંતરિત બીજું પુસ્તક 'આર્યભટ્ટ' તાજેતરમાં (જૂન 2025) પ્રગટ થયું છે. આ પુસ્તકના અનુવાદક છે ડૉ. સુશ્રુત પટેલ. તેઓ વ્યવસાયે તબીબ (Radiologist) છે. ખગોળ, આકાશ દર્શન, ખગોળનો ઇતિહાસ વગેરે તેમના શોખના વિષયો છે. આ વિષયોનો તેમણે ઊંડાણથી અભ્યાસ કર્યો છે. ગુજરાત વિશ્વકોશ ટ્રસ્ટ દ્વારા પ્રકાશિત ગુજરાતી વિશ્વકોશમાં ઉપરોક્ત વિષયો વિશે તેમણે ઘણાં અધિકરણો લખ્યાં છે. 'આર્યભટ'નો ગુજરાતી અનુવાદ પણ ગુજરાત વિશ્વકોશ ટ્રસ્ટ દ્વારા જ પ્રકાશિત થયો છે. ડૉ. સુશ્રુત પટેલ પણ સુગણિતમ્‌ના લેખકો પૈકીના એક છે. યોગાનુયોગ ઉપરોક્ત બન્ને પુસ્તકોના અનુવાદકો પરસ્પર મિત્રો છે. 'વિશ્વપ્રસિદ્ધ ગણિત પ્રતિભાઓ'ની પ્રસ્તાવનામાં શ્રી મોહનભાઈ વિરોજાએ ડૉ. સુશ્રુત પટેલનો માનભેર ઉલ્લેખ કર્યો છે અને તે પુસ્તક લખવામાં, તેના પ્રુફરિડિંગમાં મદદરૂપ થવા બદલ તેમણે ડૉ. પટેલનો આભાર માન્યો છે. બન્ને મિત્રો અમદાવાદ એસ્ટ્રોનોમી ક્લબના સભ્યો છે.

હવે આપણે પુસ્તક 'આર્યભટ' વિશે વાત કરીએ.

આ પુસ્તકમાં કુલ નવ પ્રકરણો છે,

(1) આર્યભટનો પુનરુદ્ધાર (2) આર્યભટ પૂર્વેનું ભારતીય ખગોળશાસ્ત્ર (3) આશ્મકાચાર્ય (4) 'આર્યભટીય' ગાગરમાં સાગર (5) દશગીતિકા સૂત્ર (6) 'આર્યભટીય'નું ગણિત (7) કાલગણના (8) ગોલીય ખગોળશાસ્ત્ર (9) ઉપસંહાર

આ પુસ્તકમાં મૂળ આર્યભટીય સંસ્કૃત શ્લોકો અને તેના ગુજરાતી અનુવાદ તથા સમૂજતી આપવામાં આવેલ છે, જેમાં આર્યભટ કૃત (1) દશ ગીતિકા (2) ગણિતપાદ (3) કાલક્રિયાપાદ અને (4) ગોલપાદનો સમાવેશ કરવામાં આવેલ છે.

પરિશિષ્ટો પણ રસપ્રદ અને અભ્યાસીઓ માટે ખાસ ઉપયોગી છે. પરિશિષ્ટ-1, ભારતીય ખગોળવિજ્ઞાનનો સંક્ષિપ્ત

વિકાસક્રમ તો એક સ્વતંત્ર પ્રકરણ જેવું છે. ઇ.સ.પૂ.2600થી શરૂ કરીને 14 જુલાઇ 1924ના રોજ ભારતે પ્રક્ષેપિત કરેલ ચંદ્રયાન-3 સુધીનાં સંશોધનો અને ઘટનાઓનું અહીં સંક્ષિપ્ત આલેખન છે. 'સંક્ષિપ્ત' વિશેષણ હોવાં છતાં 10 પાનાંમાં લખાયેલું આ માહિતીસભર પરિશિષ્ટ છે. આ લખાણ વાંચ્યા પછી અમે ડૉ. સુશ્રુતભાઇને ફોન કર્યો – અમને એમ લાગ્યું કે આ લખાણ શ્રી ગુણાકાર મુળેના મૂળ પુસ્તકનો ભાગ ન હોઇ શકે. આવો વિચાર આવ્યો ત્યારે અમે ડૉક્ટર સાહેબે લખેલું 'આમુખ' વાંચ્યું નહોતું – જાણકારી મેળવી કે આ પરિશિષ્ટમાં દર્શાવેલ વિગતો તેમણે એકત્ર કરી છે. ડૉ. સુશ્રુત પટેલનો ખગોળશાસ્ત્રમાં કેટલો ઊંડો અભ્યાસ છે તેનો ખ્યાલ આ પરિશિષ્ટ વાંચતાં આવે છે. એક આડ વાત, ડૉ. પટેલ સાહેબના માણેકબાગ સોસાયટી, અમદાવાદ ખાતે આવેલા નિવાસસ્થાનનું નામ 'આકાશગંગા' છે, જેની અમો ત્રણ-ચાર વખત મુલાકાત લીધી છે.

જેને પ્રાચીન ભારતીય ખગોળશાસ્ત્ર અને ગણિતના અભ્યાસમાં રસ હોય તેમના માટે પરિશિષ્ટ-2, 'સહાયક ગ્રંથ-સૂચી' ખાસ ઉપયોગી છે. સંસ્કૃત, હિંદી, મરાઠી અને અંગ્રેજી ભાષામાં લખાયેલાં 76 પુસ્તકોની યાદી અહીં આપવામાં આવી છે. અમે 1964માં સ્નાતક કક્ષાએ પાઠ્યપુસ્તક તરીકે જેનો ઉપયોગ કરતા તે પુસ્તક – Textbook of Spherical Astronomy by W. M. Smart – ને આ યાદીમાં જોઈને પુરાણી યાદો તાજી થઇ. પરિશિષ્ટ-3 માં આર્યભટીયમાં ખગોળશાસ્ત્ર સંબંધિત સંસ્કૃત શબ્દોનું ગુજરાતી અને અંગ્રેજી શબ્દોમાં રૂપાંતરણ અને સમજૂતી છે. પરિશિષ્ટ-4 માં ગુજરાતી પારિભાષિક શબ્દોના અંગ્રેજી અને પરિશિષ્ટ-5 માં અંગ્રેજી પારિભાષિક શબ્દોના ગુજરાતી પર્યાયોની સૂચી છે.

આમતો પુસ્તકનું નામ સૂચવે છે તે મુજબ પુસ્તક આર્યભટના જીવન અને તેમના ગાણિતિક કાર્યો વિશે હોવું જોઇએ. અલબત્ત આર્યભટના જીવન અને તેમની ગાણિતિક અને ખગોળશાસ્ત્રીય સિદ્ધિ વિશેની પ્રમાણભૂત માહિતી તો આ પુસ્તકમાં છે જ, સાથે સાથે તે સમયનું ગણિત, તે સમય પહેલાનું ગણિત અને લગભગ તમામ પ્રકરણોને અંતે આપેલી અનુવાદકની નોંધોમાં અનુશાંગિક ગાણિતિક મુદ્દાઓની આધુનિક ગણિત સાથે સરખામણી પણ છે. ઉદાહરણ રૂપે પ્રકરણ-2માં આર્યભટ પૂર્વેનું ગણિત અને ખગોળ છે, તો તેજ પ્રકરણમાં પાછળના ભાગમાં આર્યભટ પછીના ગણિતજ્ઞોએ રચેલ પાસ્કલ-ત્રિકોણ તરીકે ઓળખાતી સંખ્યાઓની ગોઠવણીની મેરુ પ્રસ્તાર તરીકે ઓળખાયેલી ભારતીય ગણિતજ્ઞોની સંખ્યા-ગોઠવણી સાથે સરખામણી પણ છે. પ્રકરણ-3માં ઉલ્લેખ છે કે ભાસ્કરાચાર્ય પ્રથમે આર્યભટને આશ્મકાચાર્ય તરીકે ઓળખાવ્યા છે અને તેજ પ્રકરણમાં આગળ ભારતના નકશા સહીત પુરાતન ભારતીય ગણિતજ્ઞો અને ખગોળવિદોની યાદી તેમના જન્મસ્થળ અને તેમની કૃતિઓ સાથે આપવામાં આવી છે. આ યાદી ઇ.સ.પૂર્વે 500 આસપાસ કાશ્મીરના રહેવાસી ગણિતજ્ઞ 'લગધ'થી શરૂ થાય છે અને ચંદ્રશેખરસિંહ (ઓડિસા, ઇ.સ.1835)ના ઉલ્લેખ સાથે પૂરી થાય છે. આજે જેને આપણે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ કહીએ છીએ તે સંખ્યાઓની શ્રેણી અને આ શ્રેણીના સરવાળાનાં સૂત્રો પણ આર્યભટીયમાં જોવા મળે છે. આર્યભટ વિશે તે સમયના અને તેમના સમય પછીના ગણિતજ્ઞોએ જે ભાષ્યો અને ટીકાઓ લખી છે તે સર્વ વિશે વિસ્તૃત માહિતી આ પુસ્તકમાં છે.

હવે કેટલાંક પ્રકરણોમાં સમાવિષ્ટ માહિતી સંક્ષિપ્તમાં જોઈએ.

પ્રકરણ-7, 'કાળ ગણના' સમયના માપનને સમર્પિત છે. કાળ ગણનાના તે સમયના પ્રચલિત એકમો – વર્ષ, માસ, દિવસ, નાડી, નિવાડિકા, ગુર્વક્ષર – ની માહિતી રસપ્રદ છે. આ પ્રકરણમાં વૃત્તીય પરિભ્રમણના માપ –
1 ભગોળ = 12 રાશિ, 1 રાશિ = 30 અંશ, 1 અંશ = 60 કલા, 1 કલા = 60 વિકલા, 1 વિકલા = 60 તત્પર – વિશેની રોચક માહિતી આપવામાં આવી છે.

પ્રકરણ-5, 'દશ ગીતિકા સૂત્ર'માં અંતરનાં માપોના એકમો – 24 અંગુલ (આંગળી) = 1 હસ્ત, 4 હસ્ત = 1 નૃ (નર), 8000 નર = 1 યોજન .... વગેરે વિશે માહિતી છે. આર્યભટે સૂર્ય, પૃથ્વી, ચંદ્રના વ્યાસની ગણતરી 'યોજન'માં કરી હતી. સ્વાભાવિક છે કે તે સમયે સૂર્ય-ચંદ્રના વ્યાસ માપવા માટે આધુનિક સમયમાં ઉપલબ્ધ છે તેવાં સાધનો નહોતાં. તેથી આ માપો

ક્ષતિયુક્ત છે.

પ્રકરણ-8નો ઉલ્લેખ કરવો ખાસ જરૂરી છે. આ પ્રકરણ છે, 'ગોલીય ખગોળશાસ્ત્ર (Spherical Astronomy)'. અવકાશી ગોળો (Celestial Sphere), સૂર્ય-ચંદ્રની ભ્રમણ કક્ષાઓ, ચંદ્રની કળા, સૂર્ય-ચંદ્રનાં ગ્રહણો થવાનાં કારણો, ગ્રહણના સમયની ગણતરીઓ વગેરે વિશે આર્યભટે કરેલા સંશોધનો અહીં જોવા મળશે.

દશ ગીતિકા-સૂત્ર (પ્રકરણ-5)ના એક શ્લોક પરથી એવું જાણવા મળે છે કે 'પૃથ્વી પોતાની ધરી આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.' – એવો આર્યભટનો મત હતો. આર્યભટના આ મત સાથે તે સમયના મોટાભાગના ખગોળશાસ્ત્રીઓ અને 'આર્યભટીય' પર ભાષ્ય લખનારા ગણિતીઓ સહમત નહોતા. બ્રહ્મગુપ્તે આર્યભટની આ માન્યતાની કડવી ટીકા પણ કરી હતી. આ વિવાદ વિશેની રોચક વાત આ પુસ્તકના પ્રકરણ-8માં વિસ્તારથી જાણવા મળશે. પાશ્ચાત્ય જગતમાં ગેલિલિયોના કેટલાંક સંશોધનો અને અવલોકનો વિશે આવો જ વિવાદ થયો હતો. ગેલિલિયોએ કેથોલિક ચર્ચની માફી માંગવી પડી હતી – આ દુઃખદ ઘટનાની યાદ અહીં તાજી થાય છે.

