RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

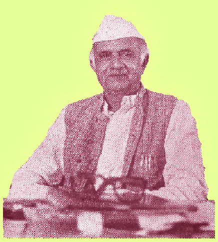
વર્ષ : 60 ઇ-આવૃત્તિ-1 સળંગ અંક : 306 જુલાઈ 2022

For private circulation only

મુખપૃષ્ટ પરનો ગણિતજ્ઞ

ગ્રેગરી માર્ગુલીસ

Birth : 24-2-1946



આદ્યતંત્રી

પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

email : suganitam2018@gmail.com

સંવર્ધક તંત્રી

ડૉ. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : સુગણિતમ્ ટ્રસ્ટ, ગણિત વિભાગ, ગુજરાત યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.

સ્વ. પ્રાધ્યાપક નરેન્દ્ર લાધાવાલા

જન્મ: 4-11-1947 **દેહાંત :** 5-3-2021

સ્વ. પ્રા. એન. આર. લાધાવાલા સ્મૃતિ અંક

ગુજરાત ગણિત મંડળના આજીવન સભ્ય અને અગ્રણી કાર્યકર, સુગણિતમ્ ટ્રસ્ટના ટ્રસ્ટી, સન્નિષ્ઠ પ્રાધ્યાપક અને સંશોધક એવા ડૉ. એન. આર. લાધાવાલાનું માર્ચ 5, 2021ના રોજ એકાએક દુઃખદ નિધન થતાં ગુજરાતના ગણિત સમાજને ન પૂરી શકાય તેવી ખોટ પડી છે. સુગણિતમ્નો હવે પછીનો, ઓક્ટોબર 2022નો અંક (સળંગ અંક 307) સ્વ. ડૉ. લાધાવાલા સાહેબને સમર્પિત કરવામાં આવનાર છે. આપનાં પ્રા. લાધાવાલા સાહેબ જોડેનાં સંસ્મરણો સુગણિતમ્ના વાચકો સમક્ષ રજૂ કરી તેમના અર્થસભર જીવનને અંજલિ આપવા માટે આપને આમંત્રણ છે. આપની પાસે સ્વ.લાધાવાલા સાહેબના કોઈ ફોટોગ્રાફ્સ હોય તો તે પણ મોકલી આપવા વિનંતી છે.

સુગણિતમ્ – ત્રિમાસિક

સળંક અંક : 306 ઈ-આવૃત્તિ-1 જુલાઈ - 2022

અનુક્રમણિકા

સંપાદકીય

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 305ના સંપાદકીય લેખમાં પ્રા. પી. કે. વ્યાસના જણાવ્યાનુસાર ત્રણ દાયકાની સુગણિતમ્‌ની સેવામાંથી તેઓએ શારીરિક મર્યાદાઓના કારણસર સ્વેચ્છાએ મુક્તિ લીધી છે. સતત 31 વર્ષ સુધી પ્રા. અરુણભાઈ વૈદ્યની સાથે રહીને સુગણિતમ્‌ને વધુ ઊંચાઈ પર લઈ જવાનું કાર્ય તેઓએ કર્યું છે. આજે જ્યારે તેઓ આ જવાબદારીમાંથી નિવૃત્ત થઈ રહ્યા છે ત્યારે ખ્યાલ આવે છે કે આ કામ કેટલું સમય માંગી લેનારું, શ્રમ માંગી લેનારું અને અઘરું છે. સુગણિતમ્ માટે તેઓએ આર્થિક સમસ્યાઓનો સામનો કર્યો છે, પૂરતા લેખોને અભાવે રાત જાગીને લેખ લખ્યા છે અને સુગણિતમ્ સમયસર રવાના થઈ શકે તે માટે સ્વખર્ચે (અને કેટલીક વાર સ્વાસ્થ્યને જોખમે) દોડાદોડી કરી છે. પ્રા. અરુણ વૈદ્ય વિશેષાંક જોતાં વિચાર આવે છે કે આવો સુંદર અંક તૈયાર કરવા પાછળ વ્યાસ સાહેબનાં કેટલાં આયોજન, શ્રમ, સૂઝ અને દૃષ્ટિ હશે. હકીકતમાં વ્યાસ સાહેબે દાયકાઓથી સુગણિતમ્ માટે દિલ, દિમાગ અને દૃષ્ટિથી કામ કર્યું છે. આપણે આ તબક્કે વ્યાસ સાહેબનો હૃદયપૂર્વક આભાર માની તેમની સેવાઓને બિરદાવીએ. આપણે પ્રાર્થના કરીએ કે તેમનું સ્વાસ્થ્ય સારું રહે અને આશા રાખીએ કે તેમના માર્ગદર્શનનો લાભ સુગણિતમ્‌ને દીર્ઘકાળ પર્યંત મળતો રહેશે.

હવે પછી સુગણિતમ્ નવા કાર્યવિશેષ દળ તથા નવી સંરચના સાથે રજૂ થશે, જેની શરૂઆત વર્તમાન અંકથી કરવામાં આવેલ છે. આ ફેરફારમાંથી વાચકોને સ્પર્શતા કેટલાક અગત્યના મુદ્દાઓ નીચે મુજબ છે.

(1) વર્તમાન અંકથી સુગણિતમ્‌નું નવું સંપાદન મંડળ તથા વ્યવસ્થા મંડળ અસ્તિત્વમાં આવેલ છે, જેની માહિતી વર્તમાન અંકમાં કવરપેજ 2, 3 માં આપેલ છે.

(2) અન્ય નિર્ણય ન લેવામાં આવે ત્યાં સુધી સુગણિતમ્‌ની ફક્ત e-copy જ પ્રકાશિત કરવામાં આવશે, જે ગુજરાત ગણિત મંડળના દરેક સભ્યને ઈ-મેઈલ દ્વારા મોકલવામાં આવશે. (સુગણિતમ્‌ની e-copy મેળવવા માટે ગુજરાત ગણિત મંડળના દરેક સભ્ય એ તેમનાં નામ, ઈ-મેઈલ તથા મોબાઈલ નંબર પ્રા. સચિન ગજ્જરને – 9825362754 પર અચૂક મોકલવાં.)

(3) અન્ય નિર્ણય ન લેવામાં આવે ત્યાં સુધી સુગણિતમ્‌ની e-copy જાન્યુઆરી, એપ્રિલ, જુલાઈ તથા ઑક્ટોબર, એમ વર્ષમાં ચાર વખત પ્રકાશિત કરવામાં આવશે.

સો અંક પહેલાં

[સુગણિતમનો 206મો અંક નવેમ્બર-ડિસેમ્બર-2003નો હતો. આ અંકમાં સ્વ. પ્રાધ્યાપક અરુણ મ. વૈદ્ય લિખિત લેખ- **પિસ્તાળીસનું ચક્ર** પ્રગટ થયો હતો. બે પાનાંનો આ લેખ અત્રે પુનર્મુદ્રિત કરીએ છીએ. - **પ્રધાન સંપાદક**]

પિસ્તાળીસનું ચક્ર

સુગણિતમ્ અંક 201ના પૃ.34 પર ગણિત નોંધપોથીમાં નિલેશ માંડલિયાએ સંખ્યાઓની એક 45 પગલે આવર્તિત થતી શ્રેણી પ્રત્યે ધ્યાન ખેંચ્યું હતું. બે આંકડાની કોઈ પણ સંખ્યા લઈને શરૂ કરો. (એક આંકડાની હોય તો તેનો દશકનો આંકડો શૂન્ય લઈ તે બે આંકડાની છે તેમ માની લેવાય). હવે આ સંખ્યાના એકમના આંકડાને નવ વડે ગુણી, તેમાં દશકનો આંકડો ઉમેરીએ એટલે બીજી સંખ્યા મળે. દા.ત. 42 માંથી (2×9માં 4 ઉમેરતાં) 22 મળે. આ જ નિયમ પ્રમાણે બીજીમાંથી ત્રીજી સંખ્યા મળે. આમ જે સંખ્યાશ્રેણી ઊભી થાય તે મોટે ભાગે 45 પગલે ફરી પુનરાવૃત્ત થાય છે. દા.ત. 42 થી શરૂ થતી શ્રેણી 42, 22, 20, 02, 18, 73, 34, 39, ... બનાવીએ તો તેનાં એકતાળીસમા પછીનાં પદો 81, 17, 64, 42, ... છે એટલે પહેલું પદ 42 એ જ પિસ્તાળીસમું પદ બને છે. એટલે કે આ શ્રેણી 44 પદ પછી આવર્તિત થાય છે. અમુક અપવાદો બાદ કરતાં કોઈ પણ બે આંકડાની સંખ્યાથી શરૂ કરીએ તો 44 પગલે આવર્તિત થતી શ્રેણી મળે છે. શ્રી માંડલિયાએ આ વાતની સાબિતી આપી ન હતી.

તંત્રીનોંધમાં લખાયું હતું કે આ હકીકત દાયકાઓ પહેલાં કાપરેકરે શોધી કાઢી હતી. વાચકોને આ 44 પગલે શ્રેણી આવર્તિત થાય છે તેની સાબિતી શોધવા કહેવાયું હતું. પણ કોઈ વાચકે તેની સાબિતી મોકલી નથી.

કાપરેકરે જે હકીકત શોધી હતી તે વધુ વ્યાપક હતી. દસનો કોઈ બે આંકડાનો નિશ્ચિત ગુણિત 10h પસંદ કરો. હવે 10hથી નાની કોઈ પણ સંખ્યા લો. તે સંખ્યાના એકમના આંકડાને h વડે ગુણી તેમાં દશકનો આંકડો ઉમેરી બીજી સંખ્યા મેળવો અને આમ શ્રેણી બનાવો. તો તે શ્રેણી આવર્તી થશે અને તેનું આવર્તમાન પહેલી પસંદ કરેલી સંખ્યા પર આધાર નહિ રાખે. માંડલિયાના દૃષ્ટાંતમાં $h = 9$ છે.

દા.ત.40થી ઓછી કોઈ પણ સંખ્યા લઈ એકમના આંકડાને 4 વડે ગુણી દશકનો આંકડો ઉમેરી શ્રેણી બનાવીએ તો શું થાય ? 16થી શરૂ કરીએ તો

16, 25, 22, 10, 01, 04, 16, ...

