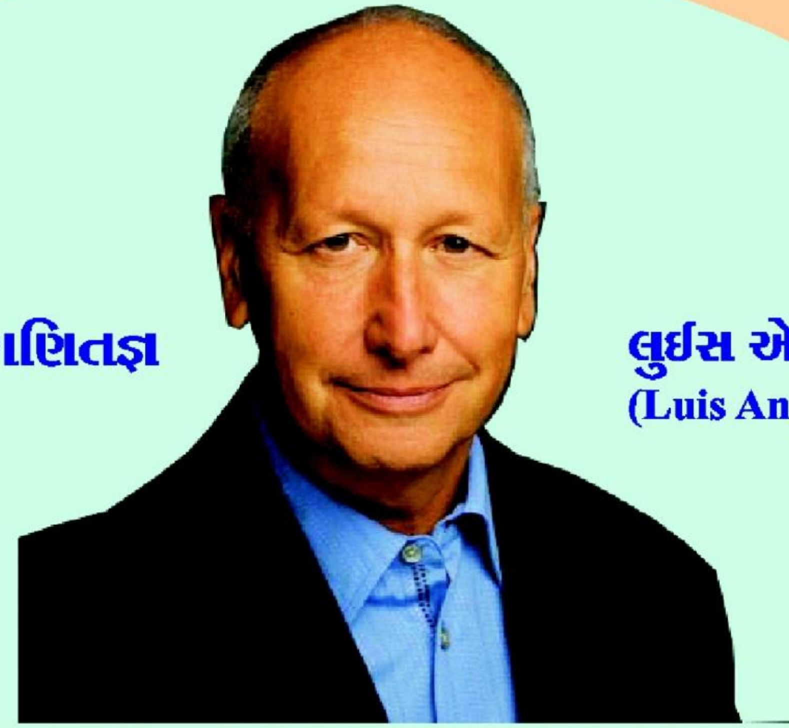
RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

વર્ષ : 61 ઇ-આવૃત્તિ-5 સળંગ અંક : 310 જુલાઈ 2023
For private circulation only



મુખપૃષ્ટ પરનો ગણિતજ્ઞ

લુઈસ એન્જલ કેફેરેલી
(Luis Angel Caffarelli)

જન્મ: 8-12-1948

આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

email : suganitam2018@gmail.com

સંવર્ધક તંત્રી
ડૉ. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

અનુક્રમણિકા

સળંગ અંક : 310 ઈ-આવૃત્તિ-5 જુલાઈ - 2023

સંપાદકીય

સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 310 (e-અંક 5) આપ સર્વેના હાથમાં મૂકતાં આનંદ અનુભવીએ છીએ. ગણિતને કેન્દ્રમાં રાખીને લખાયેલ કોઈપણ રસપ્રદ લેખ સુગણિતમ્‌માં શક્ય પ્રકાશન માટે આવકાર્ય છે. આપના લેખ સફેદ કાગળની ફક્ત એક જ બાજુ પર સ્વચ્છ અને સુવાચ્ય અક્ષરોમાં લખીને અથવા ટાઈપ કરીને મોકલવા. લખાણની બે લીટી વચ્ચે થોડી જગ્યા અવશ્ય રાખવી. આપના લેખની શરૂઆતમાં શીર્ષકની નીચે આપનું નામ, સરનામું, ફોન નંબર વગેરે લખવાં. લેખમાં ભાષાશુદ્ધિ જળવાય એ ઈચ્છનીય છે.

આપની સંસ્થામાં બનતી ગાણિતિક ઘટનાઓ (ગણિત સમાચાર) પર ટૂંકી નોંધ કે વિગતવાર લેખ લખીને સુગણિતમ્‌ના મુખ્ય તંત્રી ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહને પત્ર/ઈ-મેઈલ દ્વારા મોકલી આપવા.

લેખ/ગણિત સમાચાર મોકલવા માટેનું સરનામું નીચે મુજબ છે :

સરનામું: ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ, ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી,
સુરત-395007
મોબાઈલ : 98980 57891, ઈ-મેઈલ : suganitam2018@gmail.com

સુગણિતમ્‌ને વધુ ઉપયોગી અને સમૃદ્ધ કઈ રીતે બનાવી શકાય તે માટેનાં આપનાં સૂચનો જરૂર જણાવશો. આપનાં અભિપ્રાય / સૂચનો અમે ‘વાચકો લખે છે’ - એ વિભાગમાં સામેલ કરીશું.

19 મે-2023ના રોજ પ્રાધ્યાપક મહાવીરભાઈ વસાવડા સાહેબે સુગણિતમ્‌ના સંપાદક મંડળમાંથી નિવૃત્ત થવાની ઈચ્છા સંપાદક મંડળના સભ્યોને ઈ-મેઈલ દ્વારા જણાવી છે. પ્રાધ્યાપક વસાવડા સાહેબે સુગણિતમ્‌ની Electronic આવૃત્તિનું સંપાદન કરવામાં ઘણી જહેમત ઉઠાવી છે. સુગણિતમ્‌નાં સંપાદન અને પ્રકાશનમાં છેલ્લા એક વર્ષ દરમિયાન તેમણે લીધેલી જહેમતની સંપાદક મંડળ સાભાર નોંધ લે છે અને તેમની નિવૃત્તિ સ્વીકારે છે.

પણ સમગ્ર સંપાદક મંડળ, માનનીય વસાવડા સાહેબને આગ્રહભરી વિનંતી કરે છે કે જ્યારે સમય મળે ત્યારે સુગણિતમ્ માટે કાંઈક ને કાંઈક લખે અને અન્યોને લખવા પ્રેરણા આપે. અમારી ઈચ્છા છે કે સુગણિતમ્‌ના હવે પછી પ્રગટ થનાર દરેક અંકમાં, અનુક્રમણિકામાં, ‘પ્રા.મહાવીર વસાવડા’નું નામ હોય. ‘પ્રશ્નાવલિ’, ‘પ્રશ્ન ચર્ચા’ વગેરે જેવા વિભાગોમાં તેમનાં લખાણો કે ગાણિતિક વિષયો પરના તેમના માહિતીસભર, રસપ્રદ લેખો સુગણિતમ્‌ના અંકોની સમૃદ્ધિ અને શોભામાં વધારો કરે તેવી અમો આશા વ્યક્ત કરીએ છીએ.

- સંપાદકો

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

સો અંક પહેલાં

[સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 210 જુલાઈ-ઑગષ્ટ 2004નો હતો. આ અંકમાં શ્રી પરેશ પટેલ નો લખેલો લેખ "સુવર્ણ ગુણોત્તર અને ફિબોનાકી સંખ્યાઓ" પ્રગટ થયેલ. આ લેખનો અંશ ભાગ અત્રે પુનર્મુદ્રિત કરેલ છે. - પ્રધાન સંપાદક]

સુવર્ણ ગુણોત્તર અને ફિબોનાકી સંખ્યાઓ

ફિબોનાકી સંખ્યાઓ આ પ્રમાણે છે.

$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5\ldots$ જેનું આવર્તી વિધેય તરીકે નિરૂપણ :

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$ છે

(નોંધ : સામાન્ય રીતે આ શ્રેણી $f_1 = 1, f_2 = 1,$ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$ લખાય છે.)

દેસાઈ સાહેબે સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 209માં જણાવ્યું એ મુજબ સુવર્ણ ગુણોત્તર $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ એ $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ સમીકરણનું એક બીજ છે.

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 + \lambda$

હવે $\lambda^3 = \lambda \cdot \lambda^2 = \lambda\,(1 + \lambda)$

$= \lambda + \lambda^2 = \lambda + 1 + \lambda = 1 + 2\,\lambda$

$\lambda^4 = \lambda \cdot \lambda^3$

$= \lambda\,(1 + 2\lambda)$

$= \lambda + 2\lambda^2 = \lambda + 2\,(1 + \lambda) = 2 + 3\lambda$

$\lambda^5 = \lambda \cdot \lambda^4$

$= \lambda \cdot (2 + 3\lambda)$

$= 2\lambda + 3\lambda^2 = 2\lambda + 3\,(1 + \lambda)$

$= 3 + 5\lambda$

આ પ્રક્રિયા આગળ વધારતા $\lambda^6 = 5 + 8\lambda$

$\lambda^7 = 8 + 13\lambda\ldots$

એટલે કે $\lambda^2 = 1 + \lambda$

$\lambda^3 = 1 + 2\lambda$

$\lambda^4 = 2 + 3\lambda$

$\lambda^5 = 3 + 5\lambda$

$\lambda^6 = 5 + 8\lambda$

… …

… …

હવે આ બધાં સમીકરણોનું એક સાથે અવલોકન કરતાં જોવા મળે છે કે જમણી બાજુ λના સહગુણકો તથા અચળ સંખ્યાઓ ફિબોનાકી સંખ્યાઓ છે.

તેથી આવા સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ આ રીતે લખી શકાય.

$\lambda^n = f_{n-1} + f_n\lambda$

હવે આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને λ^nનો બીજો સંબંધ તારવીએ.

$\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$

$= (f_{n-2} + f_{n-1}\lambda) + (f_{n-3} + f_{n-2}\lambda)$

$= (f_{n-3} + f_{n-2}) + (f_{n-2} + f_{n-1})\,\lambda$

$= f_{n-1} + f_n\,\lambda = \lambda^n$

એટલે કે $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$

(**તંત્રીનોંધ :** $\lambda^2 = \lambda + 1$ ને λ^{n-2} વડે ગુણતાં આ પરિણામ જ મળે.)

વર્ષ 2004ની તંત્રીનોંધ :

સુવર્ણ ગુણોત્તર અને ફિબોનાકી સંખ્યાઓ વિશેનું વિપુલ સાહિત્ય સુગણિતમ્‌ના જૂના અંકોમાં પ્રગટ થઈ ગયું છે. સુવર્ણ ગુણોત્તર અને ફિબોનાકી સંખ્યાઓની વાત હંમેશાં રસપ્રદ હોય છે. લેખમાંનો કેટલોક ભાગ પ્રગટ થઈ ગયો હોવા છતાં અત્રે ફરી રજૂ કર્યો છે. શ્રી પરેશભાઈ પટેલ M.Sc.ના વિદ્યાર્થી છે અને લેખનકાર્યનો આ પ્રથમ પ્રયત્ન છે. સુવાચ્ય અક્ષરો અને સરળ રજૂઆત માટે તેમને અભિનંદન. સુવર્ણ ગુણોત્તરની સંપૂર્ણ ભૌમિતિક રજૂઆત અને સુવર્ણ ગુણોત્તર દ્વારા નિયમિત પંચકોણ, નિયમિત દશકોણની રચના પણ ખૂબ રસપ્રદ છે. આવી રજૂઆત દર્શાવતા લેખો પણ આવકાર્ય છે.

બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ-4

ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત.
(M) 9898057891

સુગણિતમના સળંગ અંગ 304, 306 અને 309માં અનુક્રમે બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ 123, 1 તથા 6174 વિશે વિગતવાર માહિતી રજૂ કરવામાં આવી હતી. લેખમાળાના આ લેખમાં આવી જ વધુ બે સંખ્યાઓની જાણકારી આપેલ છે.

લેખમાળાના આ ચોથા મણકામાં સર્વપ્રથમ તો બ્લેકહોલ સંખ્યા 1089 વિશે જાણકારી મેળવીએ. ત્રણ અંકોની એવી કોઈ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો જેના પ્રથમ અને છેલ્લા અંક વચ્ચે 2 કે તેથી વધુ તફાવત હોય. (આ શરતની આવશ્યકતાનું કારણ આગળ જણાશે.) આ સંખ્યાના અંકોનો ક્રમ ઉલટાવતાં મળતી સંખ્યાને n' કહો. હવે મોટી સંખ્યામાંથી નાની સંખ્યાને બાદ કરો, એટલે કે $|n - n'|$ મેળવો. ફરીથી સંખ્યા $|n - n'|$ના અંકોને ઉલટાવો અને તેને $|n - n'|$ માં ઉમેરો. આ પ્રક્રિયા કરતાં એવું જોવા મળશે કે સરવાળાનો જવાબ હંમેશા 1089 જ મળે છે !!!

ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે $n = 782$ લઈએ. તો તેના અંકોનો ક્રમ ઉલટાવતાં $n' = 287$ થશે અને $|n - n'| = 782 - 287 = 495$ થશે. હવે 495ને ફરી ઉલટાવીને 594 મેળવીએ. તેને 495માં ઉમેરતાં $495 + 594 = 1089$ મળશે !

અન્ય એક ઉદાહરણ તરીકે $n = 123$ લઈએ તો $n' = 321$ તથા $|n - n'| = 321 - 123 = 198$ થશે. તેના અંકોને ઉલટાવીને 198માં ઉમેરતાં $198 + 891 = 1089$ જ મળશે !

ઉપર દર્શાવેલ પ્રક્રિયા કરતાં હંમેશાં 1089 જ મળે છે. આથી 1089ને બ્લેકહોલ સંખ્યાની કક્ષામાં મૂકી શકાય.

હવે આવું થવાનું કારણ ગાણિતિક રીતે સમજીએ. ધારો કે ત્રણ અંક વાળી પસંદ કરેલ સંખ્યા $n = ABC$ છે, જ્યાં $|A - C'| \geq 2$. સ્પષ્ટ છે કે $n = ABC = 100A + 10B + C$ થાય. હવે તેના અંકોને ઉલટાવતાં,
$n' = CBA = 100C + 10B + A$ મળશે.
ત્યારબાદ $|n - n'| = |ABC - CBA| = (100A + 10B + C) - (100C + 10B + A)|$ મેળવીએ. હવે અહીં એક યુક્તિ કરીએ. ઉપરોક્ત ગણતરીમાં ABCમાંથી 1 સો બાદ કરીએ અને તેની સામે 9 દસ તથા 10 એક ઉમેરીએ. (એટલે કે $-1 \times 100 + 9 \times 10 + 10 \times 1 = 0$) આ પ્રક્રિયાને નીચેના કોષ્ટક દ્વારા સરળતાથી સમજી શકાય.

	શતક	દશક	એકમ
$n =$	A	B	C
$n =$	A – 1	B + 9	C + 10
$n' =$	C	B	A
$n - n' =$	A – 1 – C	9	C + 10 – A

અહીં સોના સ્થાને $A - 1 - C$ આવે છે, જેની કિંમત ઓછામાં ઓછી 1 તો હોવી જ જોઈએ, એટલે કે
$A - 1 - C \geq 1$ થવું જ જોઈએ. આમ, $|A - C| \geq 2$ પસંદ કરવાનું કારણ સ્પષ્ટ થાય છે.

હવે $n - n'$ના અંકોને ઉલટાવી તેને $n - n'$માં ઉમેરીએ.

	શતક	દશક	એક
	A – 1 – C	9	C + 10 – A
+	C + 10 – A	9	A – 1 – C
=	9	18	9
=	10	8	9

આમ ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા બાદ હરહંમેશ 1089 જ મળશે તેનું કારણ સ્પષ્ટ રીતે દૃષ્ટિગોચર થાય છે.

હવે આ લેખના બીજા ભાગમાં એક એવી જાણીતી બ્લેકહોલ સંખ્યાની વાત કરીએ જે સીધી રીતે અંગ્રેજી ભાષા સાથે સંકળાયેલ છે ! કોઈ પણ એક ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો અને તેના અંકોને અંગ્રેજી ભાષામાં લખો. જેમ કે પસંદ કરેલ સંખ્યા $n = 25$ હોય, તો તેને TWENTY FIVE તરીકે લખો. ત્યારબાદ તેની જોડણી (Spelling)માં આવેલ અક્ષરોની સંખ્યાની ગણતરી કરો. ઉપરના ઉદાહરણ માટે TWENTY FIVEના અક્ષરોની સંખ્યા 10 થશે, જેને n' કહીએ. હવે n' પર ઉપર્યુક્ત પ્રક્રિયા કરો અને n'' મેળવો. નવી મળતી સંખ્યાઓ પર આ જ પ્રક્રિયા વારંવાર કરો. થોડાંક પગલાં બાદ એવું જોવામાં આવશે કે કોઈક r માટે હરહંમેશ $n^{(r)} = 4$ મળશે. અને 4ને FOUR તરીકે લખીને તેની જોડણીના અક્ષરોની સંખ્યા ગણીએ તો તે ફરીથી 4 જ થશે, એટલે કે $n^{(r+1)} = n^{(r+2)}$ થશે !! આમ આ પ્રક્રિયા 4 પર આવીને અટકી જાય છે અને ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા માટે 4 બ્લેકહોલ સંખ્યા બને છે.