આકૃતિઓની વિપુલ સંખ્યા એ આ પુસ્તકની એક ખાસ વિશિષ્ટતા છે. ગાણિતિક આકૃતિઓ કમ્પ્યુટર પર ચોક્કસાઈપૂર્વક દોરવામાં આવી છે. જ્યાં જરૂર જણાઇ છે ત્યાં કેટલાંક ચિત્રો દ્વારા માહિતીની રજૂઆત સચોટ રીતે કરવામાં આવી છે. પુસ્તકમાં આપવામાં આવેલા કોષ્ટકો માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં રજૂ કરે છે.

મૂળ પુસ્તકના ભાષાંતર સાથે દરેક પ્રકરણના અંતે આપવામાં આવેલી અનુવાદકની નોંધોનો આ પુસ્તકને સમૃદ્ધ બનાવવામાં મહત્વપૂર્ણ ફાળો છે.

પ્રાચીન ભારતીય ગણિત અને ખોગળવિદ્યા વિશે જાણકારી ધરાવતા વાચકોને તો સ્વાભાવિક રીતે જ આ પુસ્તક રસપ્રદ લાગશે. ગણિત કે ખગોળ ન જાણતા હોય તેવા વાચકો પણ જો આ પુસ્તક વાંચે તો તેઓ ગણિત અને ખગોળમાં રસ લેતાં થઇ જાય એવું સર્વાંગ સુંદર પુસ્તક છે.

હિંદી પુસ્તકના લેખક સ્વ. શ્રી ગુણાકાર મૂળે સાહેબ અભિનંદનને પાત્ર છે. આ પુસ્તકનો ગુજરાતી અનુવાદ કરવામાં કેવી જહેમત ઉઠાવવી પડી હશે તેનો આછો ખ્યાલ તો અનુવાદક લિખિત 'આમુખ' પરથી આવે જ છે. વ્યવસાઇ ગણિતજ્ઞ ન હોવા છતાં ડૉ. સુશ્રુતભાઇ પટેલે એક. સિદ્ધકલમ ગણિતજ્ઞ જ કરી શકે તેવું કાર્ય સફળતા પૂર્વક કર્યું છે. ગુજરાતનું ગણિત જગત ડૉક્ટર સાહેબનું હમેશાં ઋણી રહેશે. સુગણિતમ્ ટ્રસ્ટને આ પુસ્તકની નકલો ભેટ સ્વરૂપે આપવા બદલ સુગણિતમ્ ટ્રસ્ટ - પ્રા. અ.મ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન, ગુજરાત ગણિત મંડળ વતી અમે ઋણ સ્વીકાર કરીએ છીએ.

ગુજરાતી ભાષામાં ગણિત-વિજ્ઞાનના લોકભોગ્ય પુસ્તકો પ્રકાશિત કરવા એ લોઢાના ચણા ચાવવા જેવું અઘરું અને જોખમભરેલું કામ છે. ગુજરાત વિશ્વકોશ ટ્રસ્ટે ગણિત-વિજ્ઞાનને લગતાં ઘણાં પુસ્તકો પ્રકાશિત કર્યાં છે. આ પુસ્તક આ યાદીમાં એકનો વધારો કરે છે – આભાર.

જ્યારે અમે (અને કદાચ ડૉ. સુશ્રુત પટેલ સાહેબ પણ) કૉલેજમાં ભણતા ત્યારે પૂર્ણાંકો અને અપૂર્ણાંકો-Rational Numbersને પરિમેય સંખ્યાઓ કહેવામાં આવતી અને $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ વગેરે સંખ્યાઓને અપરિમેય-Irrational સંખ્યાઓ કહેવામાં આવતી. (કૉલેજ કક્ષાએ વિજ્ઞાન પ્રવાહમાં 1956 આસપાસ ગુજરાતી માધ્યમમાં અભ્યાસ શરૂ થયેલો). સમય જતાં આ સંખ્યાઓનાં નામ બદલાઇ ગયાં છે.

Rational - જૂનું નામ પરિમેય – હાલનું નામ સંમેય

Irrational - જૂનું નામ અપરિમેય – હાલનું નામ અસંમેય.

આવું જ Harmonic Sequence વિશે છે. જૂનો ગુજરાતી પારિભાષિક શબ્દ હરાત્મક શ્રેણી હતો હવે તેને સ્વરિત શ્રેણી કહેવામાં આવે છે. આવા બીજા ત્રણેક પારિભાષિક શબ્દો અમારા ધ્યાનમાં આવ્યા છે. સ્પષ્ટ છે કે આ બાબત એ કોઈ ગંભીર ક્ષતિ નથી.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ :

ફિલ્ડ્સ મેડલ અને આબેલ પુરસ્કાર વિજેતા : પિયર ડેલિગ્ને (Pierre Deligne)

ડૉ. માનસી મહેતા
Re education, Palanpur Branch, Surat. (M) 99742 30088

સુગણિતમ્ ના આગળના અંકોમાં આપણે એવા ગણિતશાસ્ત્રીઓ વિશે વિગતો મેળવી જેમને પોતાની કારકિર્દીમાં ગણિતના સર્વોચ્ચ એવા બે પુરસ્કાર, ફિલ્ડ્સ મેડલ અને આબેલ પુરસ્કારથી નવાજવામાં આવ્યા હોય. આ નાનકડી યાદીમાં આગળ વધતાં, આ અંકમાં આપણે આધુનિક ગણિતના શાંત શિલ્પી પિયર ડેલિગ્ને (Pierre Deligne) નાં જીવન અને કાર્યો વિશે વિસ્તૃત માહિતી મેળવીશું, જેમને તેમની સચોટ ચોક્સાઈ માટે તેમના સમકાલીનથી અલગ કરી શકાય છે.

પિયર ડેલિગ્ને એક કંપનીના સંચાલક આલ્બર્ટ ડેલિગ્ને અને તેમની પત્ની રેની બોડાર્ટનો પુત્ર હતો. તેમનો જન્મ 3 ઓક્ટોબર 1944 ના રોજ બ્રસેલ્સના ઉપનગર એટરબીકમાં થયો હતો. તેઓ તેમના માતાપિતાના ત્રણ બાળકોમાં સૌથી નાના હતા. તેમનો એક ભાઈ તેમના કરતાં સાત વર્ષ મોટો હતો અને એક મોટી બહેન પણ હતી. પ્રાથમિક શિક્ષણ શરૂ કરતા પહેલાં જ પિયર તેમના ભાઈ પાસેથી ગણિત શીખતા હતા.

પિયરે સપ્ટેમ્બર 1950 થી જૂન 1956 સુધી મધ્ય બ્રસેલ્સના ઉત્તરપૂર્વમાં આવેલાં ઓગણીસ ઉપનગરીય જિલ્લાઓમાંના એક શારબીક ખાતે પ્રાથમિક શાળામાં અભ્યાસ કર્યો. આ શાળામાં એક ઉત્તમ શિક્ષકે તેમને વાચન, લેખન, અને અંકગણિત શીખવ્યું. આ ઉપરાંત, તેમને યાદ હતું કે શિક્ષકે અર્ધગોળાની સપાટીના ક્ષેત્રફળને સમાન ત્રિજ્યાની ડિસ્ક સાથે દોરડાથી સરખાવીને બંનેને આવરી લીધાં હતાં તે જોઈને તેઓ ખૂબ જ આકર્ષાયા હતા. તેમણે લંબાઈનો ઉપયોગ કરીને ક્ષેત્રફળ માપવા માટે પિયરને ઊંડાણપૂર્વક વિચારવા માટે મજબૂર કર્યા. તેમણે તેમના ભાઈ પાસેથી ગણિત શીખવાનું ચાલુ રાખ્યું અને પ્રાથમિક શાળામાં જ ચતુર્ઘાત સમીકરણો ઉકેલવાનું સૂત્ર શીખી લીધું હતું.

સપ્ટેમ્બર 1956માં તેમણે બ્રસેલ્સના એથેની એડોલ્ફ મેક્સ ખાતે માધ્યમિક શિક્ષણ શરૂ કર્યું. આ છોકરાઓની શાળાની સ્થાપના 1909 માં કરવામાં આવી હતી અને બાદમાં બ્રસેલ્સના પ્રખ્યાત મેયર એડોલ્ફ મેક્સના નામ પરથી તેનું નામ આપવામાં આવ્યું હતું. પિયરે તેમના ભાઈ પાસેથી ગણિત શીખવાનું ચાલું રાખ્યું અને જ્યારે હાઈસ્કૂલમાં હતા, ત્યારે તેમના ભાઈએ તેમને ઘન અને ક્વાર્ટિક સમીકરણો ઉકલેવા વિશે કેટલીક નોંધો આપી, જે પિયરને ખૂબ જ રસપ્રદ લાગી. હાઈસ્કૂલમાં તેમના પ્રિય પાઠ ભૂમિતિના હતા. યુક્લિડની શૈલીમાં પુરાવા લખવાનું શીખતાં તેમને એક ઉત્તમ કસરત મળી. તેમના ગાણિતિક વિકાસમાં સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ ઘટના તેમના ભાઈ પાસેથી નહીં, પરંતુ જેફ નિજ્સ પાસેથી બની. પિયર બોય સ્કાઉટ્સમાં હતો જ્યાં તેનો એક મિત્ર હાઈસ્કૂલના શિક્ષક જેફ નિજ્સનો પુત્ર હતો. પિયરના ગણિત પ્રત્યેના જુસ્સા વિશે સાંભળીને જેફ નિજ્સે તેમને બુરબાકીની સેટ થિયરીની એક નકલ આપી. આ એક મુશ્કેલ લખાણ છે. જે લગભગ કોઈપણ હાઈસ્કૂલના વિદ્યાર્થીને ગણિતમાં વિલંબ કરાવે છે. પરંતુ પિયર ડેલિગ્ને માટે એવું નહોતું. તેમને "પ્રથમ વાસ્તવિક ગાણિતિક પુસ્તક" મળવાથી આનંદ થયો. તેમણે કહ્યું :

"I had already read elsewhere how rational numbers, then real numbers, could be defined starting from the integers. But I remember wondering how integers could be defined from set theory looking a little ahead in Bourbaki and admiring how one could first define what it means for two sets to have the "Same number of elements" and derive from this the notion of

integers.”

તેમના પરિવારના એક મિત્રએ યુવાન ડેલિગ્નેને complex variable પર એક પુસ્તક આપ્યું જેણે અલબત્ત તેમને ‘‘અતિશય આનંદ’’ આપ્યો. જેફ નિજ્સને ખ્યાલ આવ્યો કે ડેલિગ્ને કેટલો અદ્‌ભુત હાઈસ્કૂલનો વિદ્યાર્થી છે અને તેમણે બીજો ઉત્તમ વિચાર રજૂ કર્યો. તેમણે ડેલિગ્નેનો જેક્સ ટીટસ સાથે પરિચય કરાવ્યો. તેમની અસાધારણ પ્રતિભા સમજાવી એ ટીટ્સને તેમની સારી સંભાળ રાખવા કહ્યું. હાઈસ્કૂલમાં હોવા છતાં ડેલિગ્ને યુનિવર્સિટીમાં ટીટ્સના અભ્યાસક્રમો અને સેમિનારમાં હાજરી આપતો. એક દિવસ તે એક વ્યાખ્યાનમાં ગેરહાજર હતો અને ટીટ્સે પૂછ્યું, ‘‘ડીલિગ્ને કયાં છે ?’’ જ્યારે તેમને કહેવામાં આવ્યું કે તે ત્યાં હાજર રહી શકશે નહીં કારણ કે તેમને હાઈસ્કૂલની સફર પર જવાની જરૂર છે. ત્યારે ટીટ્સે તરત જ લેક્ચર આગામી અઠવાડિયા સુધી મુલવતી રાખ્યું. ડેલિગ્ને જૂન 1962માં માધ્યમિક શાળામાંથી સ્નાતક થયા અને તે વર્ષના સપ્ટેમ્બરમાં ફ્રી યુનિવર્સિટી ઓફ બ્રસેલ્સમાં પ્રવેશ કર્યો.