અહીં છ પગલે પુનરાવર્તન થાય છે. 16ને બદલે 14થી શરૂ કરીએ તો 14, 17, 29, 38, 35, 23, 14, ... આમ ફરી છ જ આવર્તમાન છે. પરંતુ અહીં પણ અપવાદો છે. જો શરૂઆતની સંખ્યા 13 કે 26 કે 39 હશે તો પહેલે જ પગલે પુનરાવર્તન થાય છે.

હવે $h = 7$ માટેનું દૃષ્ટાંત લઈએ.

25, 37, 52, 19, 64, 34, 31, 10, 01, 07, 49, 67, 55, 40, 04, 28, 58, 61, 13, 22, 16, 43, 25, ...

અહીં આવર્તન બાવીસ પગલાં પછી શરૂ થાય છે. પણ પહેલી સંખ્યા 23 કે 46 કે 69 લઈશું તો એક જ પગલા પછી પુનરાવર્તન થશે.

હવે આ બધું સાબિત શી રીતે કરવું ? કાપરેકરે પણ સાબિતી આપી ન હતી.

સાબિતી આપતાં પહેલાં કોઈ પણ h માટે આવર્તમાન (કેટલા પગલાં આવર્તન થશે તે) માટેનું સૂત્ર આપી દઈએ. hનો એવો લઘુતમ ઘાત શોધો (h^m) કે જેને $10h - 1$ વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે. તો આ m જ આવર્તમાન થશે અને શરત એ છે કે પહેલી સંખ્યા અને $10h - 1$ નો ગુ.સા.અ. 1 હોવો જોઈએ.

$h = 4$ માટે $h^m \equiv 1 \ (mod\ 39)$ થાય તેવો લઘુતમ m શોધો.

$4^m \equiv 1 \ (mod\ 39)$

માટે જોઈએ કે

$4 \equiv 4, \quad 4^2 \equiv 16,$

$4^3 = 64 \equiv 25, \quad 4^4 \equiv 100 \equiv 22,$

$4^5 \equiv 88 = 10$ અને

$4^6 \equiv 40 \equiv 1 \ (mod\ 39)$

તેથી આવર્તમાન 6 થાય, જે આપણે ઉપર જોયું છે.

$h = 7$ માટે $7^m \equiv 1$ (69) થાય તેવો લઘુતમ m 22 છે તે ખાતરી કરી શકાય.

આ વાતની સાબિતી ?

જો શ્રેણીનું nમું પદ k_n હોય અને $k_n = 10a_n + b_n$ હોય, જ્યાં $0 \le b_n \le 9$ તો $k_n < 10h$ છે તેથી $a_n \le h - 1$ પણ થશે. વળી $k_n \le 10\,(h - 1) + 9$ એટલે કે $k_n \le 10h - 1$.

હવે વ્યાખ્યા મુજબ

$k_{n+1} = h\,b_n + a_n$

આમ $hk_n - k_{n+1} = 10ha_n + hb_n - hb_n - a_n$

તેથી $k_{n+1} \equiv hk_n \bmod (10h - 1)$

આમ $k_{n+1} \equiv hk_n \equiv h^2k_{n-1}$

$\equiv h^3k_{n-2} \equiv \ldots$

$\equiv h^nk_1 \bmod (10h - 1)$

તેથી જો $h^n \equiv 1 \bmod (10h - 1)$ હોય તો

$k_{n+1} \equiv k_1 \bmod (10h - 1)$ થાય.

હવે k_{n+1} અને k_1 બંને $10h - 1$થી વધુ નથી માટે $k_{n+1} = k_1$ હોવા જોઈએ. આ બતાવે છે કે જો $h^n \equiv 1 \bmod (10h - 1)$ તો $k_{n+1} = k_1$, એટલે કે n પગલાં પછી પુનરાવર્તન થાય.

આના કરતાં સહેજ જુદી સાબિતી અત્યારના એમ. જી. સાયન્સ ઈન્સ્ટિટ્યુટ, અમદાવાદના પ્રિન્સિપાલ એ. પી. શાહ અને આ લેખના લેખકે 1968માં આપી હતી અને તે અમેરિકાના એક સામયિકમાં પ્રકાશિત થઈ હતી.

હવે માંડલિયાના પ્રશ્ન પર આવીએ. ત્યાં $h = 9$ અને $10h - 1 = 89$ છે. એટલે જો 89થી ઓછી અને તેની સાથે ગુ.સા.અ. 1 વાળી સંખ્યા લઈને શરૂ કરીએ તો નક્કી m પદો પછી પુનવરાવર્તન થશે, જ્યાં $9^m \equiv 1$ (89) તેવો લઘુતમ m છે. આવો m ચુમ્માલીસ છે તે જોવું સરળ (જો કે મજૂરી માગી લે તેવું) છે. સદ્‌ભાગ્યે 89 અવિભાજ્ય છે એટલે 89થી નાની દરેક સંખ્યાનો 89 સાથેનો ગુ.સા.અ. 1 છે. જો 89થી મોટી બે આંકડાની સંખ્યા લઈ શરૂ કરીએ તો શું થાય ?

90 માટે શ્રેણી 90, 09, ... થાય. હવે બીજું પદ 09 < 89 છે તેથી ત્યાંથી શરૂ થતી શ્રેણી આવર્તી થશે. એટલે કે 90 પુનરાવર્તિત નહિ થાય પણ ત્યાર પછીનાં તમામ પદો 44 પદો પછી પુનરાવર્તન પામશે.

પહેલી સંખ્યા 91થી માંડીને 98 સુધીની ગમે તે લઈએ તો એ પદ પુનરાવર્તિત નહિ થાય પણ પછીનું દરેક પદ 44 પદો પછી પુનરાવર્તિત થશે.

99 માટે શ્રેણી 99, 90, 09, ... થશે. અહીં પહેલાં બે પદો પુનરાવર્તિત નહિ થાય પણ પછીનું પદ 44 પદો પછી પુનરાવર્તન પામશે.

સ્વ. અરુણ મ. વૈદ્ય,

9, ધનુષધારી સોસાયટી, ધરણીધર દેરાસર પાસે,

અમદાવાદ-38007.

avaidyaad1@sancharnet.in

2022ની નોંધ

ગણિતમાં જે સૌંદર્ય છે તે બધું સુગણિતમ્‌માં છે. તેમાં ગણિત છે. ગણિતજ્ઞોનાં જીવન અને કાર્યો છે. ગણિત શિક્ષણ છે, ગણિત શિક્ષણને રસપ્રદ બનાવતી પ્રવિધિઓ છે, ગણિત ગમ્મતો છે અને ગાણિતિક રમતો પણ છે. ગણિત કોયડાઓ અને તેના ઉકેલો છે, ગણિત સ્પર્ધાઓની માહિતી છે. સ્વ.પ્રા.પ્ર. ચુ. વૈદ્ય, સ્વ. ફાધર વૉલેસ, સ્વ.પ્રા. અરુણભાઈ વૈદ્ય, સ્વ. એ. કે. વિરાણી વગેરે અનેક વિદ્વાનોના લેખો સુગણિતમ્‌ના જૂના અંકોમાં મળશે. સુગણિતમ્‌ના 1 થી 300 અંકોની પેનડ્રાઈવ તૈયાર કરવામાં આવી છે. આ પેનડ્રાઈવ મેળવવા માટે પ્રા. સચીન ગજ્જરનો સંપર્ક કરવો. તેમનો ફોન નંબર આપને **સંપાદક મંડળ અને સંચાલક મંડળ**માંથી મળી જશે.

- પ્રધાન સંપાદક

અમેરિકાની યુનિવર્સિટીઓની શિક્ષણ પદ્ધતિ

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
શેરથા
(M) 94280 19042

પ્રસ્તાવના

ફેબ્રુઆરી 5, 1965ના રોજ હું અને મારો ભાણો રમેશ અમદાવાદથી અભ્યાસ અર્થે સાનફ્રાન્સિસ્કો જવા નીકળ્યા. જેમ અમદાવાદના પરાંઓમાં નવરંગપુરા, નારણપુરા, વાડજ, મણીનગર ગણાય. તેમ સાનફ્રાન્સિસ્કોનાં પરાંઓમાં સ્ટેન્ફર્ડ, ફ્રીમોન્ટ, બર્કલી, સાન રફેલ વગેરે ગણાય. બર્કલીમાં યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફોર્નિયા, બર્કલીનું કેમ્પસ આવેલું છે. અમે બંને યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફોર્નિયા, બર્કલીમાં ભણવા માટે જઈ રહ્યા હતા. સાનફ્રાન્સિસ્કો ઍરપોર્ટથી યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફોર્નિયા, બર્કલીના ઇન્ટરનેશનલ હાઉસે પહોંચ્યા. (અહીં સામાન્ય રીતે પરદેશના વિદ્યાર્થીઓ, અધ્યાપકો રહેતા હોય છે) એક રાત ત્યાં રોકાયા અને પછી ઍપાર્ટમૅન્ટ શોધી કાઢ્યું.

વર્ગમાં પહોંચ્યાના ત્રીજા જ દિવસે નવી સિમેસ્ટર શરૂ થવાની હોઈને આજુબાજુ શું છે તે જોવાનો સમય ન મળ્યો. અમને લિનીઅર ઍલ્જિબ્રા (Linear Algebra) શું છે તેનો ખ્યાલ ન હોઈને લિનીઅર ઍલ્જિબ્રા શરૂ કર્યું. હૉફમેન (Hoffman) અને કુન્ઝનું (Kunze) લખેલું પુસ્તક Linear Algebra બુકસ્ટોરમાંથી ખરીદ્યું. વર્ગમાં ગયા.

અધ્યાપક (D. Lehmer) ડી. લેહમર ખૂબ જ ભલા અને સરસ શિક્ષક હતા. સંખ્યાશાસ્ત્રી તરીકે ખૂબ જ જાણીતા હતા. નિયમિત લેશનના 15 માર્ક્સ, બે મધ્યસત્ર પરીક્ષાઓના (Mid-Term Examinations) 50 માર્ક્સ અને વિષયને આવરી લેતી અંતિમ (Final) પરીક્ષાના 35 માર્ક્સ ગણીને ગ્રેડ આપવામાં આવે. ભારતમાં અમારા માટે એક જ પરીક્ષાના માર્ક્સ ગણાતા અને તે વાર્ષિક પરીક્ષા. તે દિવસોમાં મગજમાં ન બેઠું પહેલા જ દિવસે ગંભીરતાથી ભણાવવાનું શરૂ કર્યું અને બીજા દિવસે મળીએ ત્યારે ગણીને લાવવાનું લેશન આપ્યું. પુસ્તકના પ્રથમ પ્રકરણના પહેલા વિભાગના અંતે આપેલા દાખલાઓમાંથી આશરે છ દાખલાઓ ગણીને લાવવા કહ્યું.