ઉદાહરણ તરીકે $n = 5$ પસંદ કરીએ. તેને અંગ્રેજીમાં લખતાં FIVE થશે, જેના અક્ષરોની સંખ્યા 4 છે, એટલે $n' = 4$ થશે. ફરીથી આજ પ્રક્રિયા કરતાં $n'' = n''' = ... = 4$ થશે, જે આ પ્રક્રિયા માટે બ્લેકહોલ સંખ્યા છે.

વધુ એક ઉદાહરણ તરીકે $n = 163$ લઈએ. તેને ONE HUNDRED SIXTY THREE તરીકે લખીને તેના અક્ષરોની સંખ્યા ગણતાં $n' = 20$ મળશે. તેને ફરી અંગ્રેજીમાં લખતાં TWENTY મળશે, જેના પરથી $n'' = 6$ થાય છે. આજ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખતાં, $n''' = 3$, $n^{iv} = 5$ અને $n^{v} = 4$ મળે છે. આમ સ્પષ્ટ છે કે આ પ્રક્રિયા કોઈપણ n પર કરીએ, પરંતુ અંતમાં તો કોઈક r માટે $n^{(r)} = 4$ થશે જ.

ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા માટેની બ્લેકહોલ સંખ્યા 4 માટે એક જરૂરી સ્પષ્ટતા કરીએ કે તે અંગ્રેજી ભાષા પર આધારિત બ્લેકહોલ સંખ્યા છે. અન્ય ભાષાઓ માટે ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા માટે બ્લેકહોલ સંખ્યા 4 જ આવે તે જરૂરી નથી. એવું જોવામાં આવ્યું છે કે ઇટાલિયન ભાષા માટે આ સંખ્યા 3 (tre) છે, જ્યારે ડેનિશ ભાષા માટે તે 2,3 અને 4 (to, tre, fire) છે. રસ ધરાવનાર વાચકો ગુજરાતી કે અન્ય ભાષા માટેની આવી સંખ્યા શોધી શકે છે. સુગણિતમ્ તેમના વાચકોને તે માટે આમંત્રણ આપે છે.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 4 વિશેની માહિતી પૂર્ણ કરતાં પહેલા વાચકોને એ જણાવીએ કે આ પ્રકારની સંખ્યાઓ Honest Numbers તરીકે પણ ઓળખાય છે. ઇન્ટરનેટ પર મળતી માહિતી મુજબ Honest સંખ્યાઓને ‘Numbers n that can be described using exactly n letters in standard English’ મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવેલ છે. Honest સંખ્યાઓ વિશે વધુ માહિતી નીચેના સંદર્ભ માંથી મળી રહેશે.

સંદર્ભ : erich-friedman.github.io/mathmagic/1203.html

નોંધ : લેખના પ્રુફ તપાસતાં અમારા ધ્યાનમાં આવ્યું છે કે સરતચૂકથી કેટલીક ક્ષતિઓ રહી ગઈ છે. અત્રે તે ક્ષતિઓ તથા સુધારા નીચે આપેલ છે.

(1) લેખની શરૂઆતમાં ચોથી પંક્તિમાં “જેના પ્રથમ અને છેલ્લા અંક વચ્ચે 2 કે તેથી વધુ તફાવત હોય” તેમ લખ્યું છે. અહીં તફાવત 1 કે તેથી વધુ એટલે કે પહેલો અને છેલ્લો અંક સમાન ન હોય તેમ હોવું જોઈએ.

(2) તે જ પાના પર છેલ્લેથી ત્રીજી પંક્તિમાં

“અહીં સોના સ્થાને A–1–C આવે છે જેની કિંમત ઓછામાં ઓછી 1 હોવી જોઈએ.”

આવું જરૂરી નથી. $A-1-C \geq 0$ જોઈએ. A–C=1 હોઈ શકે. આ સંજોગોમાં પહેલી પ્રક્રિયા પછી $|n - n'| = 099$ આવશે. તેને ઉલટાવતાં 990 મળશે અને તેમનો સરવાળો 1089 થશે.

- **દેવભદ્ર શાહ**

“જીવન મૂલ્યો”નું અંકો દ્વારા મૂલ્યાંકન

માર્ચ-04માં કરમસદ મુકામે સરદાર પટેલ મ્યુઝિયમની મુલાકાત લેવાનું થયું. સરદાર પટેલના જીવન વિષે કેટલાંક પુસ્તકો ખરીદવા માટે ઑફિસમાં ગયો. ઑફિસમાં ટેબલ પરના કાચ નીચે ઝેરોક્ષ કરેલો એક કાગળ હતો. લખાણ અંગ્રેજીમાં હતું. તેનું ગુજરાતી રૂપાંતર અહીં રજૂ કરું છું.

અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો A, B, C, D, E, F, G, ... ,X, Y, Zના ક્રમને તેમનાં શતમાન મૂલ્ય (ટકા) તરીકે ગણો. જેમ કે A=1%, C=3%, G=7%, ..., Z=26%.

હવે નીચેના શબ્દોનાં શતમાન મૂલ્ય (ટકા) તેમના સ્પેલિંગમાં આવતા અક્ષરોનાં શતમાન મૂલ્યોના સરવાળા તરીકે લઈએ.

HARDWORK = (8 +1 + 18 + 4 + 23 + 15 + 18 + 11) % = 98%
KNOWLEDGE = (11 + 14 + 15 + 23 + 12 + 5 + 4 + 7 + 5) % = 96%
LOVE = (12 + 15 + 22 + 5) % = 54%
LUCK = (12 + 21 + 3 + 11) % = 47%

ઉપરોક્ત કોઈપણ શબ્દનું મૂલ્ય 100% નથી. વળી પ્રારબ્ધવાદીઓ માટે નિરાશાજનક છે કારણ કે LUCKનું મૂલ્ય 47% અને પુરુષાર્થવાદીઓ માટે પ્રોત્સાહક છે કારણ કે HARDWORKનું મૂલ્ય 98% છે.

શું MONEY કે LEADERSHIP જેવા શબ્દોનાં મૂલ્યો 100% થશે ? ઉત્તર ‘ના’ છે.

પણ એક શબ્દ એવો મળે છે જેનું અંકમૂલ્ય 100% થાય છે. તે શબ્દ છે

ATTITUDE

દરેક અક્ષરનું શતમાન મૂલ્ય લઈ ખાતરી કરો.

પુસ્તકો આપનાર ભાઈને મેં પૂછ્યું કે આ લખાણ કોણે તૈયાર કર્યું ? તેમનો જવાબ હતો “મને ખબર નથી. ઘણા વખતથી અહીં છે. તમારા જેવા ઘણા માણસોને ગમ્યું છે. જેને ગમે અને માંગે તેમને અમે ઝેરોક્ષ કોપી આપીએ છીએ”. મને પણ આ કાગળની ઝેરોક્ષ કોપી મળી. (સુગણિતમ્ સળંગ અંક 210 માંથી) **– પી.કે. વ્યાસ**

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આચમન-5

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ.
(M) 9925837247

આ લેખમાં આપણે યજ્ઞવેદિઓની રચનાની રીતો સમજવાનો પ્રયત્ન કરીશું. યજ્ઞના પ્રકાર પ્રમાણે યજ્ઞવેદિઓનાં આકાર અને માપ નિશ્ચિત કરવામાં આવ્યાં છે. અહીં ચોરસ વેદિની રચના કરવાની બે રીતો જોઈશું. પ્રથમ રીત "આપસ્તંબ સૂલ્બસૂત્ર"માં અને બીજી રીત "બોધાયન સૂલ્બસૂત્ર"માં વિગતે વર્ણવેલી છે.

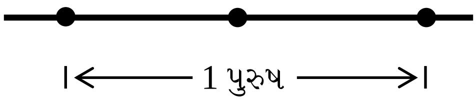
યજ્ઞવેદિનાં લંબાઈ-પહોળાઈનાં માપ માટેનો એકમ "પુરુષ" વર્ણવેલો છે. "એક પુરુષ" લંબાઈ એટલે જે યજમાન હોય તે સમતલ જમીન પર ટટ્ટાર ઊભો રહે અને બંને હાથ ઉપર તરફ સીધા ખેંચેલા રાખે ત્યારે તેના પગથી હાથની વચલી આંગળીના ટેરવા સુધીનું અંતર. આમ યજ્ઞવેદીનું માપ, યજ્ઞ કરનાર ગૃહસ્થની ઊંચાઈ સાથે સંબંધિત છે. યજ્ઞવેદિ તૈયાર કરનાર આ ઊંચાઈના માપથી થોડી વધારે લંબાઈનો વાંસ લે છે.

पुरुषमात्रेण विमिमीते वेणुना विमिमीत इति विज्ञायते ॥ ८.१८ ॥

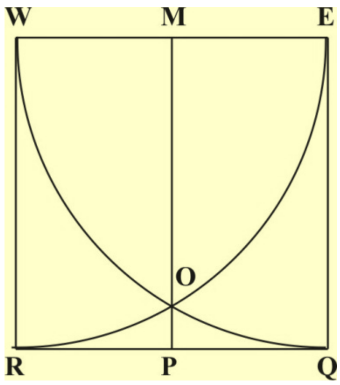
यावान् यजमान उर्ध्वबाहुः तावत् अन्तराले वेणोरिछद्रे

करोति । मध्ये तृतीयम् ॥ ८.१९-२०॥

આ વાંસ (વેણુ) પર "એક પુરુષ" (ઊંચાઈનું માપ) જેટલા અંતરે બે છિદ્ર બનાવે છે અને તે બેની મધ્યમાં (મધ્યબિંદુએ) ત્રીજું છિદ્ર બનાવે છે.



આ વાંસનો ટુકડો વેદિના માપન માટે તૈયાર થયો. હવે યજ્ઞવેદિની રચના કરવાની પદ્ધતિ સમજવા માટે નીચેની આકૃતિ-1 ધ્યાનમાં લો અને તેની નીચેનું લખાણ આકૃતિના સંદર્ભમાં સમજવાનો પ્રયત્ન કરો.



આકૃતિ-1

જે સ્થળે યજ્ઞવેદિ બનાવવાની હોય તેની મધ્યમાં તૈયાર કરેલા 1 પુરુષ લંબાઈના વાંસના ટુકડાને પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં (ઉપરની આકૃતિમાં $\overline{WE}$) ગોઠવો અને બંને છેડા પર અને મધ્યમાં જે છિદ્રો છે તેમાંથી પસાર થાય તે રીતે જમીનમાં ત્રણ શંકુ (ખીલા) W, M, E ઠોકીને સ્થિર કરો. હવે પશ્ચિમનો (W) અને મધ્યનો (M) શંકુ દૂર કરી પૂર્વ (E)ના શંકુને કેન્દ્ર બનાવી WE વાંસને પશ્ચિમથી દક્ષિણ તરફ ફેરવીને જમીન પર વર્તુળાકાર ચાપ બનાવો. હવે તે જ રીતે બીજી વાર પૂર્વનો (E) છેડો છૂટો કરી (W)ને કેન્દ્ર બનાવી જમીન પર વર્તુળાકાર ચાપ બનાવો. હવે ત્રણે શંકુ ઉપાડી લઈ વાંસના એક છેડાને M આગળ શંકુથી સ્થિર કરો અને વાંસને એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી તે બંને ચાપના છેદબિંદુ (O)માંથી પસાર થાય. આ રીતે સ્થિર કર્યા બાદ બીજા છેડા (P) આગળ જમીન પર શંકુ ઠોકી દો. હવે ફરીથી M અને P આગળના શંકુ ઉપાડી લઈ વાંસના મધ્યબિંદુને P આગળ શંકુથી સ્થિર કરો અને વાંસને એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી તે અગાઉની બંને

ચાપોને સ્પર્શતો હોય. આ સ્થિતિમાં બંને છેડા (R) અને (Q)ને શંકુથી સ્થિર કરો. છેલ્લે વાંસ અને શંકુ લઈ લેવાથી જમીન પર મળતાં ચાર બિંદુઓ W, E, Q અને Rને જોડતાં 1 પુરુષવર્ગ ક્ષેત્રફળવાળો ચોરસ મળશે જે જરૂરી વેદિ છે.

ગણતરી : અહીં સૂલ્બસૂત્રકારે સમબાજુ ત્રિકોણ અને ચોરસના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો છે જે નીચેની દલીલોથી સમજી શકાશે.

(1) રચનાની રીત પ્રમાણે જોતાં WE = WO = EO અને આમ ΔWEO સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(2) M, એક બાજુ WEનું મધ્યબિંદુ છે અને O તેની સામેનું શિરોબિંદું છે. ત્રિકોણ સમબાજુ છે આથી OM $\perp$ WE અને તેથી PM $\perp$ WE.

(3) ચોરસમાં એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી તે બાજુને દોરેલો લંબ સામેની બાજુને પણ તેના મધ્યબિંદુ આગળ લંબ હોય.

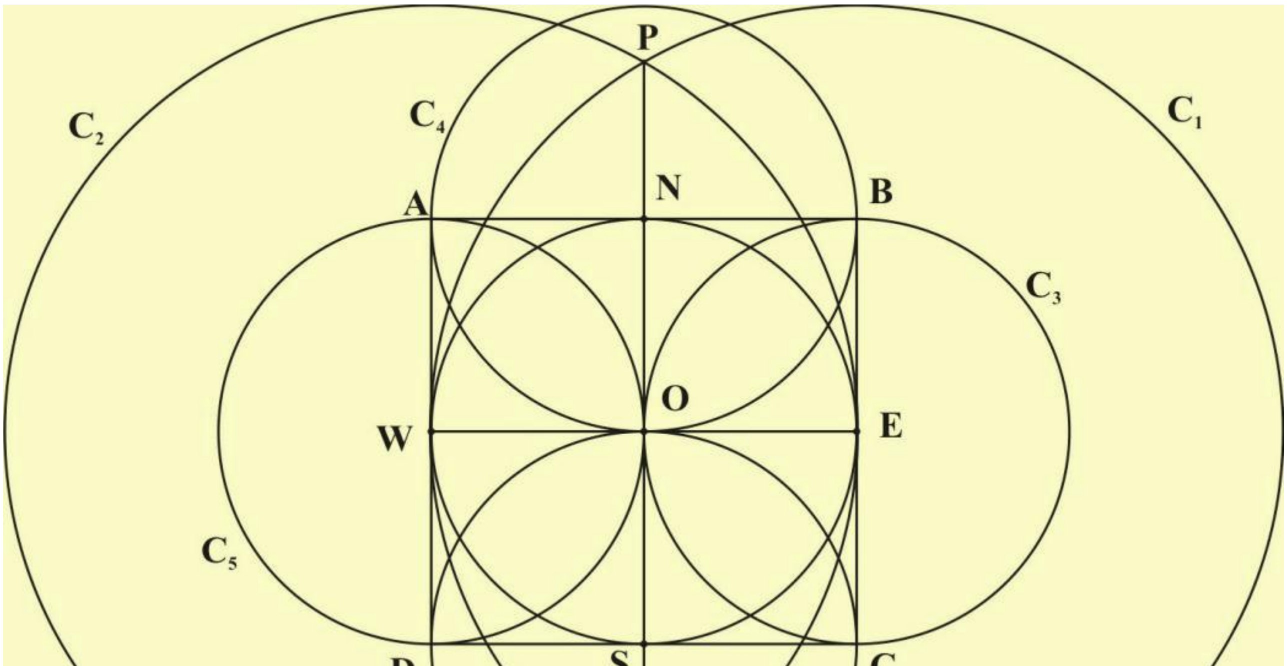
(4) આથી વાંસને જ્યારે P આગળ સ્થિર કરી બંને ચાપને સ્પર્શે એ રીતે તેના છેડાને ગોઠવવામાં આવે ત્યારે PM $\perp$ RQ અને RQ = QE = RW થાય છે.

હવે ચોરસ વેદિની રચના કરવાની બૌધાયન સૂલ્બસૂત્રમાં આપેલ રીત જોઈએ.