ડેલિગ્ને 1962 થી 1966 સુધી ફ્રી યુનિવર્સિટી ઓફ બ્રેસલ્સમાં અંડરગ્રેજ્યુએટ હતા. ટીટ્સે નક્કી કર્યું કે પેરિસમાં ઈકોલ નોર્મેલ સુપિરિયરમાં લેક્ચર આપી રહેલા એલેકઝાન્ડર ગ્રોથેન્ડીક પાસેથી શીખવું એ ડેલિગ્નેના શ્રેષ્ઠ હિતમાં હશે. નવેમ્બર 1964માં ટીટ્સ ડેલિગ્નેને પેરિસ લઈ ગયા. જ્યાં તેઓએ બુરબાકી સેમિનારમાં હાજરી આપીને ગ્રોથેન્ડીક સાથે તેમનો પરિચય કરાવ્યો.

ડેલિગ્નેએ નવેમ્બર 1966માં તેમનું ગણિતનું લાઈસન્સ મેળવ્યું જે બી.એ. ની સમકક્ષ હતું. તેમણે ફ્રી યુનિવર્સિટી ઓફ બ્રસેલ્સમાં ડૉક્ટરેટ માટે અભ્યાસ ચાલુ રાખ્યો અને સપ્ટેમ્બર 1967માં તેઓ બ્રસેલ્સમાં ફોન્ડ નેશનલ ડે લા રિસર્ચે સાયન્ટિફિકમાં જુનિયર વૈજ્ઞાનિક હતા. તે જ સમયે ફ્રાન્સમાં બ્યુરેસ-સુર-યવેટ ખાતે ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ડેસ હોટ્સ એટ્યુડસ સાયન્ટિફિકમાં મહેમાન હતા જ્યાં એલેક્ઝાન્ડ્રે ગ્રોથેન્ડીક સાથે કામ કર્યું. નવેમ્બર 1968માં તેમને ફ્રી યુનિવર્સિટી ઓફ બ્રસેલ્સ દ્વારા ડૉક્ટરેટ ઈન મેથેમેટિક્સની ઉપાધિ એનાયત કરવામાં આવી.

ડૉક્ટરેટની પદવી પ્રાપ્ત કર્યા પછી ડેલિગ્ને ફ્રાન્સના બ્યુરેસ-સુર-યવેટ ખાતે the Institute des Hautes Etudes Secientifiques (IHES) ગયા જ્યાં તેઓ ફેબ્રુઆરી 1970 સુધી મુલાકાતી સભ્ય રહ્યા, ત્યારબાદ તેઓ સંસ્થાના કાયમી સભ્ય બન્યા. IHES માં તેમણે શરૂઆતમાં ઝરિસ્કીના મુખ્ય પ્રમયેના સામાન્યીકરણ પર ગ્રોથેન્ડીક સાથે કામ કર્યું. તેમણે જીન-પિયર સેરે સાથે પણ નજીકથી કામ કર્યું. ડેલિગ્ને માટે ગ્રોથેન્ડીક અને સેરે બંને સાથે કામ કરવું મહત્ત્વપૂર્ણ હતું, કારણ કે ગણિત પ્રત્યેનો તે બંનેનો અભિગમ ખૂબ જ અલગ હતો. ગ્રોથેન્ડીક દરેક વસ્તુને અત્યંત સામાન્યતામાં સમજવા માંગતા હતા. તેમને સંબંધિત સાહિત્યનું બહુ જ્ઞાન નહોતું. તેઓ પોતાના માટે બધું સાબિત કરવાનું પસંદ કરતા હતા. બીજી બાજુ સેરને સાહિત્યનું ઉત્તમ જ્ઞાન હતું અને તેઓ ચોક્કસ સંદર્ભો આપી શકતા હતા. હંમેશા સૌથી સામાન્ય પરિસ્થિતિ શોધવાને બદલે, તેમણે સુંદર ખાસ કિસ્સાઓ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. ડેલિગ્નેએ વિચાર્યું કે આ બંનેને એકબીજાની જરૂર છે અને તેમનો સહયોગ તેમના બંને માટે મૂલ્યવાન છે. તેમણે એમ પણ જોયું કે તેમના બે અભિગમોને સંતુલિત કરવા એ તેમના માટે શીખવાનો ઉપયોગી અનુભવ હતો. તેમણે કહ્યું કે ગ્રોથેન્ડીકના વ્યાખ્યાનો અદ્‌ભુત હતા પરંતુ તેમના પગ જમીન પર રાખવા માટે તેમને સેરેના વ્યાખ્યાનોમાં અદ્‌ભુત હતા. પરંતુ તેમના પગ જમીન પર રાખવા માટે તેમને સેરેના વ્યાખ્યાનોમાં જવાની જરૂર હતી. IHES ખાતે આ સમયગાળા દરમિયાન, ડેલિગ્ને ડેવિડ મમફોર્ડ સાથે વળાંકો માટે મોડ્યુલી જગ્યાઓના નવા વર્ણન પર પણ સહયોગ કર્યો. આ કાર્યનો ઉપયોગ સ્ટ્રિંગ થિયરીથી ઉદ્‌ભવતા પછીના વિકાસમાં ખૂબ થયો છે.

તેમની કારકિર્દીનો નિર્ણાયક વિજય 1974માં આવ્યો, જ્યારે તેમણે વેઈલ અનુમાનોનું છેલ્લું અને સૌથી મુશ્કેલ અનુમાન

સાબિત કર્યું. આ અનુમાનો દાયકાઓ સુધી એક વિશાળ પડકાર તરીકે ઉભા રહ્યાં હતાં, જે આકારોની ભૂમિતિને સંખ્યાઓના અંકગણિત સાથે જોડતાં હતાં. ગણિત જગતમાં ડેલિગ્નેના પુરાવાની એક માસ્ટરપીસ તરીકે પ્રશંસા કરવામાં આવી હતી. એક ગણિતશાસ્ત્રીએ પ્રશંસા કરતાં કહ્યું : The reading of it is like walking through a perfectly built cathedral - evey part in harmony, evey step supported by a deep inner logic.

તેમના નોંધપાત્ર ગાણિતિક યોગદાનને ઝડપથી માન્યતા આપવામાં આવી. 1974 માં તેમને બેલ્જિયમ રોયલ એકેડેમી ઓફ સાયન્સ દ્વારા આપવામાં આવેલ Francois Derutyts Prize અને ફ્રેન્ચ એકેડમી ઓફ સાયન્સ દ્વારા આપવામાં આવેલ Henri Poincare Medal મળ્યો. તેમને 1975 માં બેલ્જિયન નેશનલ સાયન્સ ફાઉન્ડેશન તરફથી A De Leeuw-Damry-Bourlart Prize મળ્યું.

ગાણિતિક વિશ્વએ આ સિદ્ધિને 1978 માં ફિલ્ડ્સ મેડલ સાથે માન્યતા આપી જે યુવાન ગણિતશાસ્ત્રીઓ માટે સર્વોચ્ચ સન્માન હતું. પરંતુ ડેલિગ્ને લાક્ષણિક રીતે નમ્ર, ક્યારેય ખ્યાતિએ તેમને વિચલિત થવા દીધા નહીં. એક સાથીદાર યાદ કરે છે કે કેવી રીતે, જ્યારે પ્રશંસાની લાંબી સૂચિ સાથે એક કોન્ફરન્સમાં તેમને રજૂ કરવામાં આવ્યા ત્યારે, ડેલિગ્ને શરમાઈને સ્મિત કર્યું અને તેમને અટકાવતાં કહ્યું : “Please, less about me, more about the mathematics.”

9 સપ્ટેમ્બર 1980 ના રોજ ડેલિગ્નેએ એલેના વ્લાદિમીરોવના એલેક્સીવા સાથે લગ્ન કર્યા, જેમને તેઓ રશિયાની તેમની એક મુલાકાત દરમિયાન મળ્યા હતા. તેમને બે બાળકો છે, નતાલિયા અને એલેક્સિસ.

ડેલિગ્ને 1984 સુધી ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ડેસ હોટ્સ એટ્યુડસ સાયન્ટિફિક્સમાં રહ્યા. પછી તેઓ યુનાઈટેડ સ્ટેટ્સમાં પ્રિન્સટન ખાતે ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ફોર એડવાન્સ્ડ સ્ટડી ગયા, જ્યાં તેમને પ્રોફેસર તરીકે નિયુક્ત કરવામાં આવ્યા. તેમણે IHES છોડ્યું નહીં. કારણ કે તેઓ ત્યાં નાખુશ હતા. તેનાથી વિપરિત પરંતુ તેમને લાગ્યું કે એક જ સંસ્થામાં પોતાની આખી કારકિર્દી વિતાવવી સારી નથી અને તેમને સ્થળાંતરથી ઘણું ફાયદો થશે. IHES માં તેઓ દર વર્ષે એક અલગ વિષય પર સેમિનાર આપતા હતા અને પ્રિન્સટન જઈને તેમને હવે આ કરવાની જરૂર ન લાગી.

ડેલિગ્નેએ બીજી ઘણી મહત્ત્વપૂર્ણ સમસ્યાઓ પર કામ કર્યું છે. બીજગણિતીય ભૂમિતિ ઉપરાંત તેમણે જે ક્ષેત્રો પર કામ કર્યું છે તેમાં હિલ્બર્ટનો 21 st problem, હોજ સિદ્ધાંત, મોડ્યુલીનો સિદ્ધાંત, મોડ્યુલર સ્વરૂપો, ગેલોઈસ રજૂઆતો, એલ-શ્રેણી અને લેંગલેન્ડસ અનુમાન તથા બીજગણિતીય જૂથોનું પ્રતિનિધિત્વ સામેલ છે.

ફિલ્ડસ મેડલ ઉપરાંત, ડેલિગ્ને 1988 માં રોયલ સ્વીડિશ એકેડમી ઓફ સાયન્સિસનો બીજગણિતીય ભૂમિતિમાં તેમના મૂળભૂત સંશોધન માટે ક્રાફોર્ડ પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યો હતો.

ડેલિગ્નેને તેમના ઉત્કૃષ્ટ યોગદાન માટે અન્ય ઘણા સન્માનો એનાયત કરવામાં આવ્યાં છે. ઉદાહરણ તરીકે તેમને જૂન 1974 માં રોયલ બેલ્જિયમ એકેડમી ઓફ સાયન્સ દ્વારા ફ્રાન્કોઈસ ડેરુયટ્સ પુરસ્કાર, ડિસેમ્બર 1974માં પેરિસ એકેડમી ઓફ સાયન્સ દ્વારા હેનરી પોઈનકેરે ચંદ્રક અને 1975માં ફોન્ડ નેશનલ ડેલા રેસેર્ચે સાયન્ટિફિક દ્વારા ડોક્ટર એ ડી લીઉ-ડેમરી-બોર્લાર્ટ પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યો હતો. તેમને 1989 માં બ્રસેલ્સની ફ્લેમિશ યુનિવર્સિટી અને 1995 માં ઈકોલ નોર્મેલ સુપિરિયર તરફથી ડૉક્ટરેટની માનદ પદવી પ્રાપ્ત થઈ છે. તેમને 1978માં પેરિસ એકેડેમી ઓફ સાયન્સ અને તે જ વર્ષે અમેરિકન એકેડમી ઓફ આર્ટ્સ એન્ડ સાયન્સ દ્વારા સભ્ય તરીકે ચૂંટવામાં આવ્યા હતા.