બીજા દિવસે વર્ગમાં ગયા. અમુક રીતે વાળીને લેશનના કાગળો દરેક જણ વર્ગના ટેબલ ઉપર વર્ગની

શરૂઆતમાં મૂકી દેતા. ભણાવવાની શરૂઆત થઈ. વિદ્યાર્થીઓએ લેશનના પ્રશ્નો પૂછ્યા, અમારા અધ્યાપકે પ્રશ્નોના જવાબ આપ્યા. જરૂરી ઉકેલો કઈ રીતે મેળવવા તે પણ ગણી બતાવ્યું. બીજા વિભાગની ચર્ચા થઈ અને તે વિભાગના લેશનના દાખલાઓમાંથી ફરીથી મળીએ ત્યારે છ દાખલાઓ ગણીને લાવવા કહ્યું. અમે બધાયે મૂકેલા લેશનના ઉકેલો તેમની સાથે લઈ ગયા.

આપેલા લેશનને તપાસવાનું કામ ઉપલા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને સોંપવામાં આવે છે. ઉપલા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ જે આ વિષય ભણ્યા હોય અને સારો ગ્રેડ લાવ્યા હોય તેમને ગણિત વિભાગ શોધીને આપે છે. સામાન્ય રીતે 10 માર્ક્સમાંથી માર્ક્સ અપાય છે અને તેની નોંધ આ વિદ્યાર્થીએ રાખવાની હોય છે. બીજા દિવસે અધ્યાપક આ વર્ગને ભણાવવા જાય તે પહેલાં તપાસેલાં પેપરો અધ્યાપકને આપવાનાં હોય છે. જેથી અધ્યાપક તપાસાયેલાં લેશનો વિદ્યાર્થીઓને આપી દઈ શકે. જરૂર હોય તો ચર્ચા કરી શકે. તે દિવસે ફરીથી આગલા વિભાગનું લેશન અપાય છે. ટૂંકમાં અમેરિકન યુનિવર્સિટીઓમાં નિયમિત લેશન અપાય છે અને આપેલા લેશનને તપાસીને બીજા દિવસે વિદ્યાર્થીઓને પાછું અપાય છે.

જે વિદ્યાર્થીઓ આ પેપરો તપાસે છે તેમને તપાસવા માટે થયેલ સમય માટે મહેનતાણું ચુકવાય છે. આવા વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય ફરીથી ભણવા મળે છે જે ભવિષ્યમાં ખૂબ જ ઉપયોગી થાય છે અને હાથખર્ચીના થોડાક પૈસા પણ મળે છે. પેપરો તપાસવાનું કામ વિદ્યાર્થીઓને બધી જ રીતે મદદરૂપ છે. છેલ્લે દરેક વિદ્યાર્થીઓને લેશનના 100માંથી કેટલા ગુણ મળ્યા તે અધ્યાપકને ગણીને આપવાનું હોય છે. બધી પરીક્ષાઓમાં મળેલા માર્ક્સ, લેશનના માર્ક્સ બધું અગાઉ જણાવ્યા પ્રમાણે ગણીને અધ્યાપકો વિદ્યાર્થીઓના ગ્રેડ નક્કી કરે છે. અંતિમ પરીક્ષા પૂરી થયા પછી અઠવાડિયામાં દરેક વિદ્યાર્થીને દરેક વિષયનો ગ્રેડ મળી જાય છે.

એ જ રીતે સંકર વિશ્લેષણના (Complex Analysis) ક્લાસ માટે પહેલા દિવસથી જ લેશન અપાતું અને આ લેશન ગ્રેડનો ભાગ જ ગણાતું. લગભગ બધા જ ઉપલા વર્ગોમાં અને નીચેના વર્ગોમાં નિયમિત લેશન અમેરિકાની યુનિવર્સિટીની શિક્ષણ પદ્ધતિમાં ખૂબ જ અગત્યનો ભાગ છે અને તેના કારણે જ કદાચ અમેરિકાના શિક્ષણ માટે મોટાભાગના લોકો આકર્ષાય છે. મેં ઊડ્ડયન વિજ્ઞાન વિભાગમાં (Aeronautics Department) Viscous Flowનો કોર્સ લીધેલો. અમારા પ્રો. શરમને (Sherman) Viscous Flowનું પુસ્તક પણ લખ્યું છે. તે જાતે જ

અમારા લેશનો અને પરીક્ષાઓ તપાસતા. મેં હમ્બોલ્ટમાં ભણાવવાનું શરૂ કર્યું. ત્યારે ત્યાંથી પસાર થતા હતા અને ખાસ સમય કાઢીને મળવા આવેલા અને અમારા ત્યાં જમેલા. મેં હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટીમાં (હાલમાં નવું નામ CAL POLY Humboldt) 35 વર્ષ આ રીતે જ ભણાવેલું. વિદ્યાર્થીઓ સરસ રીતે તૈયાર થઈને બહાર આવે છે. આ કારણે અમેરિકાનો સામાન્યમાં સામાન્ય વિદ્યાર્થી આપણા હોંશિયાર વિદ્યાર્થી જોડે હરીફાઈ કરી શકે છે. નિયમિત હાજરીનો પ્રશ્ન રહેતો નથી.

અમેરિકા ખૂબ જ સરળતાથી યુનિવર્સિટીઓમાં નિયમિત લેશનનો અમલ કરી શકે છે તો આપણે કેમ ન કરી શકીએ ? મને એટલો બધો વિશ્વાસ છે કે જો આપણે નિયમિત લેશન પદ્ધતિ અપનાવીશું તો આપણી શિક્ષણ પદ્ધતિ ખૂબ જ સરસ બની જશે અને આપણે પરદેશના વિદ્યાર્થીઓને આકર્ષીને અમેરિકાની જેમ હૂંડિયામણ પણ કમાઈ શકીશું.

આથી જો કોઈને આ પદ્ધતિ અપનાવવી હોય અને વિદ્યાર્થીઓના મહેનતાણાનો પ્રશ્ન હોય તો મારો સંપર્ક સાધશો. મારું e-mail એડ્રેસ vap1226@yahoo.com છે અને મારો મોબાઈલ નંબર : 94280 19042 છે. જરૂર હોય તો આ બધું કઈ રીતે અમલમાં મૂકી શકાય તે પણ બતાવીશ. આશા રાખું કે ઘણા બધા નિયમિત લેશન આપવાનો પ્રયત્ન કરશે. અમેરિકામાં

(૧) દરરોજ નિયમિત લેશન અપાય છે, તપાસાય છે અને લેશનના માર્ક્સ ગ્રેડનો ભાગ છે.

(૨) ભણાવનાર અધ્યાપક જ લેશન, મધ્યમાં અપાતી બે પરીક્ષાઓ અને આખા વિષયને આવરી લેતી અંતિમ પરીક્ષાના ગુણો ઉપરથી જ વિદ્યાર્થીનો અંતિમ ગ્રેડ નક્કી કરે છે. આપણે જો આ અપનાવીએ તો અંતિમ પરીક્ષા પછીના દશ દિવસમાં પરિણામો જાહેર કરી શકીએ અને વિદ્યાર્થીઓને પરીક્ષા ફી ભરવી ન પડે.

આ બંને રીતો આપણે અપનાવવાનો પ્રયત્ન કરવો જોઈએ. સરકારને આ દિશામાં આગળ વધવા માટે ગુજરાત ગણિત મંડળે દબાણ લાવવું જોઈએ.

ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ – એક રસપ્રદ ગુણધર્મ

પી. કે. વ્યાસ
39, સનરાઈઝ ટેનામેન્ટ્સ, P.O. બોડકદેવ, અમદાવાદ-380 054
(M) 98255 77784

સુગણિતમ્‌ના વાચકો માટે **ત્રિકોણીય સંખ્યા** શબ્દ અજાણ્યો નથી. ગ્રીકોના જમાનાથી આ સંખ્યાઓ જાણીતી છે. અહીં ત્રિકોણીય સંખ્યાનો સામાન્ય પરિચય અને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓની નાનકડી યાદી આપી લેખની શરૂઆત કરીએ.

પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $\frac{n(n+1)}{2}$ પ્રકારની સંખ્યાને n મી ત્રિકોણીય સંખ્યા કહેવામાં આવે છે અને તેને Δ_n વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ n મી ત્રિકોણીય સંખ્યા $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

વળી પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો:

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\therefore \Delta_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$ એ ત્રિકોણીય સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ પરથી આ શ્રેણીનાં પ્રથમ દસ પદ નીચે પ્રમાણે મળે છે.

$$\Delta_1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1,\ \Delta_2 = \frac{2\cdot 3}{2} = 3,\ \Delta_3 = \frac{3\cdot 4}{2} = 6,\ \Delta_4 = \frac{4\cdot 5}{2} = 10,$$
$$\Delta_5 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15,\ \Delta_6 = \frac{6\cdot 7}{2} = 21,\ \Delta_7 = \frac{7\cdot 8}{2} = 28,\ \Delta_8 = \frac{8\cdot 9}{2} = 36,$$
$$\Delta_9 = \frac{9\cdot 10}{2} = 45, \Delta_{10} = \frac{10.11}{2} = 55.$$

શા માટે આ સંખ્યાઓને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ કહેવામાં આવે છે ? ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ ગણિતમાં (અને ભૂમિતિમાં પણ) ક્યાં ક્યાં જોવામાં આવે છે ? આ પ્રશ્નોના ઉત્તર કોઈ બીજા લેખમાં આપીશું. અહીં પ્રથમ દસ ક્રમની ત્રિકોણીય સંખ્યાઓની યાદી આપી છે. પણ તેથી મોટા ક્રમની ત્રિકોણીય સંખ્યાની જરૂર પણ પડશે. તે વખતે આપણે $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ નો ઉપયોગ કરીશું. જેમકે 26મી ત્રિકોણીય સંખ્યા $\Delta_{26} = \frac{26.27}{2} = 351$. વળી 26મા ક્રમની ત્રિકોણીય સંખ્યા મેળવ્યા પછી તેના પછીના ક્રમની (27મી) કે તેની પહેલાંના ક્રમની (25મી)

ત્રિકોણીય સંખ્યા શોધવા માટે ઉપરોક્ત ગણતરી ફરી કરવાની જરૂર નથી. Δ_n પરથી Δ_{n+1} અને Δ_{n-1} શોધવા માટે નીચેનાં સૂત્રો ઉપયોગી થશે. આ સૂત્રો વ્યાખ્યાની મદદથી શરળતાથી મેળવી શકાય.