બૌધાયનમાં વાંસને બદલે સૂલ્બ (રજ્જુ-દોરી)નો ઉપયોગ દર્શાવ્યો છે.

જેટલી લંબાઈની ચોરસ વેદિ રચવાની છે તેટલી લંબાઈની દોરી લો. તેના બંને છેડે ગાંઠ મારો. બે ગાંઠ વચ્ચેનું અંતર ચોરસની લંબાઈ જેટલું રાખવું. હવે બંને ગાંઠ એકબીજા પર આવે એ રીતે દોરીને વચ્ચેથી વાળો અને જે બિંદુ આગળથી દોરી વળે ત્યાં એક બીજી ગાંઠ વાળો. આ ગાંઠ દોરીનું મધ્યબિંદુ છે.

હવે નીચેની આકૃતિને ધ્યાનમાં રાખીને તેની નીચે વર્ણવેલી રીત સમજવાનો પ્રયત્ન કરો. અગાઉની રીત કરતાં આ રીત વધુ લાંબી અને અટપટી છે.



આકૃતિ-2

જે જગ્યાએ વેદિ બનાવવાની હોય તેની મધ્યમાં પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં દોરીને ખેંચીને મૂકો અને બંને છેડે અને મધ્યમાં શંકુથી જમીનમાં જોડો. હવે જમીન પર નિશાની થઈ ગયા પછી શંકુ અને દોરીને છૂટી કરો અને દોરીના બંને છેડાને ભેગા કરી મધ્યના બિંદુ પર શંકુથી સ્થિર કરો અને દોરીને ખેંચીને મધ્યબિંદુ આગળથી વર્તુળાકારે ફેરવતા જાઓ. આથી જમીન પર O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ બનશે. ફરીથી દોરી અને શંકુને છૂટા કરો. હવે E આગળ દોરીના એક છેડાને શંકુથી બાંધીને દોરી ખેંચેલી રાખીને બીજી ગાંઠ આગળથી ગોળ ફેરવતાં મોટું વર્તુળ (C_1) મળશે. તે જ રીતે W આગળ દોરીને સ્થિર રાખીને બીજું વર્તુળ (C_2) દોરો. આ બંને વર્તુળોનાં છેદબિંદુઓ P અને Q અનુક્રમે ઉત્તર અને દક્ષિણ દિશા દર્શાવે છે. રજ્જુના બંને છેડાની ગાંઠના બહારના ભાગને P અને Q આગળ રાખી અને મધ્યગાંઠ O આગળ આવે તેમ રાખીને છેડાની ગાંઠ આગળ બે શંકુ મૂકો જે N અને S દર્શાવે છે. હવે ફરીથી રજ્જુના બંને છેડાને E આગળ આગળ શંકુથી સ્થિર કરી મધ્યની ગાંઠથી વર્તુળ બનાવો (C_3). તે જ રીતે અનુક્રમે N, W અને S આગળથી વર્તુળો C_4, C_5 અને C_6 દોરો. આ ચાર વર્તુળો C_1, C_2, C_3 અને C_4 ના છેદબિંદુઓ આકૃતિ-2માં બતાવ્યા પ્રમાણે A, B, C અને D હોય તો ABCD જરૂરી ચોરસવેદિ દર્શાવે છે.

આ રચનાની ગાણિતિક સમજૂતી અટપટી છે પણ વાચક જાતે કરી શકશે. બીજી એક વાત ખાસ નોંધીએ. સૂલ્બસૂત્રોમાં વર્ણવેલી આ બધી રીતો, આપણે અત્યારે જે રીતે તાર્કિક સાબિતીઓ સાથે ભૂમિતિનાં પરિણામો શીખીએ કે શીખવીએ છીએ તેની સરખામણીએ ઘણી "અચોક્કસતા"ઓ ધરાવતી લાગે પરંતુ આ ત્યારની રીતો છે જ્યારે ભૂમિતિનું તર્કસંગત માળખું નહોતું, માત્ર વ્યાવહારિક ભૂમિતિ હતી.

હવે પછીના લેખમાં પણ સૂલ્બસૂત્રોમાંથી જ અન્ય રચનાઓ વિશે જોઈશું.

ગણિત કણિકા

કોઈપણ ચાર ક્રમિક ફિબોનાકી સંખ્યાઓ a, b, c, d માટે $(ad)^2 + (2bc)^2 = (cd - ab)^2$ થશે.

એટલે કે $(ad, 2bc, cd - ab)$ એ પાયથાગોરીય ત્રિપુટી થશે.

ફિબોનાકી સંખ્યાઓ 3, 5, 8, 13 માટે $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$ અને $d = 13$ છે. $ad = 39$, $2bc = 80$,

$cd - ab = 104 - 15 = 89$ અને

$39^2 + 80^2 = 89^2$

$(1521 + 6400 = 7921)$

ક્રમિક ફિબોનાકી સંખ્યાઓ : $a = 8$, $b = 13$, $c = 21$ અને $d = 34$ લઈ ઉપરોક્ત પરિણામ ફરી ચકાસો.

કોઈ વાચક ઉપરોક્ત પરિણામની વ્યાપક સાબિતી આપશે?

પ્રસ્તુતકર્તા : નિલેશ માંડલિયા, અમદાવાદ.
(M) 97123 46664

મુખપૃષ્ઠ પરનો ગણિતજ્ઞ :

આબેલ પુરસ્કાર વિજેતા : લુઈસ એન્જલ કેફેરેલી

(Luis Angel Caffarelli)

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, VNSGU, સુરત. (M) 9974230088

ગણિતના નોબેલ પુરસ્કાર તરીકે જાણીતો પ્રખ્યાત 'આબેલ પુરસ્કાર' આ વર્ષે ગણિતશાસ્ત્રના 'મેસ્સી' ગણાતા દક્ષિણ અમેરિકા (આર્જેન્ટિના)ના લુઈસ એ. કેફેરેલીને પ્રદાન થયો છે. 'મુખપૃષ્ઠ પરનો ગણિતજ્ઞ' લેખશ્રેણી હેઠળ આ વખતે આપણે Partial Differential Equations ક્ષેત્રમાં ગ્રાઉન્ડબ્રેકિંગ કામ કરનાર ખ્યાતનામ ગણિતજ્ઞ કેફેરેલીનાં જીવન અને કાર્યોની વિસ્તૃત જાણકારી મેળવીશુ. એવું ઘણે અંશે સર્વસ્વીકૃત છે કે Partial Differential Equationsની સમજમાં બીજા કોઈ જીવિત ગણિતશાસ્ત્રીએ કેફેરેલી જેટલું યોગદાન આપ્યું નથી.

દક્ષિણ અમેરિકામાંથી આબેલ પુરસ્કાર મેળવનાર પ્રથમ ગણિતશાસ્ત્રી એવા લુઈસ એ. કેફેરેલીનો જન્મ 8 ડિસેમ્બર, 1948ના રોજ આર્જેન્ટિનાની રાજધાની બ્યુનોસ એરેસમાં થયો હતો. 1968માં બ્યુનોસ એરેસ યુનિવર્સિટીમાંથી અનુસ્નાતકની પદવી અને 1972માં ત્યાંથી જ Ph.D.ની પદવી મેળવ્યા બાદ 1973માં મિનેસોટા યુનિવર્સિટીમાં તેઓ પોસ્ટડૉક્ટરલ ફેલોશીપ માટે જોડાયાં, જ્યાં તેમણે 1983 સુધી કામ કર્યું. કેફેરેલી પોતે માને છે કે તેમના સંશોધનના શરૂઆતના સમયમાં મિનેસોટાના તેમના સાથીદારોનું માર્ગદર્શન તેમને ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડ્યું છે.

કેફેરેલી મિનેસોટા યુનિવર્સિટીમાં 1983 સુધી રહ્યા. પરંતુ તેમણે બે વર્ષ, 1980 થી 82, કોરન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં પ્રોફેસર તરીકે વિતાવ્યાં હતાં. આ જગ્યાએ તેમની સંશોધન રુચિમાં પરિવર્તન આવ્યું. અહીં તેમણે લૂઈસ નિરેનબર્ગના સહયોગથી 'Fluid Dynamics and Fully Non-linear Equations' પર કામ કર્યું. 1982માં જ તેમને Scuola Normale Superiore di Pisa દ્વારા 'Guido Stampacchia' પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યું.

1983માં તેમની શિકાગો યુનિવર્સિટીમાં પ્રોફેસર તરીકે નિમણૂક કરવામાં આવી. જે પદ તેમણે ત્રણ વર્ષ સુધી સંભાળ્યું. 1984માં તેમને અમેરિકન મૅથેમેટિકલ સોસાયટી દ્વારા બોચર પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યો. આ પ્રતિષ્ઠિત પુરસ્કાર તેમને Nonlinear Partial Differential Equationsના ઊંડા અને મૂળભૂત કાર્ય માટે આપવામાં આવ્યો હતો.

1986માં કેફેરેલીએ શિકાગો છોડ્યું અને પ્રિન્સ્ટનમાં ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ફોર એડવાન્સ સ્ટડીઝમાં પ્રોફેસર તરીકે જોડાયાં. 1988માં પોપ જ્હોન પોલ II દ્વારા તેમને પોન્ટીફીકલ એકેડેમી ઓફ સાયન્સીસનો 'Pius XI gold Medal' આપવામાં આવ્યો.

દસ વર્ષ પ્રિન્સ્ટન ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં કામ કર્યા બાદ તેઓ ત્રણ વર્ષ માટે ન્યૂયોર્ક યુનિવર્સિટી સાથે જોડાયેલી Courant સંસ્થામાં પ્રોફેસર તરીકે જોડાયા. અંતે 1997થી તેઓ ઓસ્ટિન ખાતે યુનિવર્સિટી ઑફ ટેક્સાસમાં સિડ ડબલ્યુ રિચાર્ડસન ફાઉન્ડેશન રીજન્ટ્સ ચેર પર જોડાયા, જ્યાં તેઓ હમણાં કાર્યરત છે. આ સમગ્ર સમયગાળા દરમિયાન પુરસ્કારો દ્વારા તેમના સંશોધન યોગદાનની ઉચ્ચ ગુણવત્તાને સ્વીકારવાનું જગતભરમાં ચાલુ રહ્યું.

2003માં આર્જેન્ટીનાના કોનેક્સ ફાઉન્ડેશને તેમને છેલ્લા દાયકામાં તેમના દેશના સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ વૈજ્ઞાનિક તરીકે 'ડાયમંડ કોનેક્સ ઍવૉર્ડ' આપ્યો, જે આર્જેન્ટિનાનાં સૌથી પ્રતિષ્ઠિત પુરસ્કારોમાંનો એક છે.

Theory of Non-linear Partial Differential Equationsમાં તેમના મહત્ત્વપૂર્ણ યોગદાન બદલ 2005માં તેમને રોયલ સ્વીડિશ એકેડેમી ઑફ સાયન્સનો પ્રતિષ્ઠિત 'રોલ્ફશોક પુરસ્કાર' એનાયત થયું. 2009ની

સાલમાં તેમને ગણિતની આજીવન સિદ્ધિ માટે લેરોય પી. સ્ટીલ પુરસ્કાર એનાયત થયું. અમેરિકન મૅથૅમેટિકલ સોસાયટી દ્વારા આપવામાં આવતું આ લાઈફટાઈમ એચીવમેન્ટ પુરસ્કાર એવા ગણિતજ્ઞને પ્રદાન કરવામાં આવે છે કે જેમણે ઉચ્ચ સ્તરના સંશોધન દ્વારા જે-તે ક્ષેત્રના વિકાસમાં વિશેષ પ્રભાવ પાડ્યો હોય અને કેફેરેલીનું Partial Differential Equations પરનું કામ ચોક્કસપણે તેમને આ સન્માનને લાયક બનાવે છે.

2012માં તેમને માઈકલ એશબેકર સાથે સંયુક્ત રીતે અતિપ્રતિષ્ઠિત વુલ્ફ પ્રાઈઝ એનાયત થયું. વુલ્ફ ફાઉન્ડેશન દ્વારા જ્યારે તેમને આ પ્રાઈઝ એનાયત થયું ત્યારે તેમની અગણિત ગાણિતિક સિદ્ધિઓ સાથે એ વાત પર ભાર મૂકવામાં આવ્યો કે કેફેરેલી Partial Differential Equestionsના ઉકેલોની નિયમિતતા પર વિશ્વના અગ્રણી નિષ્ણાત છે. 2012ના વર્ષમાં જ તેઓ અમેરિકન મૅથૅમેટિકલ સોસાયટીના ફેલો બન્યા. જે સન્માન એવા ગણિતજ્ઞને મળે છે જેમણે ગણિતનાં સર્જન, પ્રદર્શન, ઉત્નતિ, સંચાર અને ઉપયોગ માટે ઉત્કૃષ્ટ યોગદાન આપ્યું હોય.

2018માં કેફેરેલીને તેમના Regularity theory of non-linear partial differential equestions, free boundary problems, fully non-linear equations અને nonlocal diffusionsમાં મુખ્ય યોગદાન માટે SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) ફેલો તરીકે નિયુક્ત કરવામાં આવ્યા. એ જ વર્ષે તેમને ગણિતમાં હોંગકોંગના Shaw Foundation દ્વારા આપવામાં આવતું Shaw Prize એનાયત થયું, જે તેમના Partial Differential Equationsના ગ્રાઉન્ડબ્રેકિંગ કામને બિરદાવતું હતું. આ ઈનામ US $ 1.2 મિલિયનના નાણાંકીય મૂલ્ય સાથે વિશ્વમાં ગણિતના સૌથી મોટાં ઈનામોમાંનું એક છે.

2023માં તેમને પ્રતિષ્ઠિત અબેલ પુરસ્કાર એનાયત થયું જે ગણિતમાં તેમની જીવનભરની સિદ્ધિઓને માન્યતા આપે છે. આબેલ અવતરણ જણાવે છે કે 'કેફેરેલીએ વિશાળ એપ્લિકેશનો સાથે Partial Differential Equationsના વર્ગોની અમારી સમજને ધરમૂળથી બદલી નાંખતું ground breaking કામ કર્યું છે. તેમની પાસે બુધ્ધિશાળી વિશ્લેષણાત્મક પધ્ધતિઓ સાથે તેજસ્વી ભૌમિતિક આંતરદષ્ટિનું સંયોજન છે અને તે ક્ષેત્ર પર પ્રચંડ અસર કરે છે.'

એક ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે કેફેરેલી અસાધારણ રીતે પ્રતિભાશાળી છે. તેમણે 320થી વધુ સંશોધન પત્રો પ્રકાશિત કર્યાં છે અને હજુ પણ આ પ્રકાશનનું કાર્ય તેમણે ચાલું રાખ્યું છે. તેમણે 130થી વધુ લોકો સાથે સહયોગી કાર્ય કર્યું છે અને 30થી વધુ Ph.D. વિદ્યાર્થીઓના માર્ગદર્શક રહ્યા છે.

2018માં તેમના સહયોગીઓમાં પ્રમાણમાં યુવાન એવા એલેસિયો ફિગલ્લીને ગણિતનો અતિ જાણીતો ફિલ્ડ્સ મેડલ એનાયત થયો.

કેફેરેલીએ આર્જેન્ટિનાની ગણિતશાસ્ત્રી ઈરેન માર્ટિનેઝ ગામ્બા સાથે લગ્ન કર્યાં છે. જેઓ ઑસ્ટિન ખાતે યુનિવર્સિટી ઓફ ટેક્સાસમાં કંમ્પ્યૂટેશનલ એન્જિનિયરિંગ અને સાયન્સના પ્રોફેસર છે. તેમને ત્રણ પુત્રો એલેજાન્ડ્રો, નિકોલસ અને મૌરો છે.

કેફેરેલી માને છે કે વર્ષોથી તેમને અદ્‌ભુત સંસ્થાઓ તથા અસાધારણ વૈજ્ઞાનિકો સાથે સંબંધ રહ્યો છે તથા ખૂબ જ પ્રતિભાશાળી યુવાનોને માર્ગદર્શન આપવા માટે તક મળી છે. આ બધાથી તેમને સંશોધનના નવા વિચારો અને ઉત્સાહ સતત મળતા રહ્યા છે.