2004 માં ડેલિગ્ને લંડન મેથેમેટિકલ સોસાયટીના માનદ સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા હતા. તે જ વર્ષે ડેલિગ્નેને ઈન્ટરનેશનલ બાલ્ઝાન ફાઉન્ડેશન દ્વારા ગણિતમાં 2004 નો બાલ્ઝાન પુરસ્કાર મળ્યો. બાલ્ઝાન પ્રાઈઝ કમિટીના સભ્ય તરીકે જેક્સ ટીટ્સે

7 સપ્ટેમ્બર 2004ના રોજ મિલાનમાં ઈનામ જાહેર કર્યું. તેમણે ડેલિગ્નેના કાર્યનું વર્ણન કર્યું. પછી નીચેની ટિપ્પણીઓ કરીને સમાપ્ત કર્યું :

"A remarkable feature of Pierre Deligne's thinking is that when confronted with a new problem or a new theory, he understands and so to speak, makes his own its basic principles at a tremendous speed, and is immediately able to discuss the problem or use the theory as a completely familiar object. Thus he readily adopts the language of the people he is talking to when engaged in discussions. This flexibility is one of the reasons for the universality of his mathematical work.

Alone or in collaboration Pierre Deligne has written about a hundred papers, most of them of sizeable legnth. Because of the conciseness of his style and of his habit of never writing the same thing twice (in fact, quite a few of his best ideas have never been written) the volume of his publications is a true measure of the richness of his scientific production."

બાલ્ઝાન પુરસ્કારના વિજેતા તરીકે ડેલિગ્નેને 1 મિલિયન સ્વિસ ફ્રેંક (લગભગ US$800,000) મળ્યા, જેમાંથી અડધા તેમના ક્ષેત્રના યુવા સંશોધકોને સંડોવતા સંશોધન પ્રોજેક્ટસમાં જશે. ઈનામ સમારોહ 18 નવેમ્બર 2004ના રોજ રોમના એકેડેમિયા ડે ઈલિન્સેઈમાં યોજાયો હતો.

પિયર ડેલિગ્નેના એકસઠમાં જન્મદિવસ નિમિત્તે 17-20 ઓક્ટોબર 2005ના રોજ ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ફોર એડવાન્સ્ડ સ્ટડી ખાતે એક પરિષદ યોજાઈ હતી. મે 2007માં તેઓ નેશનલ એકેડેમી ઓફ સાયન્સના ગણિત વિભાગના આંતરરાષ્ટ્રીય સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા હતા.

ફેબ્રુઆરી 2008માં ડેલિગ્નેને વુલ્ફ પુરસ્કાર મળ્યો હતો. જે આ પ્રસંગે ફિલિપ ગ્રિફિથ્સ અને ડેવિડ મમફોર્ડને પણ આપવામાં આવ્યો હતો. પ્રશસ્તિપત્રમાં જણાવાયું છે કે આ પુરસ્કાર ડેલિગ્નેને આપવામાં આવે છે - for his work on Mixed Hodge theory, the weil conjectures, the Riemann-Hilbert correspondence and for his conributions to arithmetic.

પાછળથી 2008માં તેઓ પ્રિન્સટન સ્થિત ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ફોર એડવાન્સ્ડ સ્ટડીમાં એમેરિટસ બન્યા. ફેબ્રુઆરી 2009 માં તેઓ રોયલ સ્વીડિશ એકેડેમી ઓફ સાયન્સના વિદેશી સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા અને તે વર્ષના એપ્રિલમાં અમેરિકન ફિલોસોફિકલ સોસાયટીના સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા. કદાચ તેમને મળેલ સૌથી મોટું સન્માન મે 2013માં આપેલ પુરસ્કાર હતું. પુરસ્કારની અધિકૃત website મુજબ : Pierre Deligne was awarded the award for seminal contributions to algebraic geometry and for their transformative impact on number theory, representation theory, and related fields... Deligne's powerful concepts, ideas, results and methods continue to influence the development of algebraic geometry, as well as mathematics as a whole.

ઉપર ઉલ્લેખિત ન હોય તેવા અન્ય સન્માનોમાં શામેલ છે, Elected Membre Associe Etranger, Academic des Sciences, Paris (1978); Doctor honoris causa of the Vrije Universitieit Brussel (1989); elected Membre Associe, Academic Royale de Belgique (1994); Doctor honoris causa of Ecole Normale Superieure (1995); elected foreign member, Accademia nazionale dei Lincei (2003); ennobled by Albert II, King of the Belgians (2006) આ છેલ્લા ઉલ્લેખિત સન્માનથી તેમને વિકોમ્ટે ડેલિગ્ને બનાવ્યા અને તેમણે તેમનો કોટ ઓફ આર્મ્સ ડિઝાઈન કર્યો જે નીચેના નર્સરી રાઈમથી પ્રેરિત હતો.

Quand trois poules vont aux champs,
La premiere va devant,
La deuxieme suit la premiere,
La troisieme est la derniere
Quand trois poules vont aux chmps,
La premiere va devant

આનો અનુવાદ આ રીતે થાય છે :

As three hens head for the fields,
The first one leads,
The second follows the first.
The thrid one is last.
As three hens head for the fields,
The first one leads.

2007 માં બેલ્જિયન પોસ્ટ ઓફિસે તેમના માનમાં એક ટપાલ ટિકિટ બહાર પાડી હતી. ઓક્ટોબર 2016માં તેઓ રશિયન એકેડમી ઓફ સાયન્સના વિદેશી સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા હતા.

આજે ડેલિગ્નેનું નામ પ્રમેય અને તકનીકો સાથે જોડાયેલું છે, જે ગણિતશાસ્ત્રીઓની પેઢીઓ હવે પ્રમાણભૂત તરીકે શીખે છે. પરંતુ પ્રમેય અને પુરસ્કારોથી આગળ, તેમની યાત્રા નમ્રતા ધીરજ અને શોધની સુંદરતાની વાર્તા છે. તે આપણને યાદ અપાવે છે કે વિચારમાં ક્રાંતિ મોટા અવાજે થવાની જરૂર નથી કેટલીકવાર તે એવા લોકો દ્વારા સંચાલિત થાય છે જેઓ ફક્ત વધુ સ્પષ્ટ રીતે જુએ છે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

સુગણિતમ્ પેન-ડ્રાઈવ, સળંગ અંક 1 થી 300

સુગણિતમ્‌ના 1 થી 300 સળંગ અંકોને સમાવતી પેન-ડ્રાઈવ મેળવવા માટે નીચે આપેલા બેંક એકાઉન્ટમાં રૂ.650/- ભરી, બેંકની Receipt સાથે આપનું નામ, પૂરું સરનામું, મોબાઈલ નંબર સાથે પ્રા. સચીન ગજ્જરને Whatsapp થી મોકલી આપવું. ઉપરની વિગતો મળતાં સત્વરે આપને પેન-ડ્રાઈવ કુરિયરથી મોકલી આપવામાં આવશે.

Bank Account Detail

Name : Gujarat Ganit Mandal
Bank : Bank of Baroda
University Campus Branch
Account No : 034201 0001 9975
IFSC No. : BARBOUNIAHM

પ્રા. સચીન ગજ્જર
(M) +91 99253 62754
Email : gjr.sachin@gmail.com

સંમેય સંખ્યાઓ

કલ્પેશ ડી. અખાણી
(M) 9879053369
Email : kdakhani44@gmail.com

ધોરણ 9ના પ્રથમ પ્રકરણ 'સંખ્યા પદ્ધતિ' માં- બે સંમેય સંખ્યા વચ્ચે અમુક સંમેય સંખ્યા મેળવો – એવો પ્રશ્ન છે, જેમ કે 3 અને 4 વચ્ચે 5 સંમેય સંખ્યાઓ મેળવો. અહીં આપણે બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b $(a < b)$ વચ્ચે અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ મેળવીશું.

(1) a અને b, $a < b$ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{a+b}{2}$ છે.

$a < b$ આપેલ છે. અસમતાની બન્ને બાજુએ a ઉમેરતાં, $2a < a + b$ અને $a < b$ માં બન્ને બાજુએ b ઉમેરતાં,

$a + b < 2b$ $\quad \therefore\ a < \frac{a+b}{2} < b$

ઉદાહરણ : 3 અને 4 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ છે. $(3 < \frac{7}{2} < 4)$

હવે 3 અને $\frac{7}{2}$ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{(3+\frac{7}{2})}{2} = \frac{13}{4}$ થશે. $\quad \therefore\ 3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2}$

અને $\frac{7}{2}$ અને 4 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{15}{4}$ થશે. આમ 3 અને 4 વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખ્યા $\frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \frac{15}{4}$ થશે.

$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < \frac{15}{4} < 4$

તે જ પ્રમાણે 3 અને $\frac{13}{4}$ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{25}{8}$ થશે.

$\frac{13}{4}$ અને $\frac{7}{2}$ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{27}{8}$, $\quad \frac{7}{2}$ અને $\frac{15}{4}$ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{29}{8}$

$\frac{15}{4}$ અને 4 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા $\frac{31}{8}$ શોધી શકાય.

આમ $3 < \frac{25}{8} < \frac{13}{4} < \frac{27}{8} < \frac{7}{2} < \frac{29}{8} < \frac{15}{4} < \frac{31}{8} < 4$ .... (1)

આમ, 3 અને 4 વચ્ચે 7 સંમેય સંખ્યાઓ મળી.

ઉપરની અસમતાનાં બધાં જ પદોને છેદમાં 8 આવે તે રીતે સમચ્છેદી બનાવીએ તો અસમતા નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$\left(3 = \frac{24}{8}\right) < \frac{25}{8} < \frac{26}{8} < \frac{27}{8} < \frac{28}{8} < \frac{29}{8} < \frac{30}{8} < \frac{31}{8} < \left(\frac{32}{8} = 4\right)$

પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલી રીત મુજબ a અને b વચ્ચે પાંચ અસંમેય સંખ્યા મેળવવા માટે દરેક સંખ્યાનો છેદ (5+1=6) મળે તેવી સંમેય સંખ્યાઓ મેળવીએ.

$3 < 4 \therefore \frac{18}{6} < \frac{24}{6}$ $\qquad \therefore \left(3 = \frac{18}{6}\right) < \frac{19}{6} < \frac{20}{6} < \frac{21}{6} < \frac{22}{6} < \frac{23}{6} < \left(\frac{24}{6} = 4\right)$

આમ, 3 અને 4 વચ્ચે પાંચ સંખ્યાઓ, $\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}$ મળી ગઈ.

અહીં a અને b $(a < b)$ વચ્ચે n સંમેય સંખ્યાઓ મેળવવી હોય તો $a = \frac{(n+1)a}{n+1} = \frac{p}{n+1}$ લઈએ અને $b = \frac{(n+1)b}{n+1} = \frac{q}{n+1}$ લઈએ,જ્યાં $p = (n + 1)\, a$ અને $q = (n + 1)\, b$. દેખીતી રીતે જ $\frac{p}{n+1} < \frac{q}{n+1}$

તેથી $\frac{p+1}{n+1}, \frac{p+2}{n+1}, \frac{p+3}{n+1}, \dots, \frac{q-1}{n+1}$, એમ n સંખ્યાઓ મળશે જે a અને b ની વચ્ચે છે. (આવું કેમ? છેલ્લે આપેલી નોંધ વાંચો)

એક બીજી વાત,

"3 અને 4 વચ્ચે નવ સંમેય સંખ્યાો મેળવો" - એવો પ્રશ્ન હોય અને કોઈ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 - જવાબ લખે તો પણ તે સાચો જવાબ જ છે. કારણ કે સાંત દશાંશ અપૂર્ણાંકો અને અનંત પુનરાવર્તી દશાંશ અપૂર્ણાંકો પણ સંમેય જ છે, જેમ કે $3.1 = \frac{31}{10}$, $3.2 = \frac{16}{5}$, વગેરે....

કોઈ બે અપૂર્ણાંક સંખ્યા વચ્ચે એક સંમેય સંખ્યા મેળવવા માટે એક અસમતા છે, જે શ્રી પી.કે. વ્યાસ સાહેબે ગુજરાત ગણિત મંડળના અમરેલી અધિવેશનમાં સમજાવી હતી.