$\Delta_{n+1} = \Delta_n + (n+1);\ \ \Delta_{n-1} = \Delta_n - n$

(આ લેખના અંતે વાચકો માટે એક પ્રશ્ન મૂક્યો છે. તે પ્રશ્નના ઉકેલ માટે ઉપરોક્ત સૂત્રો ઉપયોગી થશે.)

આ લેખના શીર્ષકમાં જણાવ્યું છે તે રસપ્રદ ગુણધર્મની ચર્ચા કરતાં પહેલાં એક પૂર્વપ્રમેય અને તેના પ્રતિ પ્રમેયની જરૂર પડશે.

પૂર્વ પ્રમેય : કોઈ પણ ત્રિકોણીય સંખ્યાનાં આઠગણાં કરી તેમાં 1 ઉમેરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

જેમકે $8\Delta_{10} + 1 = 8(55) + 1 = 441 = 21^2$ ($\because \Delta_{10} = 55$)

વ્યાપક રીતે : $8\Delta_n + 1 = 8\frac{n(n+1)}{2} + 1$

તેથી, $8\Delta_n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$ ....(1)

સૂત્ર(1)માં જમણી બાજુએ મળતી સંખ્યા $(2n+1)^2$ અયુગ્મ પૂર્ણાંકનો વર્ગ છે અને તેની ન્યૂનતમ કિંમત, $n = 1$ માટે, $[2(1)+1]^2 = 9$ છે.

હવે એ જોવું સહેલું છે કે કોઈપણ અયુગ્મ પૂર્ણાંકનો વર્ગ હંમેશાં 8X+1 પ્રકારનો હોય. દા.ત. $7^2 = 49 = 8 \times 6 + 1$

એટલે કે અયુગ્મ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાને 8 વડે ભાગતાં શેષ 1 મળે. ભાગફળ (Quotient) કેટલું મળે ? આપણે સાબિત કરીએ કે ભાગફળ હંમેશાં ત્રિકોણીય સંખ્યા મળશે.

પ્રતિ પ્રમેય : 1 સિવાયની કોઈપણ અયુગ્મ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાને 8 X+1 સ્વરૂપે દર્શાવીએ તો $X = \Delta$ (Δ એ ત્રિકોણીય સંખ્યાનો સંકેત છે.)

સાબિતી સરળ છે.

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1\\ &= 4n(n+1) + 1\\ &= 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + 1\\ &= 8\,X + 1, \text{ જ્યાં } X = \frac{n(n+1)}{2} = \Delta_n\end{aligned}$$

જો $8\Delta_n + 1 = (2n+1)^2$ લખીએ તો જમણી બાજુએ જે અયુગ્મ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે છે તેનો ક્રમ અને ડાબી બાજુની ત્રિકોણીય સંખ્યાનો ક્રમ સમાન છે. યાદ એ રાખવાનું છે કે અયુગ્મ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓમાં પહેલી સંખ્યા 9 ગણવાની છે, 1 નહિ, કારણ કે $(2n+1)^2$માં n પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. આપણે આગળ જોઈ ગયા કે $n = 1$ માટે $(2n+1)^2$ની ન્યૂનતમ કિંમત 9 મળે છે.

હવે આપણે ત્રિકોણીય સંખ્યાના એક રસપ્રદ ગુણધર્મની વાત કરીએ. શરૂઆત થોડાંક ઉદાહરણોથી કરીએ. નીચે Aમાં ત્રિકોણીય સંખ્યાઓને સાંકળતી ત્રણ અભિવ્યક્તિઓ (Expressions) આપી છે.

A : (i) $1\Delta_3 + 2\Delta_5 + 3\Delta_7 + 4\Delta_9$

(ii) $1\Delta_4 + 2\Delta_7 + 3\Delta_{10} + 4\Delta_{13} + 5\Delta_{16}$

(iii) $1\Delta_5 + 2\Delta_9 + 3\Delta_{13} + 4\Delta_{17} + 5\Delta_{21} + 6\Delta_{25}$

આશ્ચર્યની વાત એ છે કે **ઉપર આપેલી પ્રત્યેક અભિવ્યક્તિને સાદું રૂપ આપતાં મળતી સંખ્યા એ ત્રિકોણીય સંખ્યા** છે. આગળ આપણે Δ_{10} સુધીની ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ લખી છે. અહીં ત્રીજી અભિવ્યક્તિમાં તો Δ_{25} સુધી જવાનું છે. ગણતરી થોડી કંટાળાજનક છે. આપણે ત્રીજી અભિવ્યક્તિને સાદું રૂપ આપી ચકાસણી કરીએ પછી વ્યાપક પરિણામ આપી, તે સાબિત કરીએ.

$$\Delta_5 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15;\ \Delta_9 = \frac{9\cdot 10}{2} = 45;\ \Delta_{13} = \frac{13\cdot 14}{2} = 91;\ \Delta_{17} = \frac{17\cdot 18}{2} = 153;$$

$$\Delta_{21} = \frac{21\cdot 22}{2} = 231;\ \Delta_{25} = \frac{25\cdot 26}{2} = 325.$$

અને તેથી, $1\Delta_5 + 2\Delta_9 + 3\Delta_{13} + 4\Delta_{17} + 5\Delta_{21} + 6\Delta_{25}$

$$= 1\cdot 15 + 2\cdot 45 + 3\cdot 91 + 4\cdot 153 + 5\cdot 231 + 6\cdot 325$$

$$= 15 + 90 + 273 + 612 + 1155 + 1950$$

$$= 4095 = \frac{8190}{2} = \frac{90\cdot 91}{2} = \Delta_{90}$$

આમ, આપેલ ત્રીજી અભિવ્યક્તિ ત્રિકોણીય સંખ્યા છે તે તો સ્પષ્ટ થયું. બાકીની બે અભિવ્યક્તિઓ પણ ત્રિકોણીય સંખ્યા આપશે તેની ચકાસણી વાચક પર છોડી વ્યાપક પરિણામ તરફ વળીએ.

Aમાં આપેલ ત્રણેય અભિવ્યક્તિઓનું અવલોકન કરતાં નીચેનાં તારણો મળશે.

(a) દરેક અભિવ્યક્તિમાં આવતી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના સહગુણકો 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... એ 1 થી શરૂ થતી ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે.

(b) દરેક અભિવ્યક્તિમાં આવતી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના ક્રમ સમાંતર શ્રેણીમાં નીચે મુજબ છે.

અભિવ્યક્તિ (i) 3, 5, 7, 9, ... સામાન્ય તફાવત : 2

અભિવ્યક્તિ (ii) 4, 7, 10, 13, 16, ... સામાન્ય તફાવત : 3

અભિવ્યક્તિ (iii) 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... સામાન્ય તફાવત : 4

(c) ઉપરના અવલોકન (b)માં આપેલ ત્રણેય સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમપદ (3, 4, 5), 1 થી મોટી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે.

ઉપરનાં તારણો પરથી વ્યાપક સ્વરૂપે પરિણામ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

વ્યાપક સૂત્ર :

પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n અને નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક d માટે

$$1\Delta_{1+d} + 2\Delta_{1+2d} + 3\Delta_{1+3d} + \cdots + n\Delta_{1+nd} = \Delta_{\mathrm{N}} \qquad ....(2)$$

એટલે કે ડાબીબાજુને સાદું રૂપ આપતાં આપણને એક ત્રિકોણીય સંખ્યા Δ_{N} મળશે. આ ત્રિકોણીય સંખ્યાના ક્રમ Nને ડાબી બાજુએ આપેલી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના સહગુણકો $(1, 2, 3, \dots n)$ અને તે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના ક્રમ $(1+d, 1+2d, \dots 1+nd)$ સાથે શો સંબંધ છે ? બીજી રીતે કહીએ તો Nને n અને dના સ્વરૂપમાં મેળવી શકાય ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર પણ મળી જશે.

પહેલાં તો આપણે સૂત્ર (2)ની ડાબી બાજુનું સાદું રૂપ એક ત્રિકોણી સંખ્યા છે તે સાબિત કરીએ.

ધારો કે (2) માં આપેલ સૂત્રની ડાબી બાજુ એ આપેલો સરવાળો X છે. એટલે કે

$$\mathrm{X} = 1\Delta_{1+d} + 2\Delta_{1+2d} + 3\Delta_{1+3d} + \cdots + n\Delta_{1+nd}$$

$$\therefore X = \sum_{k=1}^{n} k\Delta_{1+kd} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k(1+kd)(2+kd)}{2}\right] \quad \left[\because \Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\therefore 2X = \sum_{1}^{n} k(k^2d^2 + 3kd + 2)$$

$$= d^2\sum_{1}^{n} k^3 + 3d\sum_{1}^{n} k^2 + 2\sum_{1}^{n} k$$

$$= \frac{d^2n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3dn(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

સમીકરણને 4 વડે ગુણી 1 ઉમેરતાં

$$8X + 1 = [dn(n+1)]^2 + 2dn(n+1)(2n+1) + 4n(n+1) + 1$$

$$= [dn(n+1)]^2 + 2[dn(n+1)](2n+1) + (2n+1)^2$$

$\therefore 8X + 1 = [dn(n+1) + 2n + 1]^2$ ....(3)

હવે $n(n+1)$ અને $2n$ યુગ્મ છે. તેથી $[dn(n+1) + 2n + 1]$ અયુગ્મ છે. આમ પરિણામ (3)ની જમણી બાજુ એ 1 થી મોટી અયુગ્મ સંખ્યાનો વર્ગ છે. જેને આપણે $8X + 1$ તરીકે દર્શાવ્યો છે.

∴ આપણે આગળ સાબિત કરેલા પ્રતિપ્રમેય મુજબ X ત્રિકોણીય સંખ્યા છે.