કેફેરેલીને ગણિતને લગતા નવીન વિચારો માટે ગણિત જગત હંમેશાં પ્રેરિત કરતું રહે અને તેનો ફાયદો ગણિતની, આ જ નહિ, આગળની દરેક પેઢીને મળે એવી આપણા સૌની પ્રભુને પ્રાર્થના.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

પ્રિન્સિપિયાનો ઇતિહાસ

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
શેરથા
(M) 9428019042

બ્રિટનમાં વૈજ્ઞાનિક વિચારોનો પ્રચાર કરવા માટે રૉયલ સોસાયટી (Royal Society) ન્યૂટનના જમાનામાં ખૂબ જ અગત્યનો ભાગ ભજવતી. વ્યસ્ત-વર્ગનો (Inverse-Square) સંબંધ પ્રકાશના પ્રસરણમાં અને લોહચુંબકની કાર્યવાહી (action)માં જોવા મળેલો. આથી ઘણા લોકો, જેવા કે રેન (Wren) અને હેલી (Halley), પણ એમ માનતા થયેલા કે વ્યસ્ત-વર્ગનો સંબંધ અવકાશી પદાર્થો (Celestial Bodies) વચ્ચે પણ હોય. જાન્યુઆરી 1684માં લંડનમાં રૉયલ સોસાયટીની સભામાં રેન, હુક (Hooke) અને હેલીએ જે કોઈ વ્યસ્ત-વર્ગના બળના નિયમથી ગતિમાં રહેલા પદાર્થની ભ્રમણકક્ષા કેપ્લરના (Kepler) જણાવ્યા પ્રમાણે મેળવે તેને રૉયલ સોસાયટી તરફથી ઇનામ આપવાનું નક્કી કર્યું. પણ કોઈ એવી ભ્રમણકક્ષા લઈને ન આવ્યું.

ઑગસ્ટ 1684માં ઑક્સફર્ડ યુનિવર્સિટીના અધ્યાપક એડમન્ડ હેલી (Edmond Halley) તેમનો પ્રશ્ન લઈને, ન્યૂટનની પાસેથી જવાબ મળશે તે આશયે, ન્યૂટનને મળવા કેમ્બ્રીજ ગયા. ન્યૂટને જણાવ્યું કે થોડાંક વર્ષો પહેલાં તેમણે સાબિત કરી બતાવેલું કે તે ભ્રમણકક્ષા ઉપવલયી છે. હેલી આ જવાબ સાંભળીને ખૂબ જ ખુશ થયા અને આની સાબિતી જોવા ખૂબ જ અધીરા બની ગયેલા.

ન્યૂટને આની સાબિતી શોધી કાઢવા ખૂબ જ પ્રયત્ન કર્યો, પણ ઘણા બધા કાગળોમાંથી તે સમયે તેની સાબિતી શોધી ન શક્યા. ન્યૂટને હેલીને વચન આપ્યું કે તે ફરીથી બધું ગણીને તેમને મોકલી આપશે. તેમણે વચન આપેલું હોઈને ગણવાનું શરૂ કર્યું, પણ જે ભ્રમણકક્ષા પહેલાં મળેલી, તે મળતી ન હતી. આથી બીજી રીતે ગણતાં અગાઉનાં પરિણામો મળ્યાં. ફરીથી પહેલી રીતે ધ્યાન રાખીને ગણતાં અગાઉનાં પરિણામો મળ્યાં. બન્ને રીતથી સરખાં પરિણામો મળ્યાં. ન્યૂટને નવેમ્બર 1684માં નવેસરથી ગણેલાં પ્રમેયો અને પરિણામો ડૉ. એડવર્ડ પેગીટ (Edward Paget) સાથે હેલીને આપતાં મોકલી આપ્યાં. જે ન્યૂટને મોકલી આપ્યું. તેમાં ત્રણ વ્યાખ્યાઓ, અગિયાર પ્રમેયો, ચાર (Hypothesis) હાઈપોથીસિસ અને બે ઉપપ્રમેયો છે. આને (The motion of Revolving Bodies) પરિભ્રમણ કરતા પદાર્થની ગતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જ્યારે ન્યૂટને આ લેટિનમાં લખવાનું શરૂ કર્યું ત્યારે તેમનો ઉત્સાહ ખૂબ જ હતો અને ખરેખર મિજાજથી લખેલું. હેલીએ આ બધાં પ્રમેયો જોયાં અને જોઈને ખૂબ જ પ્રભાવિત થયા. નવેમ્બર માસમાં ન્યૂટનને ફરીથી મળવા આવ્યા. હેલીએ ન્યૂટનને આ બધાં પરિણામો લખીને પુસ્તક સ્વરૂપે પ્રસિદ્ધ કરવા વિનંતી કરી, પણ ન્યૂટને ના પાડી. હેલીએ બધો જ ખર્ચ આપવાની તૈયારી બતાવી. આખરે ન્યૂટન તૈયાર થયા.

ન્યૂટને તેમનાં ખગોળશાસ્ત્ર અને ગતિ વિજ્ઞાન સંશોધનોનાં પરિણામો કોઈએ ન કરી હોય તેવી સતત અને સખત મહેનત કરીને Philosophiae Naturalis Principia Mathematicaમાં (Mathematical Principles of Natural Sciences) આપ્યાં. આને ટૂંકમાં પ્રિન્સિપિયા (Principia) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમણે તેમના શરીરની જરાયે કાળજી રાખ્યા વગર લખ્યું. તેમના શરીરને ખાવાનું અને ઊંઘવાનું જોઈએ તે પણ ભૂલી ગયા. પ્લેગનાં વર્ષોમાં જે તેમનો જુસ્સો હતો, તે જુસ્સો આ પુસ્તક લખવામાં હતો. ઊભા

ઊભા રૂમમાં જ થોડુંક ખાતા. તેમજ ઊભા ઊભા તેમના મેજ ઉપર લખતા. જો એ બહાર જવાની હિંમત કરતા તો એવું લાગતું કે તે ખોવાઈ ગયા છે. અસ્થિર હોય તે રીતે ચાલતા. કોઈપણ કારણ વગર ઊભા રહેતા અને તેમની રૂમમાં પાછા આવી જતા. તેમની આસપાસ હસ્તલિખિત પોથીનાં હજારો પાનાં પડેલાં એમાં ઘણાંએ ચાર દાયકા પહેલાનાં તારીખ વગરનાં. ન્યૂટને આ રીતે કોઈ દિવસ લખ્યું નથી. એક જ આશયથી લખતા કલાકોના કલાકો ખાવાની કે ઊંઘવાની પરવા કર્યા વગર શ્રેષ્ઠ કૃતિ (Materpiece) લખીને 1686માં રૉયલ સોસાયટીને સોંપી.

આઈઝેક ન્યૂટનના લખેલા પુસ્તકનું શીર્ષક "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica અંગ્રેજીમાં Mathematical Principles of Natural Philosophy" છે. આ પુસ્તક લેટિન ભાષામાં લખાયેલું છે અને ઇ.સ. 1687માં પ્રસિદ્ધ થયું. ટૂંકમાં પ્રિન્સિપિયા (Principia) તરીકે ઓળખાય છે અને તેનું અંગ્રેજી "Principles" થાય છે. આ પુસ્તક ફક્ત બે વર્ષમાં લખાયું છે અને તેમાં હકીકતે ત્રણ પુસ્તકોનો સમુહ છે.

પ્રિન્સિપિયા ભાતભાતનાં બળોના કારણે પદાર્થની થતી ગતિનું વર્ણન પણ ગણી શકાય. પ્રિન્સિપિયાના પુસ્તક Iમાં બળો અને અવરોધ વગરના વાતાવરણમાં ગતિનો અભ્યાસ છે. જ્યારે પુસ્તક IIમાં અવરોધ કરતા વાતાવરણમાં ગતિનો અભ્યાસ, લોલકનો અભ્યાસ, મોજાંઓ અને વમળોના ભૌતિકશાસ્ત્રનો અભ્યાસ આપ્યો છે. સૌથી પહેલાં ન્યૂટને પુસ્તક III ઘણા બધા સમજી શકે તે રીતે લખેલું, પણ પછી ન્યૂટને મન બદલીને અગાઉ તર્કસંગત યંત્રવિજ્ઞાનનો (Rational Mechanics) અભ્યાસ કર્યા વગર વાંચી ન શકે તે સ્વરૂપમાં લખ્યું છે. ન્યૂટનનો આખરી આશય અગાઉનાં પુસ્તક I અને IIમાં વિકસાવેલા ગણિતનાં પરિણામો વાપરીને વિશ્વની પધ્ધતિને બરાબર સમજવાનો છે, જે તેમણે પુસ્તક IIIમાં કર્યું છે. પુસ્તક IIIની શરૂઆતમાં વિજ્ઞાનના તત્ત્વજ્ઞાનની અનોખી ચર્ચા કરી છે. આ પાયામાંથી ન્યૂટને વિશ્વવ્યાપી ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ મેળવ્યો છે અને ભરતી અને પૂંછડિયા તારાની (Comet) ભ્રમણકક્ષા મેળવી છે. ન્યૂટને આ પુસ્તકમાં ધ્યાન ખેંચે તેવી ઘણી આંતરદૃષ્ટિ (Insights) આપી છે અને તેની સાબિતીની રૂપરેખા પણ આપી છે, જેમ કે

(1) ગતિ અને સંભવિત ઊર્જાઓના સંરક્ષણની સમકક્ષ વિચારિકા (Conceptual)

(2) કોઈપણ જાતના બળના નિયમથી ચાલતા પદાર્થની ભ્રમણકક્ષાની સામાન્ય અભિવ્યક્તિ (Exprerssion)

(3) કોઈપણ જાતના બળ નીચે રહેલા બે ગોળાઓ વચ્ચેના આકર્ષણ બળનું સૂત્ર

(4) ગુણાત્મક દલીલો (Qualitative Arguments) અથવા અંદાજે (aproximation) એકબીજાને આકર્ષતા ઘણા બધા પદાર્થોની ગતિ

(5) લોલકની ગતિ

(6) પાણીમાં મોજાની મુસાફરી

(7) પ્રવાહીની ગતિ

(8) ચંદ્રના ધ્રૂવ (Nodes)ની ગતિ

(9) ભરતીની સમજ

(10) પૃથ્વીની ધરીનું

(11) પૂંછડિયા તારાની ભ્રમણકક્ષા મેળવવાના નિયમો

આવા બધા વિચારોના મોટા ઢગલામાં હીરો પડ્યો છે અને તે વિશ્વવ્યાપી ગુરુત્વાકર્ષણનો (Universal Gravitation) નિયમ અને તેનો ઉપયોગ કરીને ગ્રહોની ભ્રમણકક્ષા ઉપવલયી (Eliptical) છે તે બતાવવાનું મુખ્ય કામ પ્રિન્સિપિયાનું છે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

પાપસનું પ્રમેય (Pappus-Theorem)

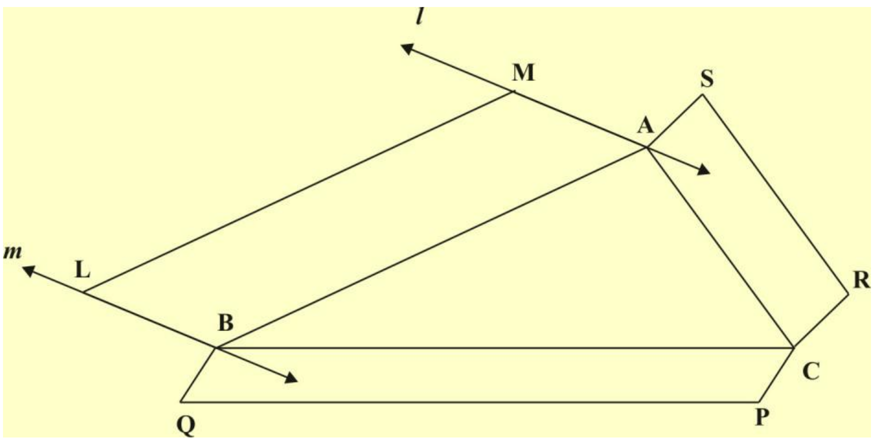
પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784 Email : vyaspk123@gmail.com

પાપસનું પ્રમેય – આ શબ્દો વાંચતાં જ પ્રશ્ન ઊભો થાય કે પાપસનું કયું પ્રમેય ? ચોથી સદીના ગ્રીક ભૂમિતિવિદ પાપસના નામે ભૂમિતિનાં અનેક પરિણામો જાણીતાં છે. મિસરના એલેક્ઝાન્ડ્રિયાનો પાપસ (Pappus of Alexandria) એ યુક્લિડ પછીનો બીજા ક્રમનો વિખ્યાત ભૂમિતિવિદ્ છે. તેણે આઠ ગ્રંથોમાં ભૌમિતિક પરિણામોનો સંગ્રહ પ્રગટ કર્યો હતો. મિસર પર આરબોના આક્રમણ પછી એલેક્ઝાન્ડ્રિયાના ગ્રંથાલયનો નાશ થયો. પાપસના આઠ ગ્રંથોમાંથી પહેલો અને છેલ્લો ગ્રંથ સંપૂર્ણપણે બળીને ખાખ થઈ ગયા. બીજો ગ્રંથ પણ અર્ધો જ બચ્યો હતો. બાકીના ગ્રંથો બચ્યા. તેમાંથી પાપસે જાતે મેળવલાં ઘણાંબધાં ભૌમિતિક પરિણામો મળ્યાં છે જે પાપસનાં પ્રમેય તરીકે જાણીતાં છે. અહીં આપણે જે પ્રમેયની વાત કરવાના છીએ તે પ્રમેય પાયથાગોરાસ-પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ (Generalised Pythagorian Proposition) તરીકે જાણીતું છે.

પાયથાગોરાસ-પ્રમેયમાં આપણે સાબિત કરીએ છીએ કે કાટકોણ ત્રિકોણની કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓ પરના ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો તે ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ (કર્ણ) પરના ચોરસના ક્ષેત્રફળ જેટલો થાય.

હવે આપણે પાપસના પ્રમેય ઉપર આવીએ. કોઈપણ ત્રિકોણ દોરો. તેની કોઈપણ બે બાજુઓ પર, ત્રિકોણની બહાર, યાદચ્છિક રીતે સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણો દોરો. આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું ક્ષેત્રફળ થાય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ પર રચી શકાય. (એક સ.બા.ચ.કો. મળે તો અસંખ્ય સમક્ષેત્ર સ.બા.ચ.કો. મળે.)

આ જ વાત આપણે આકૃતિના સંદર્ભમાં કરીએ. આપણે આકૃતિ-1માં ΔABC દોર્યો છે. આ ત્રિકોણની પસંદગી પર કોઈ પ્રતિબંધો નથી. ત્રિકોણ સમબાજુ, સમદ્વિબાજુ કે વિષમબાજુ હોઈ શકે. તે લઘુકોણ ત્રિકોણ, કાટખૂણ ત્રિકોણ કે ગુરુકોણ ત્રિકોણ પણ હોઈ શકે. આકૃતિ-1માં આપણે વિષમબાજુ ગુરુકોણ ત્રિકોણ દોર્યો છે. હવે આ ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજુ પસંદ કરવાની છે. ΔABC માં $\angle A$ ગુરુકોણ છે. તેથી BC સૌથી વધુ લંબાઈની બાજુ છે. આપણે BC અને AC પસંદ કરીએ. પાયથાગોરાસ પ્રમેયમાં તો બે નાની લંબાઈની બાજુઓ પરના ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવાનો છે. પાપસના પ્રમેયમાં કોઈપણ બે બાજુ પરના યથેચ્છ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવાનો છે. આપણે પસંદ કરેલી બે બાજુઓ BC અને AC પર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો અનુક્રમે BCPQ અને ACRS દોર્યા છે. આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં માપ યાદચ્છિક છે.



આકૃતિ-1

□^{m} BCPQ અને □^{m} ACRS માં BC અને AC નિશ્ચિત છે. CP, CR, ∠BCP, ∠ACRનાં માપ આપણી મરજી પ્રમાણે પસંદ કરી શકાય. પાપસનું પ્રમેય એમ કહે છે કે આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા જેટલા ક્ષેત્રફળવાળો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ રચી શકાય જેની એક બાજુ AB હોય.