જો $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ તો $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d, \in N)$

સાબિતી સરળ અને રસિક છે, વિદ્યાર્થીઓને ગમે તેવી છે તે અહીં ટૂંકમાં રજૂ કરું છું.

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \therefore a\,d < bc$ .... (1)

(1) માં બન્ને બાજુએ ab ઉમેરતાં, $ad + ab < bc + ab$

$\therefore a\,(b+d) < (a+c)\,b$

$\therefore \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ .... (2)

(1) માં બન્ને બાજુએ cd ઉમેરતાં, $ad + cd < bc + cd$

$\therefore d\,(a+c) < (b+d)\,c$

$\therefore \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .... (3)

(2) અને (3) પરથી $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

ઉપરોક્ત અસમતાનો ઉપયોગ કરી બે અપૂર્ણાંકો $\frac{3}{2}$ અને $\frac{5}{3}$ વચ્ચે પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ મેળવીએ. દેખીતી રીતે જ $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$ છે.

$\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$ $\therefore \frac{3}{2} < \left(\frac{3+5}{2+3} = \frac{8}{5}\right) < \frac{5}{3}$;

$\frac{3}{2} < \frac{8}{5}$ $\therefore \frac{3}{2} < \left(\frac{3+8}{2+5} = \frac{11}{7}\right) < \frac{8}{5}$

$\frac{8}{5} < \frac{5}{3}$ $\therefore \frac{8}{5} < \left(\frac{8+5}{5+3} = \frac{13}{8}\right) < \frac{5}{3}$;

$\frac{3}{2} < \frac{11}{7}$ $\therefore \frac{3}{2} < \left(\frac{3+11}{2+7} = \frac{14}{9}\right) < \frac{11}{7}$

$\frac{11}{7} < \frac{8}{5}$ $\therefore \frac{11}{7} < \left(\frac{11+8}{7+5} = \frac{19}{12}\right) < \frac{8}{5}$

આમ, $\frac{3}{2}$ અને $\frac{5}{3}$ વચ્ચે પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ : $\frac{14}{9}, \frac{11}{7}, \frac{19}{12}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$ મેળવી શકાય.

❖ પી.કે. વ્યાસની નોંધ :

1. આપેલી બે ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચે n ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ શોધવા માટેની વિધિ (રીત) અહીં ચર્ચવામાં આવી છે. તે વિધિ પાછળનું ગણિત અત્રે રજુ કરીએ છીએ.

અહીં આપેલું ગણિત આજથી પંદરેક વર્ષ પહેલાંના દસમાં ધોરણનાં પાઠ્યપુસ્તકમા હતું. આજે આ રીત શીખવવામાં આવે છે કે નહીં તે અમને ખબર નથી. અમારી પાસે હાલનું પાઠ્યપુસ્તક નથી.

પહેલાં એક બે સરળ હકીકતો સાબિતી વિના સ્વીકારીએ.

(i) સમાંતર શ્રેણી વધતી શ્રેણી છે અથવા ઘટતી શ્રેણી છે. જો સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત $d > 0$ તો સમાંતર શ્રેણી વધતી શ્રેણી છે અને જો $d < 0$ તો સમાંતર શ્રેણી ઘટતી શ્રેણી છે.

(ii) સમાંતર શ્રેણીનું પહેલું પદ A અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તેનું 'n' મું પદ $A + (n-1)d$ થાય.

(iii) a અને b ($a < b$) આપેલી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને $a, x_1, x_2, x_3, ... x_n, b$ સમાંતર શ્રેણી હોય તો $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ ને a અને b વચ્ચેના 'n' સમાંતર મધ્યકો કહેવાય, જેમ કે 3 અને 23 વચ્ચે ચાર સંખ્યાઓ 7, 11, 15, 19 મૂકીઓ તો 3, 7, 11, 15, 19, 23 સમાતંર શ્રેણી રચે છે, જેનું પ્રથમ પદ A=3 અને સામાન્ય તફાવત d=4 છે. અહીં 3 અને 23 વચ્ચેની ચાર સંખ્યાઓ 7, 11, 15, 19 એ 3 અને 23 વચ્ચેના ચાર સમાંતર મધ્યકો છે.

દેખીતી રીતે જ $a, x_1, x_2, x_3, ... x_n, b$ સમાંતર શ્રેણી હોય તો $a < xi < b, i=1,2,3, ..., n.$ હવે આપણે x_i શોધવાનું સૂત્ર મેળવીએ.

$a, x_1, x_2, x_3, ... x_n, b$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, a શ્રેણીનું પ્રથમ પદ છે અને b એ n+2 મું પદ છે. ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત d છે.

$\therefore\ b = T_{n+2} = A + (n+2-1)\, d$, જ્યાં $A = T_1 = a$ $\quad \therefore\ b = a + (n+1)\, d$

$a < b$ હોવાથી $d > 0$ છે. ઉપરોક્ત સૂત્રમાંથી આપણને $d = \frac{b-a}{n+1}$ મળશે.

શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $T_1 = a$ અને a, b આપેલી સંખ્યાઓ છે. તેથી શ્રેણીનાં a પછીનાં બધાં જ પદો આપણને મળી જશે.

$x_1 = T_2 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+b}{n+1}$

$x_2 = T_3 = a + 2d = a + \frac{2b-2a}{n+1} = \frac{an+2b-a}{n+1} = \frac{a(n-1)+2b}{n+1}$

$x_3 = T_4 = a + 3d = a + \frac{3b-3a}{n+1} = \frac{an+3b-2a}{n+1} == \frac{a(n-2)+3b}{n+1}$

જૂઓ કે $T_{n+2} = a + (n+1)\, d = a + \frac{(n+1)(b-a)}{n+1} = a + b - a = b.$

(પણ T_{n+2} એ a અને b વચ્ચેના 'n' સમાંતર મધ્યકો પૈકીનો એક નથી તે સમજાય તેવી વાત છે)

હવે આ લેખના ઉદાહરણમાં આપેલ 3 અને 4 વચ્ચેની પાંચ સંખ્યાઓ ઉપરોક્ત રીતે મેળવીએ.

a =3, b = 4 અને n = 5 તેથી $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

તેથી માગેલી પાંચ સંખ્યાઓ $3 + \frac{1}{6}$, $3 + \frac{2}{6}$, $3 + \frac{3}{6}$, $3 + \frac{4}{6}$ અને $3 + \frac{5}{6}$ એટલે કે $\frac{19}{6}, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{23}{6}$ .... મળશે.

ઉપરોક્ત 'n' સંખ્યાઓ $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ શોધવાનું સૂત્ર

$x_i = T_{i+1} = a + id = a + \frac{i\,(b-a)}{n+1}, \quad 1 \le i \le n, n \in N.$

$= \frac{a(n+1)+i\,(b-a)}{b-a}$

ભાઈ શ્રી અખાણીના લેખમાં b અને a નો ધન તફાવત 1 છે. તેથી a (=3) માં $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$ ઉમેરતાં આપણને પાંચ સંખ્યાઓ $3 + \frac{i}{n+1} = 3 + \frac{i}{6}$, $\quad i = 1, 2, 3, 4, 5$ સહેલાઈથી મળી જાય છે. પણ b – a > 1 હોય તો પણ ઉપરોક્ત રીત અપનાવી શકાય. એક ઉદાહરણ જાતે ગણો. ઉદાહરણ : 2 અને 8 વચ્ચે નવ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ શોધો.

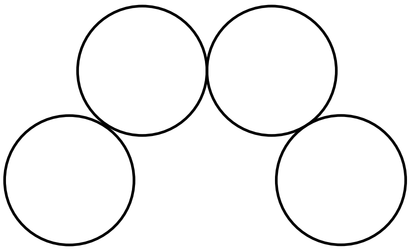
(સૂચન : અહીં $= \frac{b-a}{n+1} = \frac{8-2}{9+1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$)

2. અહીં $a < b$ આપેલાં હોય અને $a < b$ હોય તો $a < \frac{a+b}{2} < b$ ઉપરાંત $a, b, c, d > 0$ અને $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ હોય તો $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. આ સૂત્રો માટે a, b, c, d વગેરે પર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય (એટલે કે $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ સંમેય સંખ્યાઓ હોય) તેવું જરૂરી નથી. $a, b, c, d \in R^+$ માટે ઉપરોક્ત સૂત્રો સાચાં જ છે. b=d=1 લઈએ તો $a < \frac{a+b}{2} < b$ મળે. $\frac{a+b}{2}$ પણ a અને b વચ્ચેનો 'એક' સમાંતર મધ્યક છે.

ચાપ વક્રો : Arclets

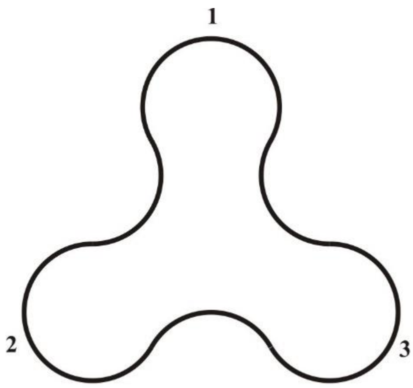
રમેશ કે. માલનિયા
અમરેલી. (M) 9727796834

આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળના પરિઘ પરનાં બે બિંદુઓ પરિઘને બે ભાગમાં વહેંચે છે. જો આ બિંદુઓ વર્તુળનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ ન હોય તો તેમનાથી રચાતા પરિઘના ભાગો પૈકી નાના ભાગને આપણે વર્તુળની લઘુચાપ અને મોટાભાગને આપણે ગુરુચાપ કહીએ છીએ. હવે પરસ્પર ક્રમશઃ બહારથી સ્પર્શતા $2n$ સંખ્યાના એકરૂપ વર્તુળોથી રચાતી એક બંધ હારમાળા (કે સાંકળ)નો વિચાર કરો. આ હારમાળાનો દરેક મણકો (અહીં વર્તુળ)એ તેની સાથે જોડાયેલા બે મણકાઓ (વર્તુળો)ને બહારથી સ્પર્શે છે. આ વર્તુળોનાં સ્પર્શબિંદુઓથી પ્રત્યેક વર્તુળ પર એક લઘુચાપ અને એક ગુરુચાપની રચના થશે.

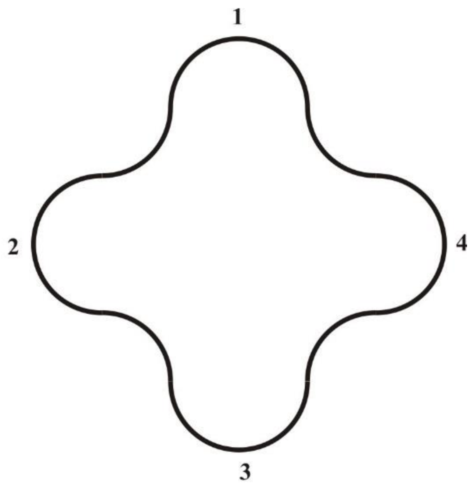


હવે માળાના એક વર્તુળની લઘુચાપને તેની એક બાજુના વર્તુળની ગુરુચાપ સાથે જોડો, તે ગુરુચાપને તે જ દિશામાં આવતા ક્રમિક વર્તુળની લઘુચાપ સાથે જોડો, વર્તુળાકાર માળામાં વર્તુળોની સંખ્યા, $2n$, યુગ્મ હોવાથી ઉપર વર્ણવેલી રીતે એક જ દિશામાં આગળ વધતાં, લઘુચાપ-ગુરુચાપ, લઘુચાપ - ગુરુચાપ... જોડતાં અંતે જ્યાંથી શરૂઆત કરી હતી તે બિંદુએ પહોંચી શકાય. ઉપરોક્ત ચાપો વડે એક બંધ વક્ર રચાશે. આ વક્રને આપણે ચાપ વક્ર કહીશું. ચાપવક્રનું અંગ્રેજી નામ Arclet છે. હવે પછીના લખાણમાં આપણે ચાપવક્રને 'આર્કલેટ' નામથી જ ઓળખીશું. આમ તો ડિક્શનરી અનુસાર Arclet શબ્દનો ગુજરાતી અર્થ 'આકાશગંગાનો એક ભાગ' એવો થાય છે.