આપણું અર્ધું કામ પુરું થયું. આપણે સાબિત કર્યું કે

$1\Delta_{1+d} + 2\Delta_{1+2d} + 3\Delta_{1+3d} + \cdots + n\Delta_{1+nd} = X$ હોય તો X ત્રિકોણી સંખ્યા છે. ધારો કે ત્રિકોણીય સંખ્યા Xનો ક્રમ N છે. પરિણામ (1) ફરી યાદ કરીએ અને હવે $X = \Delta_N$ લખીશું.

(1) મુજબ $(2N+1)^2 = 8\Delta_N + 1$

(3) મુજબ $8X + 1 = 8\Delta_N + 1 = [dn(n+1) + 2n + 1]^2$

આમ $dn(n+1) + 2n + 1 = 2N + 1$

$$N = \frac{1}{2}[dn(n+1) + 2n] = \frac{n}{2}[d(n+1) + 2] \quad ....(4)$$

આમ આપણને નિત્યસમ (2)ની ડાબી બાજુએ આવતા n અને dના સ્વરૂપમાં જમણીબાજુએ મળતી ત્રિકોણીય સંખ્યાના ક્રમ Nની અભિવ્યક્તિ મળી ગઈ.

એક પ્રશ્ન તો મનમાં ઉદ્ભવે કે આ સંખ્યા $\frac{n}{2}[d(n+1) + 2]$ ને (2)ની ડાબી બાજુએ આપેલ ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના ક્રમાંકોની શ્રેણી $1+d, 1+2d, 1+3d, \ldots, 1+nd$ સાથે કોઈ સંબંધ છે ?

આપણે ક્રમાંકોની આ શ્રેણીનો સરવાળો કરી જોઈએ.

$$(1+d) + (1+2d) + (1+3d) + \cdots + (1+nd)$$
$$= (1+1+1+\cdots+1) + d(1+2+3+\cdots+n)$$
$$= n + \frac{dn(n+1)}{2} = \frac{n}{2}[d(n+1) + 2]$$

જૂઓ કે (4)ની જમણી બાજુએ આ જ સંખ્યા છે અને તેથી આપણા વ્યાપક પરિણામને નીચે પ્રમાણે લખીએ.

$$1\Delta_{1+d} + 2\Delta_{1+2d} + 3\Delta_{1+3d} + \cdots + n\Delta_{1+nd} = \Delta_N,$$

જ્યાં, $N = (1+d) + (1+2d) + (1+3d) + \cdots + (1+nd)$

$$= \frac{n}{2}[d(n+1)+2] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(5)માં (i) $n = 4$ અને $d = 2$ મૂકતાં

$1\Delta_3 + 2\Delta_5 + 3\Delta_7 + 4\Delta_9 = \Delta_{(3+5+7+9)} = \Delta_{24}$ મળશે.

(ii) $n = 5$ અને $d = 3$ મૂકતાં

$1\Delta_4 + 2\Delta_7 + 3\Delta_{10} + 4\Delta_{13} + 5\Delta_{16} = \Delta_{50}$ મળશે.

(ii) $n = 6$ અને $d = 4$ મૂકતાં

$1\Delta_5 + 2\Delta_9 + 3\Delta_{13} + 4\Delta_{17} + 5\Delta_{21} + 6\Delta_{25} = \Delta_{90}$ મળશે.

આ પરિણામ (iii)ની ચકાસણી આપણે પ્રશ્નની શરૂઆતમાં જ કરી છે.

છેલ્લે વાચકો માટે એક પ્રશ્ન રજૂ કરી લેખ પૂરો કરીએ.

$1\Delta_2 + 2\Delta_3 + 3\Delta_4 + \cdots + n\Delta_{n+1} = \Delta_N$ **હોય તો નિત્યસમ (5)નો ઉપયોગ કરી Nનું મૂલ્ય મેળવો અને પછી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી પરિણામ સાબિત કરો.**

ઉપરોક્ત લેખ **સ્વ.મગનલાલ ના. ખત્રી (M. N. Khatri)** લિખિત પુસ્તક Excursion in the World of Numbersમાં આપેલા એક પરિણામ પર આધારિત છે. ખત્રી સાહેબે આ પરિણામની ચર્ચા ઉપરોક્ત પુસ્તકના માત્ર એક પાના (પાના 43) પર કરી છે.

સ્વ. પ્રા. અરુણભાઈએ જામનગર અધિવેશન દરમિયાન આપેલ વ્યાખ્યાનમાં સ્વ. ખત્રી સાહેબ અને તેમના ઉપરોક્ત પુસ્તકનો ઉલ્લેખ કર્યો હતો.

* * * * *

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ : આબેલ પુરસ્કાર 2020ના વિજેતા ગ્રેગરી માર્ગુલીસ

ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ,
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ, ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત.

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ લેખશ્રેણીના દસમા લેખમાં જેમને વર્ષ 2020નું આબેલ પુરસ્કાર એનાયત કરવાની ઘોષણા કરવામાં આવે છે તે ગણિતજ્ઞ હિલ્લે ફર્સ્ટનબર્ગનાં જીવન અને કાર્યોની જાણકારી રજૂ કરવામાં આવી હતી. તેમને આ પુરસ્કાર ગણિતજ્ઞ ગ્રેગરી માર્ગુલીસ સાથે સંયુક્ત રીતે એનાયત કરવામાં આવ્યું છે. આ લેખમાળાના અગિયારમાં લેખમાં આ રશિયન-અમેરિકન ગણિતજ્ઞ ગ્રેગરી માર્ગુલીસનાં જીવન તથા કાર્યોની માહિતી પ્રસ્તુત કરેલ છે.

માર્ગુલીસે પોતાની કારકિર્દીમાં ઘણા પ્રભાવી વિચારો રજૂ કર્યા છે. આ ઉપરાંત તેમણે લાંબા સમયથી વણઉકેલાયેલા પ્રશ્નોને હલ કર્યા છે તથા વિવિધ ગાણિતિક ક્ષેત્રો વચ્ચેનાં ગહન જોડાણો વિકસિત કર્યા છે. આ ઉપરાંત પોતાની કુનેહ તથા અનન્ય અભિગમ દ્વારા એર્ગોડિક સિદ્ધાંત (Ergodic Theory)નો ખૂબજ અનપેક્ષિત તથા કુશળતાપૂર્વક રીતે ઉપયોગ કરીને ગણિતશાસ્ત્રમાં સંપૂર્ણરૂપે નવીન ક્ષેત્રનું સર્જન કર્યું છે. તેમણે અર્ધસરળ સમૂહ (semi-simple group)ની જાળી (lattice)ના અભ્યાસના ક્ષેત્રમાં ક્રાંતિકારી કાર્ય કર્યું છે. તેઓએ વર્ષ 1978માં ફિલ્ડ્ઝ મેડલ, વર્ષ 2005માં વુલ્ફ પારિતોષિક તથા વર્ષ 2020માં આબેલ પુરસ્કાર જેવા પ્રતિષ્ઠિત તથા સર્વોચ્ચ સન્માન મેળવ્યા છે. તેઓ આ ત્રણેય સન્માન મેળવનાર પાંચમા ગણિતજ્ઞ બન્યા છે.

ગ્રેગરી એલેક્ઝાન્ડ્રોવિચ માર્ગુલીસ (Grigory Aleksandrovich Margulis)નો જન્મ 24 ફેબ્રુઆરી 1946ના રોજ સોવિયેત સંઘની રાજધાની મોસ્કોમાં વસવાટ કરતા લિથુનિયન યહૂદી મૂળના રશિયન પરિવારમાં થયો હતો. વર્ષ 1962માં 16 વર્ષની ઉંમરે તેમણે International Mathematical Olympiadમાં રજતચંદ્રક સ્વરૂપે પ્રથમ આંતરરાષ્ટ્રીય સન્માન મેળવ્યું હતું. ત્યારબાદ વિવિધ મંચ પર તેમણે પોતાની ગણિત પ્રતિભા પ્રદર્શિત કરી હતી. વર્ષ 1968માં તેઓ અનુસ્નાતક વિદ્યાર્થી હતા તે સમયે મોસ્કો મૅથેમૅટિકલ સોસાયટી દ્વારા એનાયત થતું 'યુવા ગણિતજ્ઞ પારિતોષિક' તેમણે મેળવ્યું હતું. વર્ષ 1970માં તેમણે પ્રૉ. યાકોવ સિનાઈના માર્ગદર્શન હેઠળ 'On some problems in the theory of U-systems' વિષય પર મહાનિબંધ તૈયાર કર્યો હતો, જેને માન્ય રાખીને મોસ્કો સ્ટેટ યુનિવર્સિટી દ્વારા માર્ગુલીસને Ph.D.ની પદવી એનાયત કરવામાં આવી હતી. આ કાર્યમાં માર્ગુલીસે માપ(measure)નો નવીનતમ તથા મૌલિક ખ્યાલ પ્રસ્તુત કર્યો હતો, જે હવે બોવેન-માર્ગુલીસ માપ તરીકે ઓળખાય છે. આ ખ્યાલના ઉપયોગથી તેમણે અતિવલીય અવકાશની ભૂમિતિના કેટલાય નવા ગુણધર્મો શોધી કાઢ્યા હતા. આ ઉપરાંત તેમણે આ વિચારનો ઉપયોગ કરીને વૈશ્લેષિક સંખ્યાગણિત (analytic number theory)ના ક્ષેત્રના ખૂબજ અગત્યના એવા Prime Number Theoremના અન્ય સ્વરૂપની સાબિતી પણ રજૂ કરી હતી. તેમનાં આ કાર્ય તથા વિશિષ્ટ પદ્ધતિએ કેટલાય નવા પ્રશ્નો તથા અન્ય ક્ષેત્રોમાં સંશોધન માટે સંશોધકોને પ્રેરિત કર્યા હતા.