ધારોકે આવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABLM છે. આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં AB, LMનાં માપ તો નિશ્ચિત છે. AM (=BL) અને ∠BAMની રચના કેવી રીતે કરવી?

આપણે □^{m} ABLMની રચના કેમ કરવી તે જોઈએ.

રચના :

(1) રેખાઓ SR અને PQનું છેદબિંદુ મેળવો અને તેને X નામ આપો.

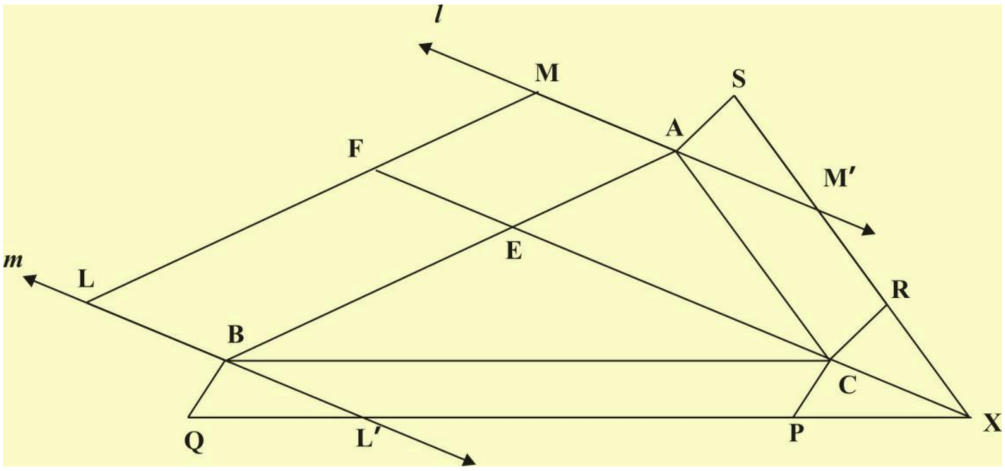
(2) રેખાખંડ CX રચો.

(3) A અને B માંથી CXને સમાંતર રેખાઓ અનુક્રમે *l* અને *m* દોરો.

(4) *l* અને *m* પર આકૃતિ-2માં બતાવ્યા પ્રમાણે અનુક્રમે બિંદુઓ M અને L મેળવો કે જેથી AM = CX = BL થાય.

(5) LM રચો

આમ AM = BL (=CX) અને AM ∥ BL ∥ CX હોવાથી □ABLM સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ-2

હવે એ સાબિત કરીએ કે □^{m}ABLMનું ક્ષેત્રફળ એ □^{m} BCPQ અને □^{m} ACRSનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા જેટલું છે.

સાબિતી : રેખાઓ RS અને QPનું છેદબિંદુ આકૃતિમાં X વડે દર્શાવ્યું છે. રેખા CX એ AB અને LM ને જ્યાં છેદે ત્યાં અનુક્રમે બિંદુઓ E અને F લો. દેખીતી રીતે જ AMFE અને BLFE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

રેખા *l* રેખા PR ને જ્યાં છેદે ત્યાં બિંદુ M′ લો. રેખા *m* રેખા PQ ને જ્યાં છેદે ત્યાં બિંદુ L′ લો.

l અને *m* CXને સમાંતર દોરેલી રેખાઓ છે.

∴ AM′ ∥ CX અને AC ∥ SR ∴ AC ∥ M′X

∴ AC XM′ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ AM′ = CX અને AM = CX (રચનાથી) ∴ AM′ = AM .... (1)

□^{m}ACRS અને □^{m}ACXM′ સમક્ષેત્ર છે. .... (2)

(કારણ કે AC ∥ RS અને RS પર જ બિંદુઓ X અને M′ આવેલાં છે.)

□^{m}AMFE અને □^{m}ACXM′ સમક્ષેત્ર છે. .... (3)

(કારણ કે MA ∥ AM′ રેખા MM′ ∥ CX અને રેખા CX પર જ E, F આવેલાં છે; CX = EF = AM = AM′)

∴ (2) અને (3) પરથી □^{m}ACRSનું ક્ષેત્રફળ = □^{m}AMFEનું ક્ષેત્રફળ

તેજ પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે

□^{m}BCPQનું ક્ષેત્રફળ = □^{m}BLFEનું ક્ષેત્રફળ .... (4)

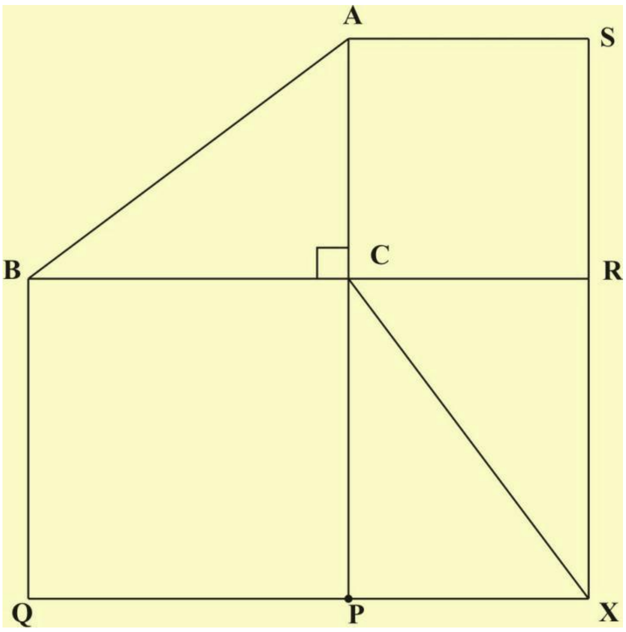
∴ □^{m}ACRSનું ક્ષેત્રફળ + □^{m}BCPQનું ક્ષેત્રફળ = □^{m}AMFEનું ક્ષેત્રફળ + □^{m}BLFEનું ક્ષેત્રફળ

= □^{m}ABLMનું ક્ષેત્રફળ

આમ પાપસનું પ્રમેય સાબિત થયું.

આપણે જોયું કે પાપસના પ્રમેયમાં ΔABC યાદચ્છિક લીધો છે. ΔABCની બે બાજુઓ યાદચ્છિક પસંદ કરી તેના પર સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણો પણ યાદચ્છિક માપના દોર્યા છે.

પાપસના પ્રમેય પરથી પાયથાગોરાસ પ્રમેય મેળવવા માટે આપણે ΔABC કાટખૂણ ત્રિકોણ લઈએ. ΔABCની બાજુઓ યાદચ્છિક પસંદ ન કરતાં કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓ પસંદ કરીએ. ચોરસ પણ સમબાજુ ચતુષ્કોણનો જ એક પ્રકાર છે ને ? કાટખૂણ ત્રિકોણની કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓ પર ચોરસ દોરીએ. આમ કર્યા પછી પાપસના પ્રમેય પ્રમાણે જ રચના કરીએ. ધારો કે ΔABCમાં ∠C કાટખૂણો છે. AC અને BC કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓ છે. AC અને BC પર અનુક્રમે ચોરસ ACRS અને BCPQ દોરેલા છે. હવે પાપસ-પ્રમેયની રચના મુજબ આપણે રેખાઓ PQ અને RSનું છેદબિંદુ X લેવાનું છે.



આકૃતિ-3

હવે આગળ શું કરવું તે સ્પષ્ટ છે. તમે CX = AB અને CX ⊥AB સાબિત કરો એટલે પાયથાગોરાસ પ્રમેયની સાબિતી બે ત્રણ પગથિયાંમાં મળી જશે. (AB પરનો ABLM ચોરસ દોરવો. રેખા XC, ABને જ્યાં છેદે ત્યાં બિંદુ E લેવું અને LMને જ્યાં છેદે ત્યાં બિંદુ F લેવું વગેરે બધું વાચકો પર છોડી દઉં છું.)

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

પુનશ્ચ કાપરેકર અચળાંક

શ્રીમતી નીતા સંઘવી
આચાર્યા, બ્રાઈટ સ્કૂલ,
(M) 8320576754

સળંગ અંક-309માં 'કાપરેકરના જાદુઈ અચળાંક 6174 વિષે થોડું વિશેષ' આ લેખ વાંચ્યો. લેખના અનુસંધાને કેટલીક નોંધ તથા કેટલાક નવા મુદ્દા વાચકોના ધ્યાને લાવવાના હેતુસર આ લેખ લખ્યો છે.

નોંધ : 1 : મુદ્રણદોષ :

(1) પાના નં.-19 પર છેલ્લેથી બીજી લાઈનમાં $6174 = 7^3 \times 3^2 \times 2^2 \times 10^0$ દર્શાવેલ છે. જ્યાં 2^2 ને સ્થાને 2^1 હોવું જોઈએ.

(2) પાના નં.-21 પર ગણતરી પૂરી થયા બાદના ફકરામાં ત્રીજી લાઈનમાં 0, 1, 2, 6 ને બદલે 0, 1, 3, 6 હોવું જોઈએ. (આ પ્રુફ રીડીંગની ભૂલ છે. ક્ષમાયાચના)

નોંધ : ૨ : કાપરેકર અચળાંક મેળવવા માટે ચાર અંકની જે સંખ્યાથી શરૂઆત કરવાની છે. તે સંખ્યા માટેની શરત માત્ર એટલી જ છે કે ચાર અંકમાંથી ઓછામાં ઓછો એક અંક ભિન્ન હોવો જોઈએ.

(લેખક તેમના લેખમાં કંઈક જુદું જણાવે છે.)

નોંધ : ૩ : સંખ્યા પસંદ કર્યા બાદ તેના અંકોને ઊતરતા તેમજ ચડતા ક્રમમાં ગોઠવીને બાદબાકી કરવાની છે. જ્યાં સુધી 6174 ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરવાનું છે. 6174 મળ્યા બાદ આ પ્રક્રિયા કરવાથી 6174 જ મળે છે અને તેથી જ તેને અચળાંક કહે છે. (લેખક અહીંયાં પણ કંઈક જુદું જણાવે છે.)

નોંધ : 4 : લેખક પાના નં. 20ના બીજા ફકરામાં બે બાબતો જણાવે છે.

બાબત : 1 બાદબાકી પરથી અનેક નવીનવી સંખ્યાઓ મેળવવામાં આવે છે.

હકીકતમાં શ્રી કાપરેકરના જણાવ્યા પ્રમાણે શરત મુજબ પસંદ કરેલી સંખ્યા પરથી 6174 સુધી પહોંચવા માટે અનેક નહીં પરંતુ વધુમાં વધુ આઠ પુનરાવર્તનની જ જરૂર પડે છે.

બાબત : 2 જ્યાં સુધી આ સંખ્યાના અંકો એક ચોક્કસ ભાત પ્રમાણે ન મળે ત્યાં સુધી ગણતરી કરતા જવામાં આવે છે.

ખરેખર તો 6174 ન મળે ત્યાં સુધી ગણતરી કરતા જવામાં આવે છે. ચોક્કસ ભાતના અંકો મેળવવા માટે કોઈ વિશેષ પ્રયાસો નથી કરવાના હોતા પરંતુ તેવા અંકો આપોઆપ મળે છે.

નોંધ : 5 : આ જ પાના પર લેખક આગળ જણાવે છે તે મારી ભાષામાં જણાવું તો ... પસંદ કરેલ સંખ્યાના અંકોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા બાદ પાસપાસેના અંકોના તફાવતથી બનતી સંખ્યા 321 અથવા 123 મળે તો એક જ પગલે કાપરેકર અચળાંક મળી જાય.

અત્રે એ ઉમેરવાનું છે કે સંખ્યાના અંકોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા બાદ પાસપાસેના અંકોનાં તફાવતથી મળતી સંખ્યા 321 અથવા 123 ઉપરાંત 420, 024 અથવા 222 મળે તો પણ એક જ પગલે કાપરેકર અચળાંક મળી જાય છે. વાચકો 8422, 7751 કે 9753 જેવી સંખ્યાઓ ચકાસી શકે છે.

હવે કંઈક નવું... જો કોઈ ચાર અંકની સંખ્યામાં અંકોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા બાદ પાસપાસેના અંકોનાં તફાવતથી બનતી સંખ્યા 420, 321, 222, 123 કે 024 મળે તો એક જ પગલે કાપરેકર અચળાંક 6174 મળી જાય. હવે આના પ્રતીપ વિષે વિચારીએ.

જો એક જ પગલે કાપરેકર અચળાંક 6174 મળી જતો હોય તો તેવી તમામ સંખ્યાના અંકોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા

બાદ પાસપાસેના અંકોનાં તફાવતથી બનતી સંખ્યા 420, 321, 222, 123 કે 024 જ મળે ?

આ પ્રશ્નોનો જવાબ મેળવવા માટે નીચે આપેલ કોયડાનો ઉકેલ શોધીએ.

ચાર અંકો A, B, C અને D એવા શોધો કે જેથી ABCD – DCBA = 6174 થાય. જ્યાં A, B, C અને Dમાંથી ઓછામાં ઓછો એક અંક ભિન્ન હોય તથા $A \geq B \geq C \geq D$ હોય.

હવે

$$\begin{array}{r} ABCD \\ -\ \underline{DCBA} \\ 6174 \end{array}$$

Case : 1 ધારો કે D = 0 તો A = 6 થાય.

તેથી

$$\begin{array}{r} 6BC0 \\ -\ \underline{0CB6} \\ 6174 \end{array}$$ થાય.

હવે $C - 1 - B = 7$

$\therefore$ $C - B = 8$ જે શક્ય નથી કારણ કે $B \geq C$.

તેથી વદ્દી લેવી પડે.

માટે $10 + C - 1 - B = 7$ $\quad \therefore C - B = -2$

$\therefore B = C + 2$

આમ, D = 0, A = 6 અને B = C + 2 મુજબ B અને Cની વિવિધ કિંમતો લેતાં ABCDની વિવિધ કિંમતો નીચે મુજબ મળે.

6200, 6310, 6420, 6530, 6640, 6750, 6860 અને 6970. આ આઠેય સંખ્યા માટે ABCD – DCBA = 6174 થાય પરંતુ 6750, 6860 અને 6970ના અંકો ઊતરતા ક્રમમાં નથી. તેથી આપણી તમામ શરતો સંતોષે તેવી કુલ પાંચ સંખ્યાઓ મળે.

6200, 6310, 6420, 6530 અને 6640.

આ પાંચેય સંખ્યાઓમાં પાસપાસેના અંકોનો તફાવત અનુક્રમે 420, 321, 222, 123 અને 024 છે.

Case : 2 ધારો કે D = 1 તો A = 7 થાય તથા ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ B = C + 2 થાય. D = 1, A = 7 અને B = C + 2 મુજબ B અને Cની વિવિધ કિંમતો નીચે મુજબ મળે.

7201, 7311, 7421, 7531, 7641, 7751, 7861, 7971. આ આઠેય સંખ્યા માટે ABCD – DCBA = 6174 થાય. પરંતુ 7201, 7861 અને 7971 ના અંકો ઊતરતા ક્રમમાં નથી. તેથી આપણી તમામ શરતો સંતોષે તેવી કુલ પાંચ સંખ્યાઓ મળી : 7311, 7421, 7531, 7641, 7751

આ પાંચેય સંખ્યાઓમાં પાસપાસેના અંકોના તફાવતથી બનતી સંખ્યા અનુક્રમે 420, 321, 222, 123, 024 છે.

Case : 3 ધારો કે D = 2 તો A = 8

ઉપર મુજબ B = C + 2 માટે B અને Cની વિવિધ કિંમતો લેતાં નીચે મુજબ સંખ્યાઓ મળે. 8202, 8312, 8422, 8532, 8642, 8752, 8862, 8972. આ આઠેય સંખ્યાઓ માટે ABCD – DCBA = 6174 થશે પરંતુ 8202, 8312 અને 8972ના અંકો ઊતરતા ક્રમમાં નથી.

તેથી આપણી તમામ શરતો સંતોષે તેવી પાંચ સંખ્યાઓ 8422, 8532, 8642, 8752 અને 8862 મળે.

આ પાંચેય સંખ્યાઓના પાસપાસેના અંકોના તફાવતથી બનતી સંખ્યા અનુક્રમે 420, 321, 222, 123 અને 024 છે.