આકૃતિ 1(a) અને 1(b) માં આવી બે આર્કલેટસનાં ચિત્રો આવેલાં છે.



આકૃતિ-1(a) 3-Node Arclet



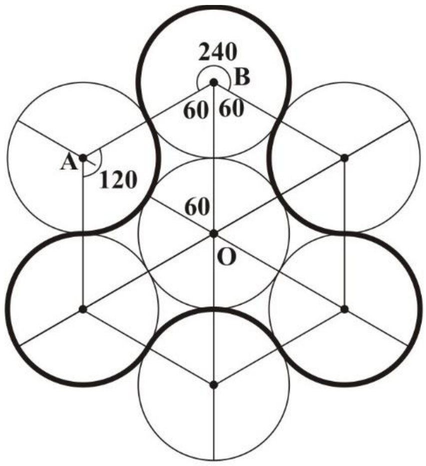
આકૃતિ-1(b) 4-Node Arclet

આકૃતિ 1(a) માં છ ($2n = 6$) વર્તુળો છે. બધાં જ વર્તુળોની ત્રિજ્યા એકસરખી, r, છે. દરેક વર્તુળ તેની આજુબાજુનાં બે વર્તુળોને બહારથી સ્પર્શે છે. ત્રણ વર્તુળોની ગુરુચાપ અને ત્રણ વર્તુળોની લઘુચાપથી એક બંધ વક્ર રચાય છે.

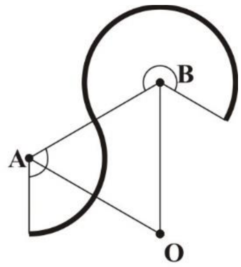
આકૃતિ 1(b) માં આઠ ($2n = 8$) વર્તુળોની હારમાળા છે. આ વર્તુળોની ત્રિજ્યા પણ એકસરખી, r, છે. આ આકૃતિમાં પણ ચાર વર્તુળોની ગુરુચાપ અને બાકીના ચારની લઘુચાપથી એક બંધ વક્ર રચાય છે.

બંને આકૃતિઓમાં દરેક ગુરુચાપ વડે રચાતા, આકૃતિના વળાંકને નોડ (Node) કહેવામાં આવે છે. આકૃતિ 1(a) માં દર્શાવેલ વક્ર 3 નોડ વાળી આર્કલેટ છે. આકૃતિ 1(b) માં દર્શાવેલ વક્ર 4 નોડવાળી આર્કલેટ છે. વર્તુળની હારમાળામાં $2n$ એકરૂપ વર્તુળો હોય તો n નોડ વાળી આર્કલેટ રચાય છે. ત્રણ, ચાર, પાંચ અને છ નોડવાળી આર્કલેટ્સ દોરવાની રીત નીચે દર્શાવી છે. આર્કલેટ એક બંધ વક્ર હોવાથી તેને એક પરિમિતિ (લંબાઈ) છે, જેને આપણે આર્કલેટનો પરિઘ કહીશું. યાદ રહે કે $2n$ એકરૂપ વર્તુળોની હારમાળાથી રચાતો n નોડ આર્કલેટનો પરિઘ શોધવા માટે વર્તુળોની ગુરુચાપ અને લઘુચાપની લંબાઈનો સરવાળો કરવો પડે. દરેક આર્કલેટમાં લઘુચાપ અને ગુરુચાપની સંખ્યા સમાન છે. વર્તુળોની ચાપ વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે θ^0 માપનો ખૂણો આંતરે તો તે ચાપની લંબાઈ $\frac{\pi d}{360} \cdot \theta$ થાય, જ્યાં d એ વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા r ના સ્વરૂપમાં ચાપની લંબાઈ $\frac{\pi r \theta}{180}$ થશે.

હવે આપણે 3-નોડ આર્કલેટની રચના કેમ કરવી તે જોઈએ અને પછી આ આર્કલેટનો પરિઘ શોધીએ.



આકૃતિ-2(a)



આકૃતિ-2(b)

❖ 3-નોડ આર્કલેટ :

આ આર્કલેટ દોરવી સરળ છે. આકૃતિ-2(a) માં સાત વર્તુળો છે. O કેન્દ્રિત વર્તુળને બહારથી સ્પર્શતા છ વર્તુળો દોરેલા છે. બધાજ વર્તુળો એકરૂપ છે. O કેન્દ્રિત વર્તુળના ત્રણ બિંદુઓ જ આર્કલેટ પર છે. બાકીના છ વર્તુળો એક માળા રચે છે. આ માળાનું દરેક વર્તુળ માળાના બીજા બે વર્તુળોને સ્પર્શે છે. આ છ વર્તુળોના કેન્દ્રને ક્રમિક રીતે જોડતાં નિયમિત ષટ્કોણ રચાય છે. આ ષટ્કોણની બાજુની લંબાઈ $2r$ છે. (r એ ઉપરોક્ત વર્તુળોની ત્રિજ્યા છે.) આર્કલેટમાં ત્રણ વર્તુળોની લઘુચાપ જે તે વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે 120^0 ખૂણો રચે છે અને ગુરુચાપ કેન્દ્ર પાસે લઘુચાપ કરતાં બમણું (240^0) પરિભ્રમણ કરે છે. તેથી આ આર્કલેટનો પરિઘ :

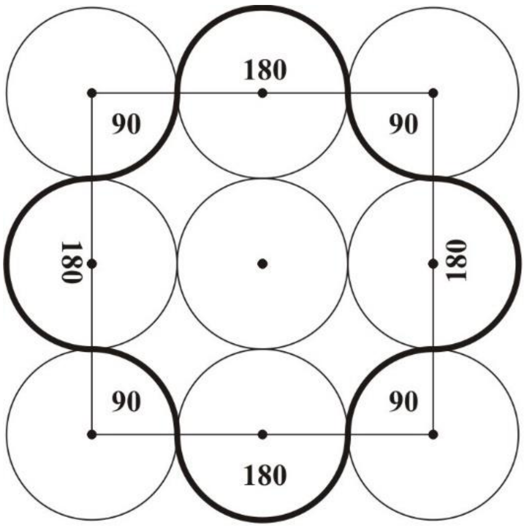
= 3 × લઘુચાપની લંબાઈ + 3 × ગુરુચાપની લંબાઈ

= 3 × (લઘુચાપની લંબાઈ + ગુરુચાપની લંબાઈ)= $3\left(\frac{\pi r 120}{180} + \frac{\pi r 240}{180}\right)$

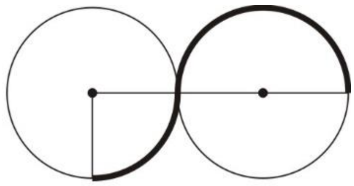
= 3 × વર્તુળનો પરિઘ = $3\pi d = 6\pi r$, (d = વર્તુળનો વ્યાસ, r = વર્તુળની ત્રિજ્યા)

આમ, 3-નોડ આર્કલેટનો પરિઘ=$6\pi r$ આકૃતિ 2(b)માં પરસ્પર જોડાયેલ એક લઘુચાપ અને એક ગુરુચાપ દર્શાવેલ છે.

❖ 4-નોડ આર્કલેટ :



આકૃતિ-3(a)



આકૃતિ-3(b)

4-નોડ આર્કલેટની રચના પણ સરળ છે. આકૃતિ સમજવી અને દોરવી પણ સરળ છે. ત્રણ હાર અને ત્રણ સ્તંભ પૈકી પ્રત્યેકમાં ત્રણ, એમ કુલ નવ એકરૂપ વર્તુળો દોરેલા છે. આ વર્તુળો પૈકી કેન્દ્રમાં દોરેલું વર્તુળ એ આર્કલેટનો ભાગ નથી. બાકીનાં આઠ વર્તુળો હારમાળા રચે છે. આ વર્તુળો પૈકીનાં ચારની લઘુચાપ અને બાકીનાં ચારની ગુરુચાપથી આર્કલેટની રચના થાય છે. દરેક લઘુચાપ એ જે તે વર્તુળના પરિઘનો ચતુર્થાંશ છે અને દરેક ગુરુચાપ એ જે તે વર્તુળના પરિઘનો અર્ધ ભાગ છે. વળી લઘુચાપ અને ગુરુચાપની સંખ્યા એક સમાન (ચાર) છે.

તેથી 4 – નોડ આર્કલેટનો પરિઘ :

= 4 × લઘુચાપની લંબાઈ + 4 × ગુરુચાપની લંબાઈ

= 4 × ($\frac{1}{4}$ વર્તુળનો પરિઘ) + 4 × ($\frac{1}{2}$ વર્તુળનો પરીઘ)

= 3 × વર્તુળનો પરિઘ

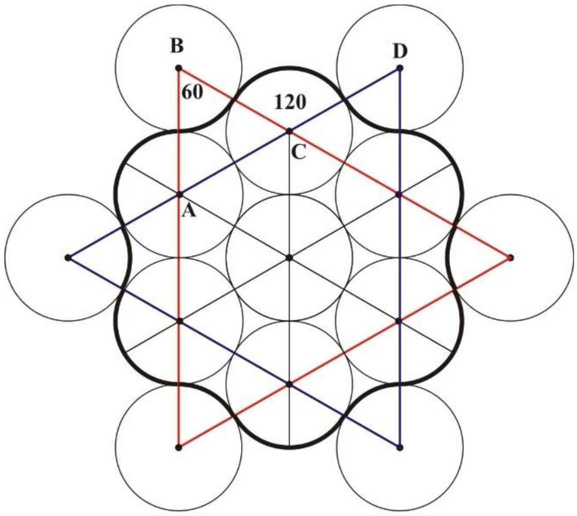
$= 3\,\pi\, d = 6\,\pi\, r$

અહો આશ્ચર્યમ્ ! 3-નોડ અને 4-નોડ આર્કલેટનાં પરિઘ સમાન છે. પણ માત્ર આટલું જ આશ્ચર્ય નથી.

આગળ વધીએ.

અહીં પણ એક લઘુચાપ અને તેની સાથે જોડાયેલ એક ગુરુચાપ દર્શાવતો આકાર આકૃતિ 3(b) માં દોર્યો છે. હવે ક્રમ આવે છે 5-નોડ આર્કલેટનો. પણ તે પહેલાં આપણે 6-નોડ આર્કલેટની ચર્ચા કરીએ કારણ કે આ આર્કલેટની રચના 3-નોડ આર્કલેટ પરથી કરી શકાય છે.

6-નોડ આર્કલેટ :



આકૃતિ-4

આકૃતિ-4માં કુલ 13 એકરૂપ વર્તુળો દોરલાં છે. આકૃતિના કેન્દ્રમાં જે વર્તુળ છે. તેનું કોઈપણ બિંદુ આર્કલેટ પર નથી. આ કેન્દ્રસ્થ વર્તુળને બહારથી સ્પર્શતાં છ વર્તુળો આપણે 3-નોડ આર્કલેટમાં દોર્યાં હતાં. હવે આ છ વર્તુળો પૈકી પરસ્પર સ્પર્શતાં દરેક બે વર્તુળની વચ્ચે એક ત્રીજું એકરૂપ વર્તુળ દોરવાનું છે જે તે બે વર્તુળને બહારથી સ્પર્શે. દેખીતી રીતે જ આવાં છ વર્તુળો દોરી શકાય છે જે આકૃતિ-4 માં દોરેલાં છે. આમ આ આકૃતિમાં કેન્દ્રિય વર્તુળ સિવાયનાં 12 વર્તુળ એક હારમાળા રચે છે. આ હારમાળાનું કોઈપણ વર્તુળ હારમાળાનાં આજુબાજુનાં બે વર્તુળોને સ્પર્શે છે. હવે કેન્દ્રિય વર્તુળને સ્પર્શતાં છ વર્તુળની ગુરુચાપો અને હારમાળાના બાકીનાં છ વર્તુળો જે કેન્દ્રિય વર્તુળને સ્પર્શતા નથી તેમની લઘુચાપોથી રચાતો વક્ર એ 6-નોડ આર્કલેટ છે. દરેક ગુરુચાપ જે તે વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે 120° માપનો ખૂણો બની રચે છે અને દરેક લઘુચાપ જે તે વર્તુળોના કેન્દ્ર પાસે 60° માપનો ખૂણો રચે છે. બધાં જ વર્તુળો એકરૂપ હોવાની 6 લઘુચાપો એકરૂપ છે અને 6 ગુરુચાપો પણ એકરૂપ છે. તેથી 6-નોડ આર્કલેટનો પરીઘ.