Ph.D.ની પદવી મેળવ્યા બાદ કારકિર્દીની શરૂઆતના સમયમાં માર્ગુલીસને યહૂદી મૂળના હોવાના કારણસર જાતિગત ભેદભાવનો સામનો કરવો પડ્યો હતો. દેશના સર્વોચ્ચ યુવા ગણિતશાસ્ત્રીઓમાં તેમની ગણના થતી હોવા છતાં પણ તેમને મોસ્કો યુનિવર્સિટીમાં નોકરી મેળવવામાં સફળતા મળી ન હતી. તેના બદલે તેમને ઘણા ઓછા પ્રતિષ્ઠિત એવા સંશોધન કેન્દ્ર Institute of Problems of Information Transmissionમાં કાર્ય કરીને સંતોષ માનવો પડ્યો હતો. આ સંસ્થામાં વર્ષ 1970થી 1974 દરમિયાન Junior Scientific Worker, વર્ષ 1974થી 1986 દરમિયાન Senior Scientific Worker તથા વર્ષ 1986 બાદ Leading Scientific Worker તરીકે તેમણે કાર્ય કર્યું હતું. અહીં સહકાર્યકરો સાથેના સંપર્કના ફળસ્વરૂપે તેમણે નિરૂપણ સિદ્ધાંત (Representation Theory)ના ખ્યાલોનો અનપેક્ષિત રીતે ઉપયોગ કરીને વિસ્તારક ગ્રાફ (Expander Graph) શ્રેણીનાં પ્રથમ ઉદાહરણો શોધી કાઢ્યાં હતાં. તેમની આ શોધ સમય જતા ખૂબજ ઉપયોગી સાબિત થઈ હતી. આજે કમ્પ્યૂટર વિજ્ઞાન તથા ત્રુટિ-સુધાર સંકેત (Error-Correcting Code)ના ક્ષેત્રમાં પાયાના સાધન તરીકે તેનો ઉપયોગ થાય છે. વર્ષ 1988માં માર્ગુલીએ ઈષ્ટતમ વિસ્તારકો (optimal expanders)ની રચના કરી હતી, જે હવે રામાનુજન ગ્રાફ તરીકે પ્રચલિત છે.

વર્ષ 1975માં તેમણે Super rigidity પ્રમેયની સાબિતી આપી હતી, જે લી-સમૂહની જાળીમાં સમાવિષ્ટ અંકગણિતીય સમૂહોના ગુણધર્મોને લગતા પ્રશિષ્ટ અનુમાનના ક્ષેત્રને સ્પષ્ટ રીતે સમજવામાં મદદરૂપ થઈ હતી. આજ સમયગાળામાં તેમણે એટ્લે સેલબર્ગ દ્વારા જાળીના સંદર્ભમાં કરવામાં આવેલ અનુમાનની પણ સાબિતી રજૂ કરી હતી.

વર્ષ 1978માં માર્ગુલીએ અદ્‌ભુત અને આશ્ચર્યજનક રીતે પ્રમેયો સાબિત કરવાની તેમની હથોટીનો વધુ એક પરિચય આપ્યો હતો. તે સમયે તેમણે લી-સમૂહની જાળીના સંદર્ભે 'નિયત ઉપસમૂહ પ્રમેય' પ્રસ્તુત કર્યો હતો. તેમણે અદ્‌ભુત તથા આશ્ચર્યજનક રીતે સંભાવનાત્મક રીતે જેવી કે યાદચ્છિક ચાલ, ઓસેલેડેટ પ્રમેય, યોગ્યતા, ફર્સ્ટનબર્ગ સીમા અને નિરૂપણ સિદ્ધાંતનાં કાર્યોમાંથી કાઝદાન ગુણધર્મના અસાધારણ અને મૌલિક સંયોજન દ્વારા આ સાબિતી રજૂ કરી હતી. ગણિતજ્ઞ ડેવિડ કાઝદાન સાથે તેમનાં કાર્યોના ફળ સ્વરૂપે વિકીર્ણ સમૂહ (Discrete Group)ના ક્ષેત્રમાં મૂળભૂત પ્રકારનું પરિણામ 'કાઝદાન-માર્ગુલીસ પ્રમેય' રજૂ કરવામાં તેઓ સફળ રહ્યા હતા.

વર્ષ 1978માં ફક્ત 32 વર્ષની ઉંમરે માર્ગુલીસને લી-સમૂહમાં જાળીનાં તેમનાં કાર્યો માટે સર્વોચ્ચ આંતરરાષ્ટ્રીય સન્માન-ફિલ્ડ્ઝ મેડલ એનાયત

કરવાની ઘોષણા કરવામાં આવી હતી. પરંતુ યહૂદીઓ પ્રત્યેના અણગમાના કારણસર સોવિયત સત્તાધીશો દ્વારા તેમને ફિનલેન્ડની રાજધાની હેલસિન્કી ખાતે આયોજિત International Congress of Mathematiciansમાં હાજર રહીને ફિલ્ડ્ઝ મેડલ સ્વીકારવા માટે પ્રવાસની પરવાનગી આપવામાં આવી ન હતી.

થોડા સમય બાદ સત્તાધીશોના કૂણા વલણના કારણે રશિયન વિદ્વાનોને વધુ વ્યક્તિગત સ્વતંત્રતા મળી હતી. આથી વર્ષ 1980 દરમિયાન તેઓએ સ્વિટ્ઝર્લૅન્ડ, ફ્રાન્સ તથા અમેરિકા સ્થિત શૈક્ષણિક સંસ્થાઓની મુલાકાત લીધી હતી. આ દરમિયાન તેમણે બોન યુનિવર્સિટીમાં ત્રણ માસ જેટલો સમય પસાર કર્યો હતો. વર્ષ 1988થી 1991ના સમયગાળા દરમિયાન માર્ગુલીસે બોનની Max Planck Institute, Institute des Hautes Ètudes Collège de France, હાર્વર્ડ યુનિવર્સિટી તથા પ્રિન્સ્ટન યુનિવર્સિટીની Institute for Advanced Studyની કેટલીયે મુલાકાતો લીધી હતી. વર્ષ 1991માં તેઓ અમેરિકાની યેલ યુનિવર્સિટીમાં જોડાયા હતા.

માર્ગુલીસની ઉત્કૃષ્ટતાનો વધુ એક પરિચય વર્ષ 1984માં સંખ્યા ગણિતના ક્ષેત્રમાં તેમણે રજૂ કરેલ ઓપ્પેનહેઈમ અનુમાનની સાબિતી દ્વારા જોવા મળે છે, જેમાં તેમણે અર્ગોડિક સિદ્ધાંત (Ergodic Theory)ની પદ્ધતિઓ તથા સંખ્યાગણિતનું સંયોજન કર્યું હતું. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ પાસે અનિયત તથા અસંમેય દ્વિઘાત સ્વરૂપોની કિંમતો સાથે સંકળાયેલ આ અનુમાન વર્ષ 1929માં પ્રથમવાર રજૂ કરવામાં આવ્યું હતું અને અડધી સદી સુધી આ અનુમાન વણઉકેલાયેલ રહ્યું હતું. આ અનુમાનની સાબિતીમાં માર્ગુલીસે અર્ગોડિક સિદ્ધાંતનો જે અદ્વિતીય રીતે ઉપયોગ કર્યો હતો તે તરકીબે સમય જતાં આ ક્ષેત્રનાં કાર્યો પર ગહન છાપ છોડી હતી. તેમની આ પદ્ધતિ દ્વારા ગણિતશાસ્ત્રના એક નવીન ક્ષેત્રનું સર્જન થયું હતું, જે હવે Homogeneous Dynamics તરીકે ઓળખાય છે. માર્ગુલીસના શબ્દોમાં "The different approaches to this and related conjectures (and theorems) involve analytic number theory, the theory of Lie group and algebraic groups, ergodic theory, representation theory, reduction theory, geometry of numbers and some other topics." તાજેતરના ત્રણ ફિલ્ડ્ઝ મેડલ ધારકો એલોન લિન્ડનસ્ટ્રાસ, મરિયમ મિર્ઝાખાની અને અક્ષય વેંકટેશે તેમના કાર્યોમાં માર્ગુલીસના અગાઉના ખ્યાલોનો પાયા સ્વરૂપે ઉપયોગ કર્યો છે.

માર્ગુલીસને તેમનાં કાર્યો માટે કેટલાંય સન્માનો વડે નવાજવામાં આવ્યા છે. ફિલ્ડ્ઝ મેડલ ઉપરાંત તેમને વર્ષ 1991માં Medal of the College de France એનાયત કરવામાં આવ્યો હતો અને તે જ વર્ષે તેઓ American Academy of Arts and Scienceના માનદ્ સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા હતા. વર્ષ 1995માં તેમને હમ્બોલ્ટ પારિતોષિક એનાયત થયું હતું અને વર્ષ 1996માં તેઓ ટાટા ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ફન્ડામેન્ટલ રિસર્ચના સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા હતા. આ ઉપરાંત તેમને Russian Academy of Sciences દ્વારા લોબાચેવ્સ્કી પુરસ્કાર પણ એનાયત કરવામાં આવ્યું હતું તથા અમેરિકાની નેશનલ એકેડેમી ઑફ

સાયન્સીસમાં પણ તેઓ માનદ્ સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા હતા.

વર્ષ 2005માં તેમને અન્ય એક સર્વોચ્ચ પુરસ્કાર- વુલ્ફ પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યું હતું. આ પુરસ્કારની પ્રશસ્તિ-નોંધ મુજબ- "The prize is awarded for his monumental contributions to algebra, in particular to the theory of lattices in semi-simple Lie group and striking applications of this to ergodic theory, representation theory, number theory, combinatorics and measure theory."

માર્ગુલીસે ભિન્ન ક્ષેત્રોમાં વિપુલ પ્રમાણમાં ખૂબજ ક્રાંતિકારી અને ફળદ્રુપ કાર્ય કર્યું છે. વર્ષ 2008માં Pure and Applied Mathematics Quarterly સામયિકે માર્ગુલીસના સન્માનમાં તેમનાં મુખ્ય પરિણામોની વિગતવાર સૂચિ દર્શાવતો એક લેખ પ્રકાશિત કર્યો હતો. તે સૂચિદર્શક લેખ 50 પાનાંની લંબાઈ ધરાવતો હતો !!

લેખની શરૂઆતમાં જણાવ્યાનુસાર વર્ષ 2020માં માર્ગુલીસને તેમનાં કાર્યો માટે આબેલ પુરસ્કાર એનાયત કરવાની ઘોષણા કરવામાં આવી. તેમને આ પુરસ્કાર ગણિતજ્ઞ હિલ્લે ફર્સ્ટનબર્ગ સાથે સંયુક્ત રીતે એનાયત થયું.

પ્રતિવર્ષ મે મહિનામાં આયોજિત થતું આબેલ પુરસ્કાર સમારંભ વર્ષ 2020માં COVID-19ની મહામારીના કારણસર મુલતવી રાખવામાં આવ્યો હતો. વર્ષ 2021માં આયોજિત, આવા સમારંભ દરમિયાન વર્ષ 2020 તથા વર્ષ 2021ના વિજેતાઓને પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યા. ફર્સ્ટનબર્ગ તથા માર્ગુલીસની આબેલ પુરસ્કાર પ્રશસ્તિ નોંધ અનુસાર- "This prize is awarded for pioneering the use of methods from probability and dynamics in group theory, number theory and combinatorics."