<u>Case : 4</u> ધારો કે D = 3 તો A = 9

આ વિકલ્પમાં પણ કુલ પાંચ સંખ્યાઓ 9533, 9643, 9753, 9863, 9973 મળે. અને આ પાંચેય સંખ્યાઓના પાસપાસેના અંકોના તફાવતથી બનતી સંખ્યા અનુક્રમે 420, 321, 222, 123 અને 0.24 છે.

નોંધ : $D \geq 4$ માટે $A < D$ થાય જે શરત મુજબ શક્ય નથી.

આમ, એવું સિદ્ધ થાય છે કે જે સંખ્યાઓ માટે એક જ પગલે કાપરેકર અચળાંક મેળવી શકાય છે તે તમામના અંકોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા બાદ પાસપાસેના અંકોનો તફાવત 420, 321, 222, 123 અને 024 જ મળે છે.

અને છેલ્લે, લેખના અંતમાં '6174 ને જાદુઈ સંખ્યા ગણવી કે નહીં ?' આવો પ્રશ્ન છે. જેના જવાબમાં જણાવવાનું કે ખરેખર તો 6174 ને 'કાપરેકર અચળાંક' તરીકે જ ઓળખવામાં આવે છે પરંતુ તેને કહેવી હોય તો જાદુઈ સંખ્યા પણ કહી શકાય. આ સંખ્યા જાદુઈ છે તે દર્શાવવા માટે નીચે દર્શાવેલ રમત રમી શકાય. શિક્ષક એક કાગળ પર 6174 લખીને ગડી વાળીને કોઈ એક વિદ્યાર્થીના ખિસ્સામાં મૂકી દે. ત્યારબાદ વિદ્યાર્થીઓને કાપરેકરની શરત મુજબની ચાર અંકની સંખ્યા લઈને કાપરેકરે દર્શાવેલી પ્રક્રિયાનું ઓછામાં ઓછું આઠ વખત પુનરાવર્તન કરવા જણાવે. પછી પેલા વિદ્યાર્થીને બોલાવીને તેના ખિસ્સામાં મૂકેલ કાગળ પરની સંખ્યા બોર્ડ પર લખવા જણાવે. બધા જ વિદ્યાર્થીઓ આશ્ચર્યચકિત થઈ જશે કારણ કે તેમને પણ આઠ પગલાને અંતે આ જ સંખ્યા મળી હશે !

તો થઈ ગઈ ને '6174' જાદુઈ સંખ્યા !

ગણિત કણિકા : <u>2023</u>

$952^2 + 1785^2 = \underline{\mathbf{2023^2}}$
$1127^2 + 1680^2 = \underline{\mathbf{2023^2}}$
$\underline{\mathbf{2023^2}} + 2040^2 = 2873^2$
$\underline{\mathbf{2023^2}} + 6936^2 = 7225^2$

પ્રેષક : નિલેશ માંડલિયા
અમદાવાદ.
(M) 9712346664

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ-5

કેટલાંક ભૌમિતિક નિરૂપણો-1

પી. કે. વ્યાસ

(M) 98255 77784 Email : vyaspk123@gmail.com

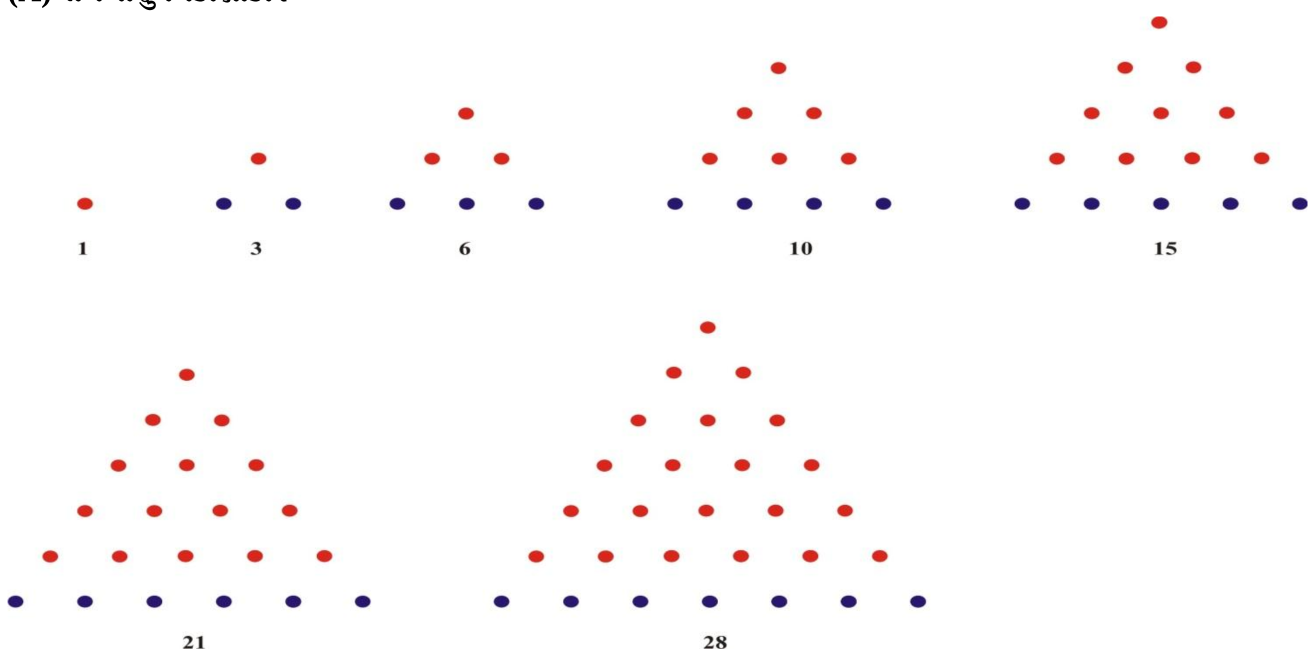
ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ વિશેની આ લેખશ્રેણીના પ્રથમ લેખમાં અમે લખ્યું હતું, “શા માટે આ સંખ્યાઓને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ કહેવામાં આવે છે? ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ ગણિતમાં (અને ભૂમિતિમાં પણ) ક્યાં ક્યાં જોવામાં આવે છે ? આ પ્રશ્નોના ઉત્તર કોઈ અન્ય લેખમાં આપીશું.”

ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના વિશિષ્ટ ગુણધર્મો વિશેના અન્ય લેખો તૈયાર હોવા છતાં આ લેખમાં ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના કેટલાક ગુણધર્મોનાં ભૌમિતિક નિરૂપણો વિશે વાત કરવાના છીએ.

સંખ્યાઓ $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$ ને શા માટે “ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ” કહેવામાં આવે છે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર એ છે કે આ સંખ્યાઓને ત્રિકોણાકારે ગોઠવી શકાય છે. ગ્રીક ગણિતજ્ઞોનો પ્રિય વિષય ભૂમિતિ રહ્યો છે. યુકલિડને વિશ્વ એક ભૂમિતિવિદ તરીકે ઓળખે છે. (યુકલિડના એલીમેન્ટસના બધા ગ્રંથોમાં ભૂમિતિ નથી. તે સમયે ઉપલબ્ધ તમામ ગણિત, ખાસ કરીને સંખ્યાશાસ્ત્રનો પણ સમાવેશ આ ગ્રંથોમાં છે.) ગ્રીક ગણિતજ્ઞો સંખ્યાઓને પણ ભૂમિતિના આકારોમાં ઢાળવાનો પ્રયત્ન કરતા.

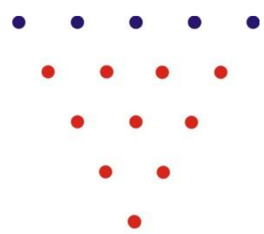
$\Delta_1=1$, $\Delta_2=3$, $\Delta_3=6$, $\Delta_4=10$, $\Delta_5=15$, $\Delta_6=21$, $\Delta_7=28$ ... ત્રિકોણાકારે કેમ નિરૂપી શકાય તે નીચે આપેલ છે.

(A) સમબાજુ ત્રિકોણાકાર



આકૃતિ-1

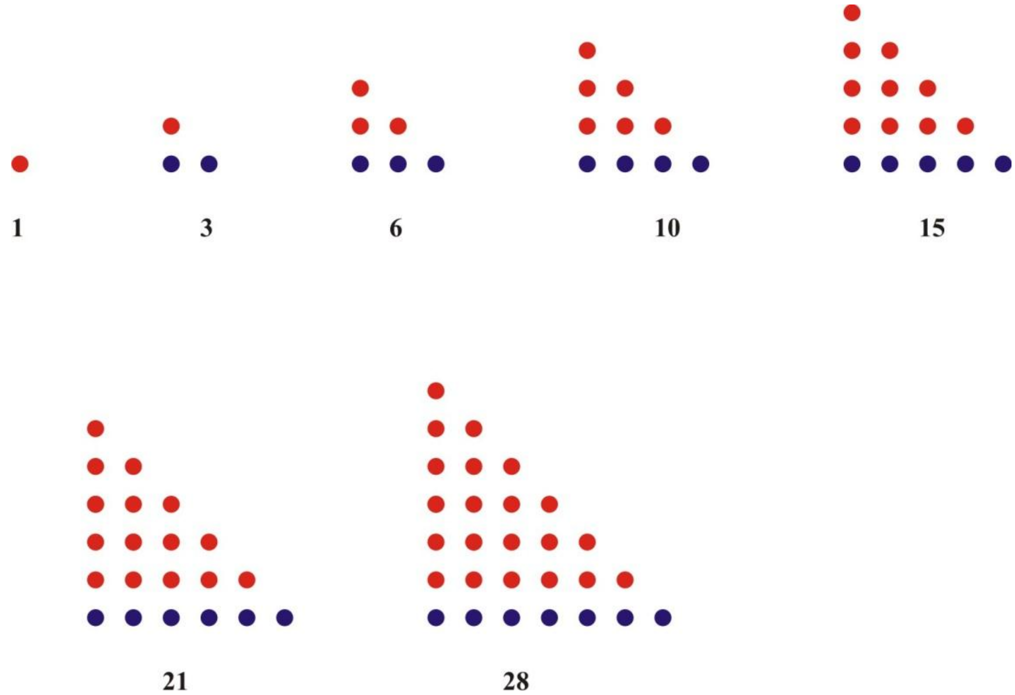
ઉપરની દરેક ત્રિકોણાકાર આકૃતિમાં ટપકાંની કુલ સંખ્યા એ ત્રિકોણીય સંખ્યા છે અને દરેક ત્રિકોણની નીચેની પંક્તિમાં આવતાં ટપકાંઓની સંખ્યા એ જે તે ત્રિકોણીય સંખ્યાનો ક્રમ દર્શાવે છે. દરેક સંખ્યા સમબાજુ ત્રિકોણના આકારે ગોઠવેલી છે જરૂર પડ્યે આ આકૃતિને ઊલટી પણ દોરી શકાય. જેમ કે $\Delta_5=15$નું નિરૂપણ બાજુમાં દર્શાવેલ આકૃતિ-2 પ્રમાણે પણ કરી શકાય.



આકૃતિ-2

(B) કાટખૂણ ત્રિકોણાકાર

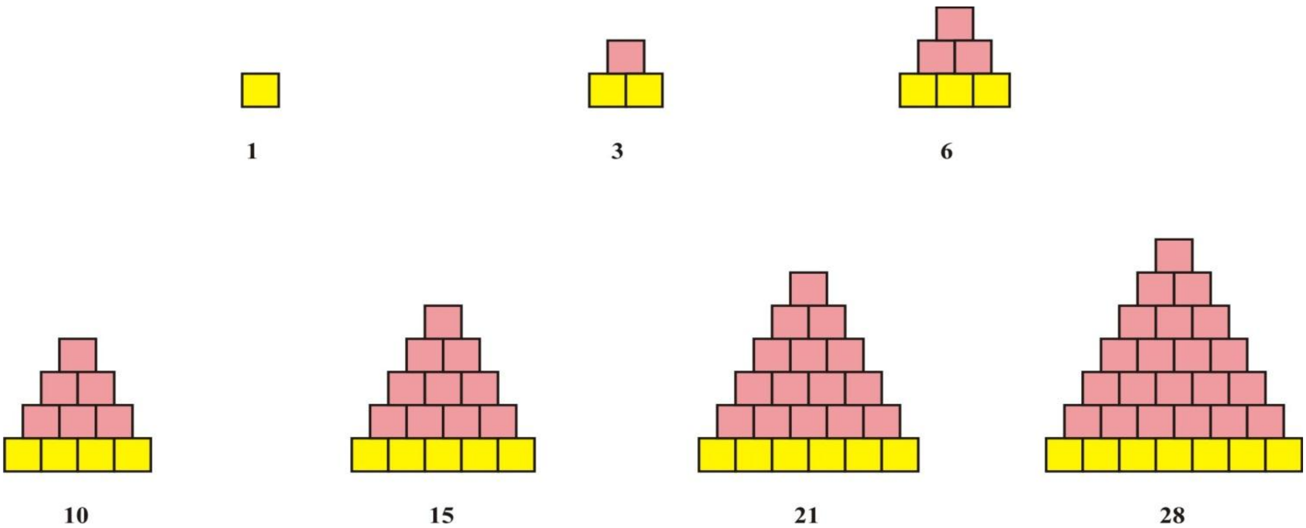
(A)માં ત્રિકોણીય સંખ્યાઓને આપણે સમબાજુ ત્રિકોણાકારે નિરૂપી છે. આ જ સંખ્યાઓને આપણે કાટખૂણ ત્રિકોણાકારે પણ ગોઠવી શકીએ.આવું નિરૂપણ નીચે આકૃતિ-3 માં આપ્યું છે.



આકૃતિ-3

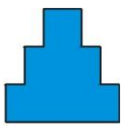
આવા નિરૂપણમાં પણ જરૂર પડે તો ત્રિકોણીય આકૃતિને આપણે કાટખૂણાકારને બદલ્યા વિના, આડી, અવળી કે ઊંધી કરી શકીએ.

(C) 1 × 1 માપના ચોરસો દ્વારા દીવાલ સ્વરૂપો

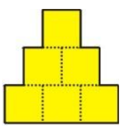


આકૃતિ-4

ઉપરની રીતે દર્શાવેલ ત્રિકોણીય આકારમાં ક્યારેક માત્ર સીમાઓ પર આવેલી રેખાઓ જ દોરીશું (આકૃતિ-5). તો ક્યારેક વચ્ચેની રેખાઓ ત્રૂટક દોરીશું. જેમકે Δ_3=6 દર્શાવવા માટે



અથવા



આકાર દોરીશું.

આકૃતિ-5 **આકૃતિ-6**

(D) હવે આપણે અગાઉ મેળવેલા એક સુંદર પરિણામનું ભૌમિતિક નિરૂપણ જુદી જુદી ત્રણ રીતે જોઈએ.

આ લેખશ્રેણીના બીજા લેખમાં આપણે સાબિત કર્યું હતું કે કોઈપણ ત્રિકોણીય સંખ્યાને નવ વડે ગુણી મળતી સંખ્યામાં 1 ઉમેરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યા ત્રિકોણીય સંખ્યા છે. તે લેખમાં આ ગુણધર્મની સાબિતી આપણે એક વ્યાપક પરિણામ સાબિત કરી તેના એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ તરીકે આપી હતી.

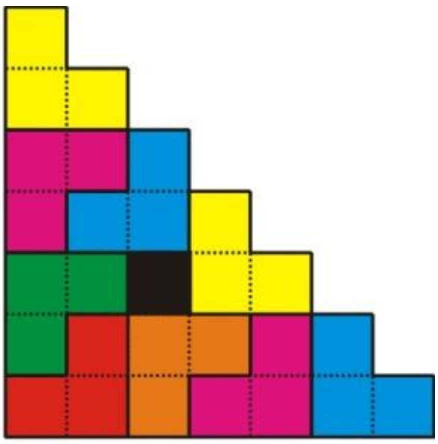
ત્રિકોણીય સંખ્યાની વ્યાખ્યા પરથી પણ સરળ રીતે આ પરિણામ નીચે પ્રમાણે સાબિત થશે.

$$9\Delta_n + 1 = \frac{9n(n+1)}{2} + 1 = \frac{9n^2+9n+2}{2} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = \Delta_{3n+1}$$

હવે n=2 (એટલે કે $\Delta_2 = \frac{2.3}{2} = 3$) માટે $9\Delta_n + 1 = 9\Delta_2 + 1 = 28 = \Delta_7 = \Delta_{3(2)+1}$

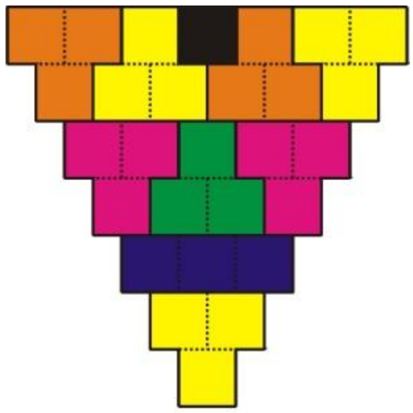
અહીં Δ_2=3ને આપણે નીચે મુજબ ચાર જુદી જુદી આકૃતિથી દર્શાવીશું.