= 6 (લઘુચાપની લંબાઈ + ગુરુચાપની લંબાઈ)

$= 6\left[\frac{\pi r}{180} \times 60 + \frac{\pi r}{180} \times 120\right] = \frac{6\pi r}{180}\,[60 + 120]$

= $6\pi r = 3\pi d = 3 \times$ વર્તુળનો પરિઘ.

આમ 6 નોડ આર્કલેટનો પરીઘ પણ એક વર્તુળના પરીઘનો ત્રણ ગણો છે.

હવે આપણે 5-નોડ આર્કલેટ કેવી રીતે રચી શકાય તે જોઈએ.

❖ 5-નોડ આર્કલેટ :

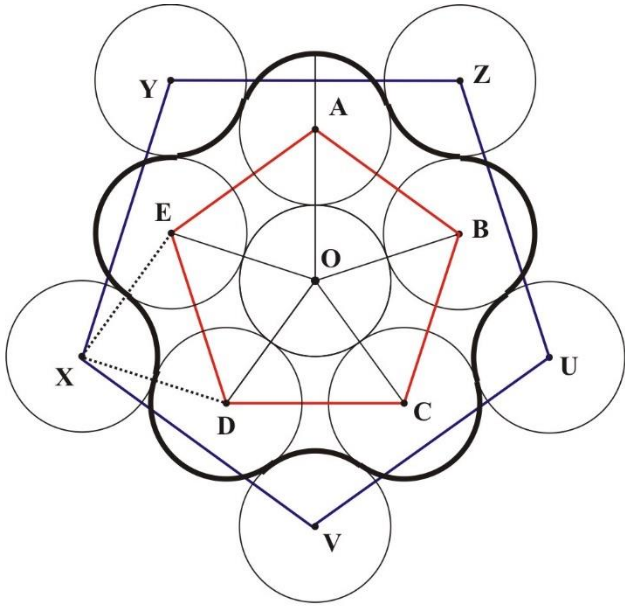
નિયમિત પંચકોણની રચના કંપાસ અને સીધી પટ્ટીથી કેમ કરવી ?

સુગણિતમ્‌ના જૂના અંકોમાં એકથી વધુ વખત આ રચના વિશે લેખો લખાયેલા છે.

આકૃતિ-5 માં O કેન્દ્રિત *r* ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરેલ છે. (હવે પછી દોરવાનાં છે તે તમામ વર્તુળો આ વર્તુળને એકરૂપ દોરવાનાં છે. એટલે કે તે બધાંની ત્રિજ્યા પણ *r* છે.) ઉપરોક્ત વર્તુળને બહારથી સ્પર્શતા *r* ત્રિજ્યાવાળા પાંચ વર્તુળો દોરેલા છે, જેનાં સ્પર્શબિંદુઓ O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં અંતર્ગત નિયમિત પંચકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે. આ વર્તુળોનાં કેન્દ્ર

આકૃતિમાં બતાવ્યા તે ક્રમમાં A, B, C, D, E છે. (દેખીતી રીતે જ ABCDE નિયમિત પંચકોણ છે જેની પરિત્રિજ્યા OA = 2r છે અને ∠ AOB નું માપ $\frac{360}{5} = 72^o$ છે.

સ્પષ્ટ છે કે આ પાંચ વર્તુળો પૈકી કોઈ પણ બે પરસ્પર સ્પર્શતા નથી. આ પાંચ વર્તુળોમાંથી ક્રમિક બે વર્તુળોની પાંચ જોડ મળશે.



આકૃતિ-5

આમાંની પ્રત્યેક જોડના બે વર્તુળોને બહારથી સ્પર્શતું (O કેન્દ્રિત વર્તુળ સિવાયનું) એક વર્તુળ રચી શકાય. કુલ પાંચ જોડ છે તેથી આવા પાંચ વર્તુળો રચાશે જે આકૃતિમાં દોરેલાં છે. તેમનાં કેન્દ્રો આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ X, Y, Z, U, V લીધાં છે. (આ પાંચ બિંદુઓ પણ નિયમિત પંચકોણ રચે છે.)

આમ O કેન્દ્રિત વર્તુળ સિવાયનાં દસ વર્તુળોની એક હારમાળા રચાય છે જેમાં પ્રત્યેક બે ક્રમિક વર્તુળો પરસ્પર સ્પર્શે છે, આવી હારમાળા પરથી આગળ ચર્ચી ગયા તે મુજબ ક્રમિક રીતે એક વર્તુળની લઘુચાપ તેના ક્રમિક વર્તુળની ગુરુચાપ સાથે અને ત્યાર બાદ તે ગુરુચાપ એ ત્યાર પછીના ક્રમના વર્તુળની લઘુચાપ સાથે જોડતાં 5-નોડ વાળી આર્કલેટ રચાય છે.

દરેક લઘુચાપ જે તે વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે 72^o માપનો ખૂણો બનાવે છે અને દરેક ગુરુચાપ જે તે વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે 144^o માપનો ખૂણો બનાવે છે. પાંચ લઘુચાપ છે અને પાંચ ગુરુચાપ છે. તેથી આર્કલેટનો પરિઘ

= 5 (લઘુચાપની લંબાઈ + ગુરુચાપની લંબાઈ)

$= 5\left[\frac{\pi r}{180} \times 72 + \frac{\pi r}{180} \times 144\right]$

$= \frac{5\pi r}{180}[72 + 144] = \frac{\pi r}{36} \times 216 = 6\pi r$

આમ, પાંચ-નોડ આર્કલેટનો પરિઘ પણ $6\pi r$ મળે છે. નીચેનું કોષ્ટક જુઓ :

નોડની સંખ્યા	કેન્દ્ર પાસે રચાનો ખૂણો		પરિઘ
	લઘુચાપ	ગુરૂચાપ	
3	60^o	120^o	$6\pi r$
4	90^o	180^o	$6\pi r$
5	72^o	144^o	$6\pi r$
6	60	120	$6\pi r$

બધી જ આર્કલેટ માટે પરિઘની ગણતરી આપણે કરી લીધી છે. n-નોડ આર્કલેટ માટે વાચકો જાતે ગણતરી કરે.

★★★

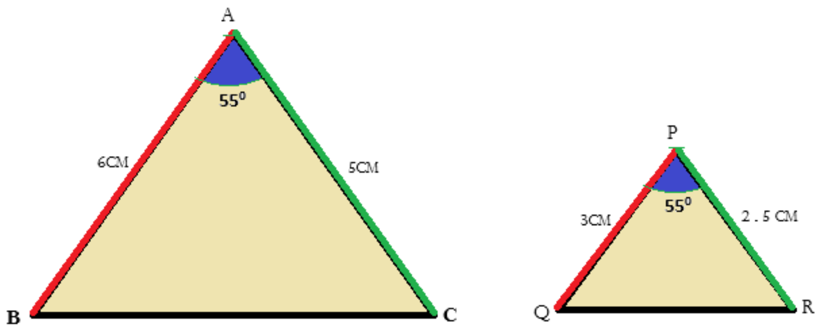
Math Meets Mythology: Goddess Subhadra's Place in SAS Similarity

In a heartwarming blend of tradition and theorem, students at Adani Vidya Mandir explored the **SAS (Side-Angle-Side) Criterion of Similarity of Triangles** through a lens that was both spiritual and symbolic—celebrating the festival of **Raksha Bandhan** and the divine sibling trio of **Lord Jagannath, Lord Balabhadra, and Goddess Subhadra**.

As the classroom blackboard came alive with chalk illustrations of triangles and chariots, one image stood out: **BSB – Brother, Sister, Brother**. A powerful visual metaphor emerged from the traditional Rathyatra formation, where **Lord Balabhadra (elder brother)** stands on the left, **Lord Jagannath (younger brother)** on the right, and **Subhadra (sister)** always in between. This sacred arrangement became the perfect representation of the **SAS criterion**, where the **angle is always between the two sides.**

The SAS Criterion in Geometry

In triangle similarity, **SAS** tells us:



If in △ABC and △PQR:

- **AB/PQ = AC/PR** (sides in the same ratio), and
- **∠A = ∠P** (equal angle **between** the two sides),
  then **△ABC ~ △PQR** (by SAS **Criterion)**

This concept was linked with the cultural motif: **Just as Subhadra unites her two brothers, the angle unites the two sides**. The **angle is not just placed between them—it defines their relationship**, just as the **sister's presence strengthens the sibling bond** in every Indian household.

Raksha Bandhan: A Thread of Love and Logic

The analogy deepened during discussions around **Raksha Bandhan**, where sisters tie rakhis to express love, protection, and connection. Here, the **angle (sister)** became a symbol of balance, respect, and unity. The **BSB model** helped students remember both the geometry rule and the **emotional strength of sibling bonds**.

A Lesson Beyond Chalk and Talk

The classroom was not just filled with equations, but also rakhis, drawings, and conversations on **relationships and reasoning**. The blackboard depicted both the **mathematical triangle** and the **divine triangle of siblinghood**, transforming abstract learning into a **living lesson of value-based education**.

This kind of creative teaching celebrates **interdisciplinary learning**, connecting **mathematics with Indian ethos**, and proving once again that **when culture and curriculum walk together, deeper learning blossoms**.

This approach not only reinforces logical thinking but also nurtures **empathy, creativity, and cultural awareness**, proving once again that **learning becomes powerful when it is personal**.

Sabita Routroy, PGT (Mathematics),
Adani Vidya Mandir, Ahmedabad
(M) + 91 8849875503
E-mail : sroutroy2@gmail.com

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ગુજરાત ગણિત મંડળ
62મા અધિવેશનનું આમંત્રણ

ગુજરાત ગણિત મંડળનું આગામી 62 મું અધિવેશન ગૂજરાત વિદ્યાપીઠ, અમદાવાદ મુકામે તા.26, 27, 28 ડિસેમ્બર 2025 દરમિયાન યોજાવાનું છે.

રજીસ્ટ્રેશન માટેની લીંક પર જાઓ અથવા નીચેનો QR CODE સ્કેન કરો.

https://web.gujaratvidyapith.org/ganit-mandal/

સૌ પ્રથમ લીંક પર જઈ આપનું એકાઉન્ટ ક્રિએટ કરો, ત્યારબાદ આગળની માહિતી ભરો અને છેલ્લે ફી ભરો.
જો આપને રજીસ્ટ્રેશન કરવામાં કોઈ મુશ્કેલી જણાય તો શ્રી દશરથભાઈ ચૌહાણ (મો. 8000146024) નો સંપર્ક કરવો.

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો

ડૉ. સચિન ગજ્જર
અમદાવાદ (M) 99253 62754 , E-mail : gjr.sachin@gmail.com

(જરૂરી સૂચના : આ વિભાગ શરૂ કરવાનો અમારો મૂળ હેતુ વિદ્યાર્થીઓને ગણિતમાં રસ લેતા કરવાનો છે. શાળા કૉલેજના શિક્ષકોને નમ્ર વિનંતી છે કે તેઓ તેમના વિદ્યાર્થીઓને આ વિભાગથી વાકેફ કરે અને તેઓને ભાગ લેવા માટે પ્રોત્સાહન આપે. આ વિભાગના સંપાદક પ્રા. સચીન જે. ગજ્જરનો ફોન નંબર અને Email આપણે દરેક અંકમાં મૂકીશું જ, જેથી તમામ વાચકો સીધા તેમને જ ઉત્તરો મોકલી શકે.)