ફર્સ્ટનબર્ગ અને માર્ગુલીસનાં કાર્યોનો પ્રભાવ તેમનાં પરિણામો તથા તેમના મૂળ ક્ષેત્રથી આગળ વધીને કેટલાંય વિવિધ ક્ષેત્રો સુધી વિસ્તરેલ છે. લી પદ્ધતિ, વિકીર્ણ સમૂહ, યાદચ્છિક શ્રેણિકોથી લઈને કમ્પ્યૂટર વિજ્ઞાન તથા ગ્રાફ થિયરી સુધીના ક્ષેત્રોના અગ્રેસર સંશોધક તરીકે તેઓની ગણના થાય છે. તેમનાં કાર્યો દ્વારા કેવળ ગણિત (Pure Mathematics) તથા પ્રયુક્ત ગણિતશાસ્ત્ર (Applied Mathematics) જેવા પરંપરાગત રીતે વર્ગીકરણ થયેલ ગણિતશાસ્ત્રના બે ભિન્ન (?) પ્રવાહોને પાર કરવાની અસરકારકતા અને સર્વવ્યાપકતા આ બન્ને ગણિતજ્ઞોએ પ્રદર્શિત કરેલ છે.

ગ્રેગરી માર્ગુલીસ આવનારા સમયમાં ગણિતશાસ્ત્રની હજુ વધુ સેવા કરે અને વિષયને વધુને વધુ સમૃદ્ધ કરે તેવી અભ્યર્થના.

સંદર્ભ

(1) http://mathshistory.st-andrews.ac.uk / Biographies/margulis.html

(2) https://en.wikipedia.org/wiki/Grigory_Margulis

(3) abelprize.no/fingil/download.php?tid=76077

પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આચમન-1

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ (M) 99258 37247

ભારતવર્ષનો સાંસ્કૃતિક વારસો બહુઆયામી છે. વેદકાળમાં આપણા ઋષિમુનિઓએ મેળવેલ જ્ઞાન અને કરેલી શોધો આપણાં પ્રાચીન ગ્રંથો-વેદો, ઉપનિષદો, પુરાણો તથા અન્યમાં સંગૃહિત છે, જે આપણો જ્ઞાનવારસો છે. તેમાં ધર્મદર્શન અને જીવનદર્શનથી માંડીને આયુર્વેદ, અન્ય વિજ્ઞાન અને ગણિતશાસ્ત્રનો સમાવેશ થાય છે. આપણું એ દુર્ભાગ્ય છે કે આપણે આ વારસાથી પૂરેપૂરા પરિચિત થયા નથી, અથવા એમ કહી શકાય કે મોટેભાગે એનાથી અજાણ છીએ. વિશેષતઃ ગણિતની વાત કરીએ તો આશરે ઈ.સ.300થી ઈ.સ.1300 સુધીનો સમયગાળો ગણિતના વિકાસ માટેનો ભારતનો સુવર્ણકાળ ગણાય છે. આ સમયગાળા દરમિયાન આર્યભટ-1, વરાહમિહિર, બ્રહ્મગુપ્ત, ભાસ્કર-1, મહાવીરાચાર્ય, શ્રીધર, આર્યભટ્ટ-2 અને ભાસ્કરાચાર્ય- દ્વિતીય જેવા કેટલાક દિગ્ગજોએ એમના પૂર્વજો તરફથી એમને મળેલ વારસાને વધુ સમૃદ્ધ બનાવ્યો અને અનેક ગ્રંથોની રચના કરી. ઈ.સ.1300 પછી કેરાલા ગણિત પરંપરાનો વિકાસ થયો જેમાં માધવાચાર્ય, પરમેશ્વર, નીલકંઠ સોમૈયાજી તથા અન્ય વિદ્વાનોએ ખેડાણ કર્યું અને ગ્રંથો આપ્યા.

પ્રસ્તુત લેખમાળામાં આપણા આ વારસાગત ગણિતજ્ઞાનનું આચમન કરાવવાનો ઉપક્રમ રહેશે.

આ સમગ્ર વિકાસયાત્રામાં વિદ્વાનોના મતે ભાસ્કરાચાર્ય-દ્વિતીય (ઈ.સ.1114-1185)નું પ્રદાન ઘણું અમૂલ્ય માનવામાં આવે છે. એમણે ગણિતનો વિકાસ કરવાની સાથે એમના પૂર્વજોએ કરેલા કાર્યને સુધારવાનું અને વ્યવસ્થિત રીતે ગ્રંથસ્થ કરવાનું કાર્ય કર્યું, જેના પરિણામ સ્વરૂપ ઈ.સ.1150માં એમણે "સિદ્ધાંત શિરોમણિ" નામે ગ્રંથ તૈયાર કર્યો, જે ચાર ભાગમાં વહેંચાયેલો છે : (1) લીલાવતી (2) બીજગણિત (3) ગોલાધ્યાય (4) ગ્રહગણિત. આ ચારેય ભાગોને અલગ ગ્રંથો તરીકે પણ જોવામાં આવે છે. આમાંથી "લીલાવતી" ગ્રંથ વિદ્વાનોનો વિશેષ માનીતો રહ્યો છે, કારણ કે એમાં તે સમયે સમાજમાં અને ધાર્મિક કાર્યોમાં ઉપયોગમાં લેવાતા ગણિતનો સમાવેશ થાય છે. તે સમયગાળાના ભારતના ઉજ્જૈન અને અન્ય સ્થળોનાં ગુરુકુળો (યુનિવર્સિટીઓ)માં

પાઠ્યપુસ્તક તરીકે "લીલાવતી" નો અભ્યાસ કરાવાતો હતો. ભાસ્કરાચાર્ય ગણિત ઉપરાંત જ્યોતિષ્‌વિદ્યા અને ખગોળવિદ્યાના પણ અભ્યાસી હતા અને ઉજ્જૈનની વેધશાળાના પ્રમુખ હતા. એમણે સંસ્કૃત વ્યાકરણનો પણ અભ્યાસ કર્યો હતો. "લીલાવતી" ગ્રંથ મુખ્યત્વે કાવ્યાત્મક શૈલીમાં લખાયેલો છે જેમાં ઘણી જગ્યાએ સુંદર પ્રાકૃતિક વર્ણનો સાથે શૃંગારરસ અને હાસ્યરસ પણ જોવા મળે છે. આ ગ્રંથનો અભ્યાસ કરવાથી તે સમયની સમાજવ્યવસ્થા, અર્થવ્યવસ્થા અને દૈનિક જીવનમાં ગણિતના ઉપયોગ વિશે પણ જાણકારી મળે છે.

આ લેખમાં આપણે "લીલાવતી"ના પ્રથમ પ્રકરણમાંથી તે સમયે ઉપયોગમાં લેવાતાં જુદાં-જુદાં માપન અંગેનાં પાયાના એકમો અને તેમના આંતરસંબંધો તથા આજના એકમો સાથેના સંબંધો-જો સ્ફૂટ થતા હોય તો- સમજવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

(1) ચલણી નાણાંના એકમો અને તેમના સંબંધો :

પ્રથમ પ્રકરણના પ્રથમ શ્લોકમાં ભગવાન ગણેશજીની પ્રાર્થના કર્યા બાદ ભાસ્કરાચાર્ય બીજો શ્લોક નીચે પ્રમાણે લખે છે.

वराटफानां दशकद्वयं यत् सा
काकिणी ताश्च पणश्चतस्रः ।
ते षोडश द्रम्मं रहावगम्यो
द्रम्मैस्तथा षोडशभिश्च निष्कः ।।

અર્થ : 20 "કોડી"ની 1 "કાકિણી", 4 કાકિણીનો 1 "પણ", 16 પણથી 1 "દ્રમ્મ" અને 16 દ્રમ્મથી 1 "નિષ્ક" બને છે.

20 કોડી = 1 કાકિણી, 4 કાકિણી = 1 પણ;

16 પણ = 1 દ્રમ્મ, 16 દ્રમ્મ = 1 નિષ્ક.

બીજી રીતે વિચારતાં,

1 નિષ્ક = 16 દ્રમ્મ

= 16 × 16 પણ

= 256 × 4 કાકિણી

= 1024 × 20 કોડી

∴ 1 નિષ્ક = 20480 કોડી

(2) સોનાનું વજન :

નીચેના બે શ્લોકોમાં સોનાનું વજન કરવાનાં નાનાં માપ દર્શાવેલાં છે.

तुल्या यवाभ्यां कथिताऽत्र गुञ्जा
वल्लस्त्रिगुञ्जो धरणं च तेऽष्टौ ।
गद्याणकस्तद्द्वयमिन्द्र तुल्यैर्वल्लैस्तथैको
घटकः प्रदिष्टः ।।

અર્થ : 2 "યવ" (જવના દાણા)નું વજન 1 "ગુંજા" (ચણોઠી અથવા રતિ), 3 ગુંજા એટલે 1 "વલ્લ", 8 વલ્લ એટલે 1 "ધરણ", 2 ધરણ એટલે 1 "ગદ્યાણક"

સમજવું. વળી 14 વલ્લને 1 “ઘટક” સમજવું.

કોષ્ટક સ્વરૂપે-

2 યવ = 1 ગુંજા, 3 ગુંજા = 1 વલ્લ, 8 વલ્લ = 1 ધરણ, 2 ધરણ = ગદ્યાણક

બીજી રીતે 1 ગદ્યાણક = 2 ધરણ

= 2×8 વલ્લ

= 16×3 ગુંજા

= 48×2 યવ

∴ 1 ગદ્યાણક = 96 યવ (જવના દાણા)

અને 1 ઘટક = 14 વલ્લ

= 14×3 ગુંજા

= 42×2 યવ

∴ 1 ઘટક = 84 યવ (જવના દાણા)

કેટલાક વિદ્વાનોએ 1 ગદ્યાણકનું વજન અત્યારના માપમાં આશરે 18.5 ગ્રામ થાય એવું પ્રતિપાદિત કરેલ છે.