આકૃતિ-7



$9\Delta_2 + 1 = \Delta_7$

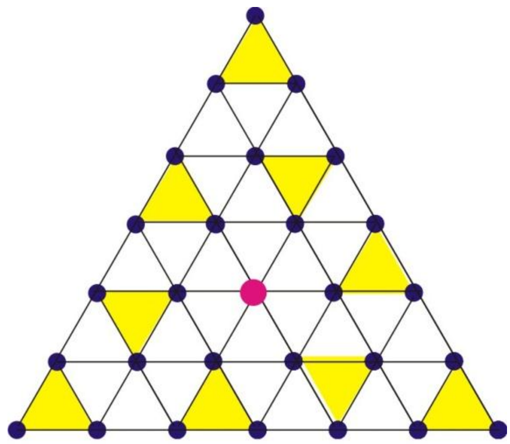
આકૃતિ-8



$9\Delta_2 + 1 = \Delta_7$

આકૃતિ-9

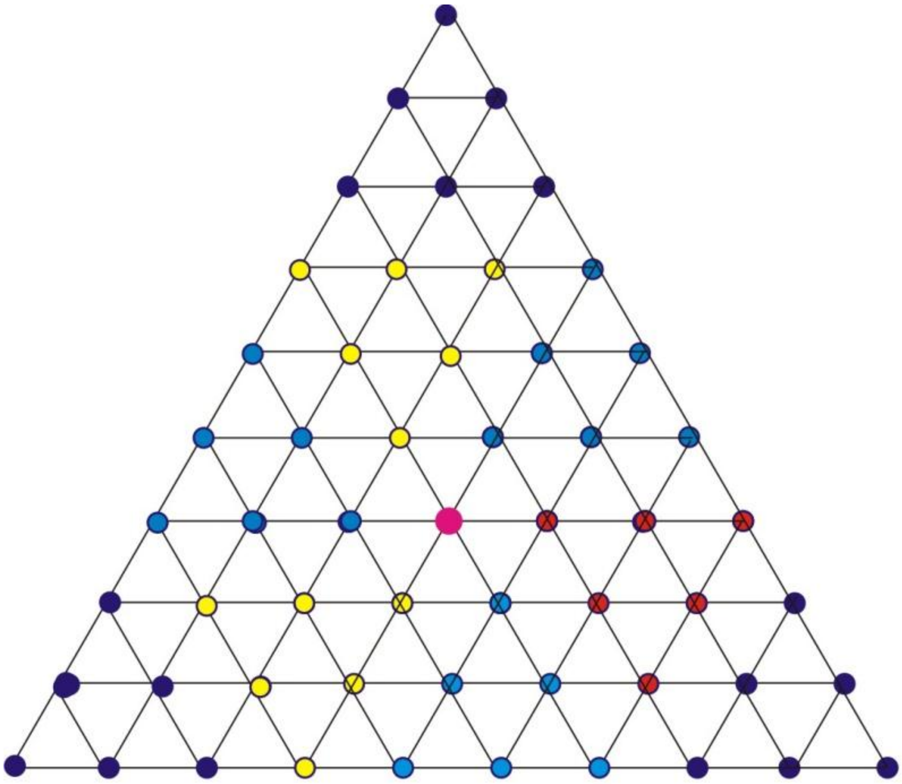
આકૃતિ-10માં $9\Delta_2 + 1$ ગણવા માટે વાચકોએ ટપકાં ગણવાનાં છે, ત્રિકોણો નથી ગણવાના. કોઈ ટપકું ગણતરીમાં બે વાર ન ગણાઈ જાય તે હેતુથી ત્રણ ટપકાંને જોડી ત્રિકોણો બનાવ્યા છે. ત્રિકોણો ગણશો તો તેની સંખ્યા પણ નવ જ થશે અને તે નવ ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓ 27 થશે. એક ટપકું વધે છે તે સમગ્ર આકૃતિમાં કેન્દ્રમાં છે.



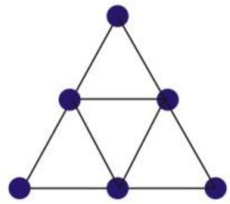
$9\Delta_2 + 1 = \Delta_7$

આકૃતિ-10

આવું જ એક ભૌમિતિક નિરૂપણ $9\Delta_3 + 1 = \Delta_{10}$ માટે નીચે આકૃતિ 11માં આપેલું છે.



$9\Delta_3 + 1 = \Delta_{10}$



$\Delta_3 = 6$

ત્રિકોણીય સંખ્યાના થોડાંક વધુ ગુણધર્મોનાં ભૌમિતિક નિરૂપણો હવે પછીના કોઈ લેખમાં જોઈશું.

ગણિત કણિકા

3141,5926,5358,9793,2384,6264,3383,2795,0288,41

ઉપર લખેલ 38 અંકોની સંખ્યા અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

બસ આટલું જ?

ના, આ સંખ્યા એ અસંમેય અબૈજિક સંખ્યા πને દશાંશ અપૂર્ણાંક સ્વરૂપે લખતાં મળતા પ્રથમ 38 અંકોની બનેલી છે !! એટલે કે

π = 3.141,5926, -------, 41

પ્રસ્તુતકર્તા : નિલેશ માંડલિયા, અમદાવાદ.
(M) 97123 46664

ડૉ. સચિન ગજ્જર
અમદાવાદ (M) 99253 62754

(1) If x > 0 then find the greatest possible value of $(log x)^{\log\log\log x} - (log\ log x)^{\log\log x}$, where all the logarithms are on base 10.

Solution :

Let $log\ log x = y$ $\quad\therefore (log x) = 10^y$

$$\therefore (logx)^{\log\log\log x} - (loglogx)^{loglogx} = (10^y)^{logy} - y^y$$
$$= 10^{ylogy} - y^y$$
$$= (10^{logy})^y - y^y$$
$$= y^y - y^y$$
$$= 0$$

Thus the given expression is always 0.

(2) Let p(x) = $x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$. If a, b, c and d are the roots of the polynomial Q(x) = $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, then find the value of p(a) + p(b) + p(c) + p(d)

Solution:

Here a is the root of Q(x) = $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$

$\therefore$ Q(a) = 0

$\therefore a^4 + 2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$

$\therefore a^4 = -2a^3 - 2a^2 + 1$ .... (i)

Now

P(a) $= a^6 + a^5 + a^4 + a^2 + a + 1$

$= a^2 (a^4 + a^3 + a^2 + 1) + a + 1$

$= a^2 (-2a^3 - 2a^2 + 1 + a^3 + a^2 + 1) + a + 1$ (from (i))

$= a^2 (-a^3 - a^2 + 2) + a + 1$

$= a (-a^4 - a^3 + 2a) + a + 1$

$= a (2a^3 + 2a^2 - 1 - a^3 + 2a) + a + 1$ (from (i))

$= a (a^3 + 2a^2 + 2a - 1) + a + 1$

$= a^4 + 2a^3 + 2a^2 - a + a + 1$

$= a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 1$

$= 1 + 1 = 2$ (from (i))

Similarty we can prove that

p(b) = p(c) = p(d) = 2 $\quad\therefore$ p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 8.

(3) Prove that (સાબિત કરો કે)

$$\frac{2}{0!+1!+2!}+\frac{3}{1!+2!+3!}+\cdots+\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=1-\frac{1}{n!}$$

Solution:

The LHS of the given expression can be written as

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{(k-2)\,!+(k-1)\,!+k\,!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{(k-2)\,!\,[1+k-1+k\,(k-1)]}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{(k-2)\,!\,(1+k-1+k^2-k)}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{(k-2)!\,k^2}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)\,!\,k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k\,!}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\,!}-\frac{1}{k\,!}$$

$$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,!}-\frac{1}{n!}$$

$$=1-\frac{1}{n\,!}$$

પ્રા. પ્રુ. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો અંક-310

(4) If f(x) = $x^3 - x + 1$ and $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$, then find the vlaue of $\alpha^{16} + \beta^{16} + \gamma^{16}$.
[જો f(x) = $x^3 - x + 1$ અને $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) =0$, હોય, તો $\alpha^{16} + \beta^{16} + \gamma^{16}$ નું મૂલ્ય શોધો.)

(5) Let $a^2 + b^2 =1$, $c^2 + d^2 = 1$ and $ac + bd = 0$. Prove that $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 =1$ and $ab + cd = 0$.
(ધારો કે $a^2 + b^2 =1$, $c^2 + d^2 = 1$ અને $ac + bd = 0$ છે. સાબિત કરો કે $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 =1$ and $ab + cd = 0$.)

(6) Let $x_1, x_2, ..., x_{10}$ be 10 numbers. Suppose that $x_i + 2\,x_{i+1} =1$ for each i from 1 to 9. What is the value of $x_1 + 512x_{10}$?
(ધારો કે $x_1, x_2, ..., x_{10}$ એ 10 સંખ્યાઓ છે. ધારો કે 1 થી 9 સુધીની i ની પ્રત્યેક કિંમત માટે $x_i + 2\,x_{i+1} =1$ છે. તો $x_1 + 512x_{10}$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય?)

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ.
(M) 9925837247

પુસ્તકનું નામ	:	કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ અને ક્રાન્તિકારો
લેખકો	:	પ્રા. વિઠ્ઠલભાઈ એ. પટેલ અને પ્રા. પારસ દિ. ઉચાટ
પ્રકાશક	:	કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય, ગાંધીનગર
આવૃત્તિ	:	પ્રથમ, 2021
કિંમત	:	રૂા.250/-; પૃષ્ટ સંખ્યા : 192

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણીના ત્રીજા પુસ્તક તરીકે આ પુસ્તક આવ્યું છે. આ શ્રેણીનું પ્રથમ પુસ્તક પણ મા. શ્રી વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ લિખિત "ગણિતની ક્રાન્તિઓ" શીર્ષકથી 2013 અને 2022માં પ્રગટ થયું છે. એ પુસ્તક ગણિતજ્ઞાનમાં થયેલી ઉત્ક્રાંતિ દર્શાવતો સીમિત આલેખ છે. જેમાં ગ્રીક સંસ્કૃતિથી માંડીને યુક્લિડીય ભૂમિતિ, યુક્લિડીયેતર ભૂમિતિ, બીજગણિત અને કેઓસ થીયરી જેવા આધુનિક ગણિતનો સરળ શબ્દોમાં આછેરો ખ્યાલ આપ્યો છે. આ ઉત્ક્રાંતિમાં કલનગણિતની શરૂઆત થઈ એ ઘટના પોતે જ એક ક્રાન્તિ છે. આજે જે પુસ્તકની વાત કરીએ છીએ એ પુસ્તક કલનગણિતની ઉત્ક્રાંતિનો આલેખ છે. આ ઉત્ક્રાંતિ ઘણી નાની નાની પણ મહત્ત્વની ક્રાંતિઓ થકી થઈ છે. પ્રસ્તુત પુસ્તકમાં આ ક્રાંતિઓ અને તે ક્રાંતિ કરનારા ગણિતશાસ્ત્રીઓ વિશે સચોટ માહિતી સરસ રીતે આપવામાં આવી છે.

કલનગણિત શું છે એ વિશે ઝાઝું ન જાણનાર વ્યક્તિએ આ પુસ્તકની શરૂઆત પુસ્તકને અંતે આપેલા પરિશિષ્ટ-1થી કરવી જોઈએ. આ પરિશિષ્ટમાં કલનગણિતના હાર્દનો સરળ ભાષામાં અનેક ઉદાહરણો દ્વારા ખ્યાલ આપવામાં આવેલો છે.

કલગણિતના ખ્યાલનો વિકાસ કઈ રીતે અને કોના કોના દ્વારા ક્રમશઃ થયો એની સર્વગ્રાહી સમજ આ પુસ્તકમાં વિકસે છે. ફર્મા, લાઈબ્નિઝ, ન્યૂટન, બર્નૂલિઝ, ઓઈલર, બર્કલી, લાગ્રાન્જ, કૉશી, વાયરસ્ટ્રાસ, રીમાન્ન અને લેબેગ સુધીનો વિકાસક્રમ અલગ અલગ પ્રકરણોમાં વહેંચાયેલો છે. અત્યારે શાળા કક્ષાએ અને ત્યારબાદ કૉલેજમાં કલનગણિતના અભ્યાસની શરૂઆત "લક્ષ"ના ખ્યાલથી થાય છે. પરંતુ આપણને એ વાતનો સ્પષ્ટ ખ્યાલ નથી કે કલનગણિતની શરૂઆત કરનારાઓ - ફર્મા (1801), ન્યૂટન (1642) અને લાઈબ્નિઝ (1646) એ તો મહત્તમ-ન્યૂનતમ કિંમતો, ક્ષેત્રફળ, સ્પર્શક વગેરેથી શરૂઆત કરી હતી અને તેના લગભગ 150 વર્ષ પછી કૉશી (1789) અને વાયરસ્ટ્રાસ (1815)ના કામમાં લક્ષની હાલમાં શીખવાતી ε-δ વાળી વ્યાખ્યા અસ્તિત્વમાં આવી ! આ ફેરફાર ક્રાંતિકારી છે અને તે થવા માટે કારણભૂત જ્યોર્જ બર્કલી (1685) હતા. તેમણે તેમની અગાઉના ગણિતશાસ્ત્રીઓના કલનગણિતના ખ્યાલોને તત્વજ્ઞાનની એરણે ચકાસ્યા અને એમની તાર્કિક દલીલોને આધારે કૉશી અને અન્યોએ તાત્ત્વિક, તાર્કિક અને ગાણિતિક રીતે સુદૃઢ એવા કલનગણિતનો વિકાસ કર્યો. આ રોમાંચક ઐતિહાસિક વાર્તા ગણિતના શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓએ જાણવી જ જોઈએ, જે કામ આ પુસ્તક સુપેરે પાર પાડે છે.

લેખકોએ પાછળનાં પ્રકરણોમાં રીમાન્ન (1826) અને લેબેગ (1875)ના કામને પણ આવરી લીધું છે. પુસ્તકનું એક આકર્ષણ એ ઉપર જણાવેલા બધા જ ક્રાન્તિકારીઓના સરસ ફોટોગ્રાફ્સ છે. દરેકના જીવન અને કાર્યનો ટૂંકો પણ સ્પષ્ટ ખ્યાલ જે તે પ્રકરણમાં છે. વર્ણનોમાંથી તે સમયની સામાજિક અને રાજકીય વ્યવસ્થાનો પણ પરિચય થાય છે. બર્નુલી કુટુંબના નવ સભ્યોના ફોટા અને તેમાંના અગત્યના બર્નુલીઝના કામનું વર્ણન ધ્યાન ખેંચે છે. દરેક પ્રકરણને અંતે જે – તે પ્રકરણ તૈયાર કરવા માટે આધાર તરીકે લેવાયેલાં પુસ્તકોની યાદી આપી છે. પરિશિષ્ટ-3માં કલનગણિતના વિકાસનો ઘટનાક્રમ - ઈ.સ. 1503થી ઈ.સ. 1961 સુધીનો - આપેલો છે. ચોથા પરિશિષ્ટમાં અંગ્રેજી – ગુજરાતી પારિભાષિક શબ્દસૂચિ છે જ્યારે પાંચમાં પરિશિષ્ટમાં ગુજરાતી કક્કાવારી પ્રમાણે પુસ્તકમાં વપરાયેલા શબ્દોની સૂચિ છે.