- ડી. એન.જે. આદર્શ હાઈસ્કૂલ, ડીસાના શિક્ષક શ્રી કરસનભાઈ દરજીએ પ્રશ્ન-8 અને 9 ના સાચા ઉકેલો મોકલ્યા છે. શ્રી દયારામભાઈએ ત્રણેય પ્રશ્નોના સાચા ઉકેલો મોકલ્યા છે.

સળંગ અંક-318 (E-Copy-13) ના ઉકેલો

(7) Let a, b, c be three distinct real numbers.

Prove that $$\left(\frac{a-b}{b-c}-2\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}-2\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}-2\right)^2 \geq 17.$$

Solution :-

Here , we will prove the following general result.

$$\left(\frac{a-b}{b-c}-k\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}-k\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}-k\right)^2 \geq 2k(k+1)+5.$$

For that, let $\frac{a-b}{b-c}=x$, $\frac{b-c}{c-a}=y$ and $\frac{c-a}{a-b}=z$

Now $x+1=\frac{a-b}{b-c}+1=\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-c}{a-b}\ \frac{a-b}{b-c}=-zx$

$\therefore\ x=-zx-1$

Similarly $y=-xy-1$ and $z=-yz-1$ .... (i)

Now

$(x-k)^2+(y-k)^2+(z-k)^2$

$=x^2+y^2+z^2-2k(x+y+z)+3k^2$

$=x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)-2(k-1)(x+y+z)+3k^2$

$=x^2+y^2+z^2-2(-zx-1-xy-1-yz-1)-2(k-1)(x+y+z)+3k^2$

(From (i))

$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)-2(k-1)(x+y+z)+3k^2+6$

$=(x+y+z)^2-2(k-1)(x+y+z)+(k-1)^2+3k^2+6-(k-1)^2$

$=(x+y+z-(k-1))^2+3k^2+6-k^2+2k-1$

$=(x+y+z-(k-1))^2+2k^2+2k+5$

$=(x+y+z-(k-1))^2+2k^2(k+1)+5$

$=2k(k+1)+5$

By substituting k=2 in the above result, we get the requried result.

(8) Prove that

$$\cos\frac{4\pi}{25} + \cos\frac{6\pi}{25} = \cos\frac{\pi}{25} + \cos\frac{9\pi}{25} + \cos\frac{11\pi}{25}$$

Solution :

It is clear that

$$\sin\frac{4\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$$

$$\therefore 2\sin\frac{2\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$$

$$\therefore 4\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$$

$$\therefore 4\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10} = 1$$

$$\therefore 4\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10} = 1 \qquad \left(\because \cos\frac{2\pi}{10} = \sin\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\therefore 2\left(2\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}\right) = 1$$

$$\therefore 2\left(\cos\frac{2\pi}{10} - \cos\frac{4\pi}{10}\right) = 1$$

$$\therefore 2\cos\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{2\pi}{5} = 1$$

$$\therefore 2\cos\frac{5\pi}{25} - 2\cos\frac{10\pi}{25} = 1$$

$$\therefore 2\cos\frac{5\pi}{25}\cdot\cos\frac{\pi}{25} - 2\cos\frac{10\pi}{25}\cdot\cos\frac{\pi}{25} = \cos\frac{\pi}{25}$$

(Multiply by $\cos\frac{\pi}{25}$)

$$\therefore \cos\frac{6\pi}{25} + \cos\frac{4\pi}{25} - \cos\frac{11\pi}{25} - \cos\frac{9\pi}{25} = \cos\frac{\pi}{25}$$

$$\therefore \cos\frac{4\pi}{25} + \cos\frac{6\pi}{25} = \cos\frac{\pi}{25} + \cos\frac{9\pi}{25} + \cos\frac{11\pi}{25}$$

(9) Let x, y be real numbers such that $x + y = 3$ and $\frac{1}{x^2+y} + \frac{1}{x+y^2} = \frac{1}{2}$. Find the values of x^2, y^2, $x^3 + y^3$ and $x^4 + y^4$.

Solution : $\frac{1}{x^2+y} + \frac{1}{x+y^2} = \frac{1}{2}$

$\therefore 2(x + y^2 + x^2 + y) = (x^2 + y)(x + y^2)$

$\therefore 2(x^2 + y^2) + 2(x + y) = x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy$

$\therefore 2(x + y)^2 - 4xy + 2(x + y) = (x + y)^3 - 3xy(x+y) + x^2y^2 + xy$

$\therefore 2(3)^2 - 4xy + 2(3) = (3)^3 - 3xy(3) + x^2y^2 + xy$

($\because x + y = 3$)

$\therefore x^2y^2 - 4xy + 3 = 0$

$\therefore (xy - 1)(xy - 3) = 0$

$\therefore xy = 1$ or $xy = 3$

Case : 1 $x + y = 3$ and $xy = 3$

$\therefore$ x and y are the roots of the equation $t^2 - 3t + 3 = 0$

But this equation has no real roots.

$\therefore xy \neq 3$

Case : 2 $x + y = 3$ and $xy = 1$

$\therefore$ x and y are the roots of the equation $t^2 - 3t + 1 = 0$, and this equation has real root.

$\therefore xy = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (3)^2 - 2(1) = 7$

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x+y) = (3)^3 - 3(1)(3) = 18$ and

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (7)^2 - 2(1)^2 = 47$

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો : અંક-319

(10) For every integer $n \geq 1$, prove that

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} + \cdots + \frac{2n-1}{3n-1} > \frac{1}{3}$$

પ્રત્યેક પૂર્ણાંક n $\geq$ 1 માટે સાબિત કરો કે

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} + \cdots + \frac{2n-1}{3n-1} > \frac{1}{3}$$

(11) If a, b, c are distinct real numbers such that $a + b + c = 0$, then prove that

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) = 9$$

જો a, b, c એ એવી ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય કે જેથી $a + b + c = 0$, હોય, તો સાબિત કરો કે

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) = 9$$

(12) Let $\{a_n\} \geq 0$ be a sequence such that $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ for every $m \geq n \geq 0$. If $a_1 = 1$, then find the value of a_{2025}.

ધારો કે $\{a_n\} \geq 0$ એવી શ્રેણી છે કે જેથી $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$, $m \geq n \geq 0$. જો $a_1 = 1$ તો a_{2025} નું મૂલ્ય શોધો.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

St. Xavier's College (Autonomous), Ahmedabad Department of Mathematics

Report on

Fr. Valles' First Workshop on UGC-NET Training for Problem Solving in Mathematics- 2025

The Fr. Valles First Workshop on UGC-NET Training for Problem Solving in Mathematics was successfully organized from 9-13 June 2025, to equip aspiring candidates with the necessary skills and strategies to tackle problem-solving questions in mathematics, particularly aligned with the UGC-NET examination pattern.

The workshop was organized by the Department of Mathematics, St. Xavier's College (Autonomous), Ahmedabad, and was jointly sponsored by the following prestigious organizations: Ahmedabad Ganit Mandal, Prof. A. R. Rao Foundation, Madhava Mathematics Competition Fund, Prof. A. M. Vaidya Foundation, and Gujarat Ganit Mandal.

A total of 9 participants took part in this intensive five-day training program. The sessions included lectures, guided problem-solving techniques, mock test discussions, and interactive group activities. Participants were exposed to a wide range of topics relevant to the NET syllabus with a focus on critical thinking, conceptual clarity, and time-bound problem-solving.

The resource persons were Dr. Udayan Prajapati, Dr. Arti Salat, Dr. Avadh Patel, Dr. Dhawal Bhatt, Dr. Savan Patel, Mr. Jaimin Patel, Mr. Nutan Patel, Dr. Prakash Dabhi, Dr. Prashant Patel, Dr. Bhikha Ghodadara, and Prof. Sanjay Patel.

The workshop was held under the patronage of Fr. Principal Vinayak Jadav, with Dr. Udayan Prajapati serving as the Convener. The event was efficiently coordinated by Dr. Arti Salat and Dr. Kinjal Shah, who acted as the Organizing Secretaries and Treasurers.

The workshop not only enhanced the mathematical problem-solving abilities of the participants but also created an environment of academic exchange and motivation among young scholars.

The Department of Mathematics expresses sincere gratitude to all the sponsoring bodies, the patrons, coordinators, and the enthusiastic participants for making this workshop a resounding success. This first edition marks the beginning of a series of future initiatives under the banner of Fr. Valles Workshops.

Day	Mon	TUE	WED	THU	FRI
Date	9/6/2025	10/6/2025	11/6/2025	12/06/25	13/06/25
9 to 10:15	Inaugaration	JP	DB	DB	SP
10:15 -10:30	Tea	Tea	Tea	Tea	Tea
10:30 to 11:45	UP	JP	SKP	AP	SP
11:45- 1:00	MSU	AS	PD	AP	PP
1:00 to 2:30	Lunch	Lunch	Lunch	Lunch	Lunch
2:30 to 3:45	MSU	AS	PD	NP	PP
3:45 to 5:00	UP	PS	PS	NP	Valedictory

In the program's Closing Ceremony, Dr. Udayan Prajapati thanked all the participants and resource persons for making the event valuable, and gave the certificates to the participants. Finally, the students and professors presented their experiences with the program.

The program was financially supported by Gujarat Ganit Mandal.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

તંત્રી મંડળ :

1. પ્રા. દેવભદ્ર વી. શાહ (મુખ્ય તંત્રી) (M) 9898057891
2. પ્રા. વિઠ્ઠલભાઈ એ. પટેલ (M) 9428019042
3. પ્રા. સચિન ગજ્જર (M) 9925362754
4. શ્રી મેઘરાજ જ. ભટ્ટ (M) 9925837247
5. સુ. શ્રી નીતાબેન સંઘવી (M) 9825625218
6. પ્રા. કૌશિક ટી. ઠાકર (M) 9825867429
7. પ્રા. હેમાબેન વસાવડા (M) 9409157840
8. પ્રા. ઉદયન પ્રજાપતિ (M) 9426383343
9. પ્રા. રેખાબેન મહેતા (M) 9879328129

કૃપા કરી આટલું કરશો.

સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત કરવા માટે ઘણાં બધાં – સારા, પ્રકાશિત કરવા જ જોઈએ એવાં - લખાણો મળી રહ્યાં છે. કેટલાંક લખાણો ટાઈપ કરેલાં હોય છે તો કેટલાંક હસ્તલિખિત પણ હોય છે. હસ્તલિખિત લખાણોના ફોટા પાડીને અને ટાઈપ કરેલાં લખાણોની Doc-File અને PDF મળે છે. અમે નમ્રતાપૂર્વક નીચે પ્રમાણે ત્રણ સૂચનો કરીએ છીએ.

1. ટાઈપ કરેલાં લખાણો 14 પોઈન્ટના અક્ષરોમાં ટાઈપ કરવાં. ટાઈપ કરતી વખતે બે લીટી વચ્ચેનું અંતર (Line Spacing) થોડું વધારે રાખવું. પછી તેની Doc-File અને PDF બન્ને મોકલવી.
2. હસ્તલિખિત લેખ તદ્દન કોરા કાગળો પર પાનાની એક જ બાજુએ લખવો. લીટીવાળા-આંકેલા કાગળોનો ઉપયોગ ન કરવો. લખાણ 0.7 પોઈન્ટની અણી (Nib) વાળી, વાદળી અથવા કાળા કલરની, Gel Pen વડે લખવું. Ball Pen નો ઉપયોગ ન કરવો.
3. હસ્તલિખિત લખાણના ફોટા પાડતા પહેલાં અને ટાઈપ કરેલ લખાણની PDF બનાવતા પહેલાં, લેખ બરાબર વાંચી જવો. જો આપ આ સૂચનોનો અમલ કરશો તો ટાઈપ કરનારને અને પ્રુફ વાંચનારને ઘણી સુગમતા થશે.

આભાર...