પરિશિષ્ટ-2 માં કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની શાળા (Kerala School of Mathematics)ની માહિતી રસપ્રદ છે. સામાન્ય રીતે એમ માનવામાં આવતું હતું કે ભારતમાં ભાસ્કરાચાર્ય (દ્વિતીય) (1114-1185) પછી કોઈ ગણિતશાસ્ત્રી કે ખગોળશાસ્ત્રી થયા નથી. 1832માં બ્રિટીશ સિવિલ અધિકારી ચાર્લ્સ વિશે, કેરાલાના માધવાચાર્ય અને તેમના વિદ્યાર્થીઓએ કરેલાં ગણિતનાં કામ વિશે લેખ લખ્યો હતો પરંતુ લગભગ 100 વર્ષ સુધી આની નોંધ લેવાઈ નહોતી. 1940 પછીથી આનો ઊંડાણ પૂર્વકનો અભ્યાસ કરવાનું શરૂ થયું અને 1972 અને ત્યારપછી આ સંશોધનો ઉપર પુસ્તકો પ્રગટ થવાની શરૂઆત થઈ. માધવ (1340-1425)થી શરૂ કરી શંકરવારિયાર (1833) સુધીના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ અદ્‌ભુત કામ કર્યાં છે. કેટલાંક પુસ્તકો પરથી એવું જણાય છે કે ન્યૂટન અને લાઈબ્નિઝનાં 200 વર્ષ પહેલાં માધવે $\mathrm{Sin}x$, $\mathrm{Cos}x$ અને $\tan^{-1}x$ ની ઘાતશ્રેણીઓ મેળવેલી !

કદાચ એમ લાગે કે આ પરિશિષ્ટ કલનગણિત સાથે સીધો સંબંધ ધરાવતું નથી પરંતુ ભારતીય ગણિતના વિકાસનો લગભગ 600 વર્ષનો આ એક એવો કાલખંડ છે જેના વિશે માંડ 70 વર્ષ પહેલાં ઈતિહાસકારોનું અને ગણિતશાસ્ત્રીઓનું ધ્યાન ગયું છે અને તેનું અધ્યયન શરૂ થયું છે. એ સંદર્ભમાં આ પરિશિષ્ટ પણ એટલું જ મૂલ્યવાન છે.

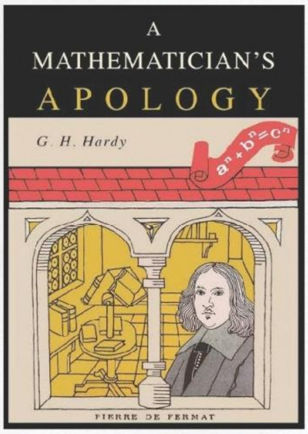
જટિલ ગણાતા કલનશાસ્ત્રના મૂળભુત ખ્યાલોને અને તેના વિકાસક્રમને મહ્‌દઅંશે Non-technical Terminology પીરસતા આ પુસ્તકનું વાચન ગણિતના અધ્યયન-અધ્યાપન સાથે જોડાયેલા દરેકે કરવું જ રહ્યું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

Book Review

A Mathematician's Apology, by G. H. Hardy

Reviewed by Paraj Modi



The title 'A Mathematician's Apology' strikes the readers unusually. Why is a mathematician as great as G.H. Hardy himself, apologising? The entire book is but an apology, which aims to offer a defence in pursuit of mathematics. Published in 1940, this apology stands relevant in most respects even today. Originating from one of the finest mathematicians as Hardy, this apology invokes realisation of passion in one's conscience, especially in students as myself.

Hardy begins by proclaiming that writing this book is nothing but a *'melancholy experience'*. His justification of this phrase explains the true pursuit of a mathematician - *'to add to mathematics, and not to talk about what he or other mathematicians have done.'* The entire book is written with a striking element of truth and utmost honesty. Hardy unhesitatingly calls this piece of writing a *'confession of weakness'* of a mathematician which may provoke scorn by other mathematicians.

Hardy adopts a unique approach throughout the book - wherein the readers can feel as if Hardy is talking to them. He asks questions, analyses what their answers may be, opines on them himself and then leaves it to the readers to understand the ideas as they like. Hardy questions, *"Is mathematics 'unprofitable'?"* He then goes on to explore the possible answer to it, *"In some ways, plainly, it is not; for example, it gives great pleasure to quite a large number of people. I was thinking of 'profit', however, in a narrower sense."* He ends by specifying his notion of profit, thereby prompting readers to think.

Hardy believes that mathematics is a *'young man's game'* — that age is indeed an influential factor in determining the success of any mathematician. He aids his claim through the life stories of Galois, Abel, Ramanujan, Riemann, etc. Although age might be a limiting factor, Hardy does not forget to mention the permanence and

Keywords: Student readers, mathematicians, introspection

timelessness of mathematical achievement. He writes, *"In these days of conflict between ancient and modern studies, there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras, and will not end with Einstein, but is the oldest and youngest of all."* Somewhere, the transcendental nature of mathematics is being reflected here. We are divided by boundaries, but an art form, as beautiful as mathematics, connects us all universally and appeals to all equally.

This piece of work is essentially relevant for fellow students in high school, because Hardy's reflections on what the youth should do, are particularly substantial. He says that the youth must be ambitious — it is after all, this ambition that drives all worthy discoveries or inventions - whatever their area of interest might be. Moreover, this book brings along with it an excellent opportunity to interpret what beauty of any sort may be like. Hardy fondly mentions, *"It may be very hard to define mathematical beauty, but that is just as true of beauty of any kind — we may not quite know what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it."* Through such assertions, Hardy forces the readers to appreciate the aesthetic appeal of mathematics.

Hardy goes on to explain what, according to him is the 'utility' of mathematics, and what 'significant' mathematics is. This analysis was my most favourite part in the entire book. Hardy says that any serious mathematical idea must have *depth* and *generality*. These two characteristics may sound exactly opposite, but indeed, Hardy has an argument to make!

Drafted across several separate essays, the book is not only an insightful read, but also a spiritual experience any art lover would love to have. As Hardy constantly draws analogues between chess, mathematics and poetry, the book has something to offer to everybody. While most ordinary readers may think that this book would have a lot to deal with complex mathematics — it is an utter misconception. This book is but a brief introduction meant for common people to dive into the realms of divinity through mathematics.

Hardy was undoubtedly a fabulous mathematician, but this book also proves him to be a lucid writer - who expresses his thoughts with unflinching clarity and paramount honesty. He has a rhythmic knack of writing when he writes, *"Chess problems are the hymn-tunes of mathematics"* or *"A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas."* These philosophical notes portrayed Hardy as a devoted thinker with much depth.

But the mystery persists — what is the apology exactly for? During one of the insightful discussions with my mathematics teacher, he expressed that the apology is to the people who are not really fascinated by mathematics. Hardy, as a torch-bearer of the mathematics community, apologises to those people as they cannot perceive the profound inexplicable beauty of mathematics. As Hardy likes to say it, *"Immortality may be a silly word, but a mathematician has the best chance of whatever it may mean."*

Post Script from the Reviewer

I am grateful to my mathematics teacher for recommending this and other books like *'Fermat's Last Theorem'* by *Simon Singh*, and *'Uncle Petros and the Goldbach's Conjecture'* by *Apostolos Doxiadis*. Just as I have thoroughly enjoyed reading these literary marvels pertaining to mathematics, I believe the youth of my age would enjoy doing so as well. This would not only broaden perspectives but also bring clarity regarding the choice of one's career.

PARAJ MODI is a student who has just completed 12th grade from Maharaja Agrasen Vidyalaya, Ahmedabad. She is passionate about biology, physics and mathematics. She plays the Tabla and loves to explore mathematical patterns in Indian Classical Music, Nature and Origami. She is a poet and has published a poetry book 'Paradise Out of Words'. Above all, she is a curious person who loves to learn and discuss. She may be contacted at parajmodi2703@gmail.com

આ લેખ અગાઉ At Right Anglesમાં પ્રકાશિત થઈ ગયો છે. લેખક અને પ્રકાશકની મંજૂરીથી અત્રે પુનઃપ્રકાશિત કરીએ છીએ.

ગણિત સમાચાર

1

વિશ્વ વિખ્યાત ગુજરાતી ગણિતશાસ્ત્રી પ્રો પી સી વૈદ્યનાં સંશોધનો અંગે વર્કશોપ થયો

સાંસ્કૃતિક મંત્રાલય, ભારત સરકારના સહયોગથી વિજ્ઞાન ગુર્જરી સુરત તથા નવયુગ સાયન્સ કૉલેજના સંયુક્ત ઉપક્રમે પ્રો. પી.સી. વૈદ્યની જન્મજયંતી નિમિત્તે તેમના ગણિત ક્ષેત્રે વૈશ્વિક પ્રદાન અંગે એક દિવસનો વર્કશોપ તા. 30 જૂન 2023ના રોજ નવયુગ સાયન્સ કૉલેજ સુરત ખાતે યોજાયો હતો.

આ પ્રસંગે અતિથિઓના મેમેન્ટોથી સન્માન બાદ કૉલેજના પ્રિ. ડૉ. અશ્વિન પટેલે પ્રાસંગિક આવકાર તથા વિજ્ઞાન ગુર્જરી સુરતના સચિવ પ્રિ. મનસુખ નારીયાએ વિજ્ઞાન ભારતી અને વિજ્ઞાન ગુર્જરીની વિવિધ વિજ્ઞાન પ્રવૃત્તિઓ અંગે પ્રેઝન્ટેશન આપ્યું હતું. કાર્યક્રમના મુખ્ય વક્તા પ્રો. ડૉ. દેવભદ્ર શાહ (પ્રોફેસર, VNSG Uni) હતા જેમણે પ્રો. પી. સી. વૈદ્યનાં જીવન, સંશોધન કાર્યો, સિદ્ધિઓ, ગણિત ક્ષેત્રે વિશ્વ કક્ષાએ કરેલ સંશોધનો, આઈન્સ્ટાઈનના સાપેક્ષવાદના સંશોધનને આગળ વધારતાં વૈદ્ય મેટ્રિક સમીકરણો વગેરે અંગે રસપ્રદ પ્રેઝન્ટેશન કર્યું હતું. અતિથિ વિશેષ તરીકે આચાર્ય સંઘના અધ્યક્ષ કિશોરભાઈ જાની તથા પ્રો. અનિલ ભટ્ટ હતા. કાર્યક્રમનું સંકલન ડૉ. અનિતા ટેલર, રંજનબેન પટેલ, જી એન કાકડીયા તથા કૉલેજ સ્ટાફે કર્યું હતું. વર્કશોપમાં 100 વિદ્યાર્થીઓ 35 જેટલા પ્રાધ્યાપકો અને અન્ય આમંત્રિતો હતા. ભાગ લેનારને પ્રમાણપત્રો અને સ્મૃતિ ભેટ એનાયત કરાયા હતા. અંતમાં સાંસ્કૃતિક મંત્રાલય, નવયુગ સાયન્સ કૉલેજ તથા વિજ્ઞાન ગુર્જરી રાજ્ય એકમના ડૉ. ચૈતન્યભાઈ જોશી, પ્રશાંતભાઈ કુંજડીયા, જીગ્નેશભાઈ બોરીસાગર અને વિદ્યાધર વૈધજીનો આભાર વ્યક્ત કર્યો હતો.

(વિજ્ઞાન ગુર્જરી સુરતના સૌજન્યથી)

VNSG Uni.
સુરત.

પ્રેષક : ડૉ. ડી.વી. શાહ
(M) 98980 57891

2

GNFC, ભરૂચ ખાતે યોજાયેલ 'ગણિત સંમેલન'નો અહેવાલ

GNFC, ભરૂચના નેજા હેઠળ નર્મદાનગર કોમ્યુનિટી સાયન્સ સેંટર (NCSC) દ્વારા તા.24 અને 25 જૂન, 2023 દરમિયાન ગણિત સંમેલનનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. જેમાં ભરૂચ જિલ્લાની 35 શાળાઓનાં ધોરણ 3થી 10નાં (બંને માધ્યમના) આશરે 900થી 1000 વિદ્યાર્થીઓએ વિવિધ પ્રવૃત્તિઓમાં ભાગ લીધો હતો અને આશરે 2000 મુલાકાતીઓ તેના સાક્ષી રહ્યા હતા.

ગુજરાત ગણિત મંડળના વર્ષ 2023ના પ્રમુખ ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિ, વરિષ્ઠ સભ્ય શ્રી મેઘરાજ ભટ્ટ તથા સભ્ય શ્રીમતી નીતા સંઘવી અને જૂનાગઢની માધ્યમિક શાળાના રાષ્ટ્રીય એવોર્ડ વિજેતા શિશ્રક શ્રી બલદેવપરી મુખ્ય વક્તાઓ તરીકે ઉપસ્થિત રહ્યા હતા.

ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિએ ધો.-9 તથા 10ના વિદ્યાર્થીઓને 'Binary v/s Binomial' વિષય પર વ્યાખ્યાન આપ્યું હતું. વ્યાખ્યાનના અંતે લેખિત Quizનું પણ આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું.

પ્રથમ દિવસે શ્રી મેઘરાજ ભટ્ટે 'Mathematics in Medical Sciences' વિષય પર રસપ્રદ વ્યાખ્યાન રજૂ કરીને શ્રોતાઓને સારા એવા પ્રભાવિત કર્યા હતા તો બીજે દિવસે 'Upto Quadramino' શીર્ષક હેઠળના વ્યાખ્યાનમાં વિદ્યાર્થીઓને ચાર-ચારની ટુકડીમાં વહેંચીને Quadraminoના Set આપીને શક્ય તેટલા તમામ ચોરસ તથા લંબચોરસ બનાવવાની સુંદર પ્રવૃત્તિ કરાવી હતી.

નીતાબેનના વ્યાખ્યાનનું શીર્ષક હતું, 'Do it the Vedic Way'. ધોરણ-7 તથા 8ના વિદ્યાર્થીઓ માટેના આ વ્યાખ્યાનમાં ઝડપી ગણતરીની રીતો તેમજ કેટલીક રમતોને Mathemagic તરીકે સમજાવવામાં આવી હતી.

વક્તવ્યને અંતે એક નાનકડી લેખિત Quizનું આયોજન પણ કરવામાં આવ્યું હતું.

શ્રી બલદેવપરીએ ટેકનોલોજીનો અફલાતૂન ઉપયોગ કરીને મોબાઈલ દ્વારા વિદ્યાર્થીઓને Quiz કેવી રીતે રમાડી શકાય તેનું નિદર્શન કરીને પ્રેક્ષકોને મંત્રમુગ્ધ કરી દીધા હતા.

વક્તાઓએ નિર્ધારિત કાર્યક્રમ મુજબ વક્તવ્ય આપવા સાથે સાથે ગાણિતિક મૉડેલ સ્પર્ધા તેમજ વક્તૃત્વ સ્પર્ધાના નિર્ણાયક તરીકે પણ ભૂમિકા ભજવી હતી.

તદ્ઉપરાંત, ઉપસ્થિત શ્રોતાઓને ગુજરાત ગણિત મંડળના સભ્ય બનવા, અધિવેશનમાં હાજરી આપવા તથા સુગણિતમ્ વાંચવા માટે અનુરોધ કર્યો હતો.

સમાપન સમારોહમાં GNFCના સ્વતંત્ર ડાયરેક્ટર ડૉ. એન. રવિચંદ્રન મુખ્ય અતિથિ તરીકે ઉપસ્થિત રહ્યા હતા.

સામાન્ય રીતે નિયમિતપણે માત્ર વિજ્ઞાનમેળાનું આયોજન કરતા GNFCના સંચાલકો તથા NCSCના ઊર્જાવાન કાર્યકરોએ સદર વર્ષે ગણિત સંમેલનનું સફળ આયોજન કરી શકવા બદલ ખુશી અને આત્મવિશ્વાસ પ્રગટ કર્યો હતો.

NCSC તથા GNFC આગામી વર્ષોમાં આ દિશામાં નવા આયામો સર કરવાનું સ્વપ્ન સેવે છે. ગુજરાત ગણિત મંડળ આ સ્વપ્ન પૂરું કરવામાં સહભાગી બનશે તેવી અપેક્ષા છે.

બ્રાઈટ સ્કૂલ
વડોદરા.

પ્રેષક : પ્રિ. શ્રીમતી નીતા સંઘવી
(M) 83205 76754

✦ ✦ ✦ ✦ ✦