दशावैगुञ्जं प्रवदन्ति माषं माषाहवयैः

षोडशभिश्च कर्षम् ।

कर्षैः चतुर्भिः पलं तुलाज्ञाः कर्षं

सुवर्णस्य सुवर्णसंज्ञम् ॥

અર્થ : 5 “ગુંજા”નો 1 “માષ”, 16 માષનો 1 “કર્ષ”, અને 4 કર્ષનો 1 “પલ” થાય છે. 1 કર્ષને 1 “સુવર્ણ” કહેવાય છે.

કોષ્ટક સ્વરૂપે

5 ગુંજા = 1 માષ, 16 માષ = 1 કર્ષ = 1 સુવર્ણ, 4 કર્ષ = 1 પલ.

બીજી રીતે 1 પલ = 4 કર્ષ (અથવા 4 સુવર્ણ)

= 4×16 માષ

= 64×5 ગુંજા

∴ 1 પલ = 320 ગુંજા

(3) લંબાઈનાં માપ

यवोदैरैरङ्गुलमष्टसङ्ख्यैर्हस्तोऽङ्गुलैः

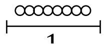
षड्गुणितैश्चतुर्भिः ।

हस्तैश्चतुर्भिर्भवतीह दण्डः क्रोशः

सहस्रद्वितयेन तेषाम् ॥

અર્થ : યવ (જવ)ના આઠ દાણા (તેમની પહોળાઈ પર) પરસ્પર અડીને ગોઠવતાં એક “અંગુલ” (આંગળ) લંબાઈ થાય છે અને ચોવીસ અંગુલ લંબાઈને એક “હાથ” કહેવાય. ચાર હાથ લંબાઈથી એક “દંડ” બને અને બે હજાર દંડનો એક “ક્રોશ” (કોસ) થાય છે.

નોંધ : અહીં જવના 8 દાણાને તેમની પહોળાઈ પર નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરસ્પર અડીને ગોઠવવાના છે.

 આ લંબાઈને એક અંગુલ કહી છે.

અહીં 'અંગુલ' શબ્દનો અર્થ આંગળીની પહોળાઈ એવો થતો હશે કારણ કે 24 અંગુલ લંબાઈને 1 હસ્ત (હાથ) કહી છે જે પુખ્ત માનવનું સપ્રમાણ શરીર હોય તો હાથીની કોણીથી નીચેના ભાગ જેટલું અંતર થાય છે! (આશરે) ગ્રામ્ય વિસ્તારમાં હજુ પણ લાંબા અંતર માટે માઈલ કે કિલોમીટરને બદલે "કોસ" શબ્દ વપરાય છે.

(4) ક્ષેત્રફળનું માપ

स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन तथा

करागां दशकेन वंशः ।

निवर्तनं विंशतिवंशसरव्यैः क्षेत्रं

चतुर्भिश्च भुजैः निबध्धम् ॥

અર્થ : 4 કોસનો એક "યોજન" કહેવાય તથા દસ "હાથ"ની લંબાઈ એક "વંશ" કહેવાય છે. 20 વંશ બાજુઓવાળા ચોરસને (તેના ક્ષેત્રફળને) 1 "નિવર્તન" કહે છે.

નોંધ : તે સમયે ભારતમાં લંબાઈના સમાન એકમો પ્રચલિત નહોતા. અલગ-અલગ સ્થળે માપની ભિન્નતા હતી. "દંડ" અથવા "વંશ" એ લગભગ નિશ્ચિત લંબાઈની વાંસની લાકડીને કહેતા હશે. બ્રિટિશ રાજમાં ઇંચ, ફૂટ, માઈલ અમલી બન્યા. કેટલાંક અન્ય સાહિત્યને આધારે વિદ્વાનોએ તારવ્યું છે કે 1 કોસ એ આશરે બે માઈલનું અંતર થાય અને 1 નિવર્તન ક્ષેત્રફળ એ આશરે 2 એકર ગણાય.

(5) ઘનફળનું માપ

हस्तोन्मितैर्विस्तृतिदैर्ध्यपिंडैर्यद्द्वादशास्रं

घनहस्तसज्ञम् ।

धान्यादिके यद् घनहस्तमानं

शास्त्रोदिता मागधरवारिका सा ॥

અર્થ : એક "હસ્ત" (હાથ) લંબાઈ, એક હાથ પહોળાઈ અને એક હાથ ઉંચાઈ ધરાવતા 12 ધારવાળા પાત્ર (ઘનાકાર)ને (તેના ઘનફળને) એક "ઘનહસ્ત" કહે છે, જે ઘનફળનો એકમ છે. જે મગધ દેશમાં "માગધખારિકા" (ખારિ) નામે જાણીતો છે.

નોંધ : 1 ઘનહસ્ત = 1 ખારિ = 8 પાયલી એવી નોંધ જોવા મળે છે. હજુ પણ અંતરિયાળ વિસ્તારોમાં અભણ પ્રજામાં "પાલી" નામનું વાસણ અનાજના માપ માટે વપરાય છે. વિદ્વાનોના મતે 1 પાલી = 32 કિ.ગ્રા. (આશરે) થાય છે.

(6) અનાજના જથ્થાનું માપ

द्रोणस्तु खार्याः खलु षोडशांशः

स्यादाढको द्रोण चतुर्थभागः ।

प्रस्थश्चतुर्थांश इहाऽठकस्य

प्रस्थांध्रिराद्यैः कुडवः प्रदिष्टः ॥

અર્થ : 1 દ્રોણ $= \frac{1}{16}$ ખારિ, 1 આધક $= \frac{1}{4}$ દ્રોણ

1 પ્રસ્થ $= \frac{1}{4}$ આધક, 1 કુડવ $= \frac{1}{4}$ પ્રસ્થ

અથવા

4 કુડવ = 1 પ્રસ્થ

4 પ્રસ્થ = 1 આધક

4 આધક = 1 દ્રોણ

16 દ્રોણ = 1 ખારિ = 1 ઘનહસ્ત

હવે પછીના બે શ્લોકોનું અર્થઘટન કરતાં નીચેના કોષ્ટકો મળે છે :

$^3/_4$ ગદ્યાણક = 1 ટાંક

72 ટાંક = 1 શેર

40 શેર = 1 મણ

192 ઘટક = 1 શેર

5 શેર = 1 ઘટીકા

8 ઘટીકા = 1 મણ

આ બંને શ્લોકોમાં એવો પણ ઉલ્લેખ છે કે આ માપ ધાન્યના તોલ માટે તુર્કી લોકોએ પ્રચલિત કરેલા છે અને આલમગીરશાહે પોતાના રાજ્યમાં એનો ઉપયોગ કર્યો હતો. આ પરથી અને અન્ય સ્રોતોના આધારે કેટલાક વિદ્વાનો માને છે કે આ બે શ્લોક ભાસ્કરાચાર્યના મૂળ ગ્રંથમાં નહોતા પરંતુ પાછળથી (આ માપ સમાજમાં ઉપયોગમાં લેવાતાં હોવાને કારણે) ઉમેરાયા હોઈ શકે.

(7) સમયના માપ માટે ‘લીલાવતી’માં ભાસ્કરાચાર્યે ખાસ ઉલ્લેખ કરેલ નથી પરંતુ તેના ‘ગોલાધ્યાય’ ગ્રંથમાં નીચે પ્રમાણે ગણતરી દર્શાવી છે, જે કેટલાક વિદ્વાનોએ પોતાની ટીકામાં તારવી છે. 1 નિમિષ = વ્યક્તિની આંખને એક પલકારો મારતાં લાગતો સમય. 100 ત્રુટિ = 1 તત્પરા, 30 તત્પરા = 1 નિમિષ, 18 નિમિષ = 1 કાષ્ઠા, 30 કાષ્ઠા = 1 કલા, 30 કલા = 1 નક્ષત્ર ઘટીકા, 2 ઘટીકા = 1 ક્ષણ, 60 ઘટીકા = 1 દિવસ

1 વિપલ = 1 ગુરુ અક્ષરનો ઉચ્ચાર કરતાં લાગતો સમય $= \frac{2}{5}$ સેકન્ડ

10 વિપલ = 1 પ્રાણ = 4 સેકન્ડ

6 પ્રાણ = 1 પલ = 24 સેકન્ડ

60 પલ = 1 ઘડી = 1440 સેકન્ડ = 24 મિનિટ

60 ઘડી = 1440 મિનિટ = 24 કલાક = 1 અહોરાત્ર (દિવસ+રાત્રિ)

વાચકો જોઈ શકશે કે ત્યારે માપનના એકમોમાં ભિન્નતા હતી અને ચોકસાઈનો પણ અભાવ હતો છતાં સામાજિક કાર્યો એ જ રીતે ચાલતાં હશે એમ કહી શકાય.

હવે પછીના બીજા લેખમાં પ્રાચીન ગણિતજ્ઞાનના અન્ય કોઈ મુદ્દા વિશેની માહિતીનું આચમન કરીશું.

જાણીતાનું અજાણ્યું

હેમા વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 94091 57840

આ લેખમાળામાં ગણિતના કેટલાક ખૂબ જાણીતા ખ્યાલો કે પરિણામોની કેટલીક ન જાણતાં હોઈએ તેવી વાતો કરવાનું આયોજન છે. આથી આ ખ્યાલ કે પરિણામ અને તેનો ઉપયોગ સહેલાઈથી સમજાય અને તેને અંગેનાં ન જાણતાં હોઈએ તેવાં સરળ અને રસપ્રદ પરિણામો જાણવાની, અને તેની ખૂબીઓ સમજવાની મઝા પણ આવે. શરૂઆત અભ્યાસની શરૂઆતમાં આવતા 'ઘડિયા'થી કરીશું.

1. ઘડિયા

'ઘડિયા' એટલે શું ? આમ પૂછશો તો ત્રીજા-ચોથા ધોરણમાં ભણતાં બાળકો પણ કહેશે- આટલી નથી ખબર? અમે તો ક્યારના દસ સુધીના ઘડિયા ગોખી નાખેલા! હા, માત્ર ગોખી નાખેલા. ત્યારે તો તેઓ ખુશ થયાં હશે કે આપણને કેટલું બધું આવડી ગયું ! અરે, પલાખાં પણ આવડે છે. તેમાં કંઈક નવું શીખ્યાનો આનંદ છે. તે યાદ રાખવા જરૂરી પણ છે. આપણે તેમાં છૂપાયેલી કેટલીક ગમ્મતભરી વાતો બાળકોને બતાવીએ તો તેઓને મઝા પણ આવે અને ઘડિયા બોજારૂપ પણ ન લાગે.

આ તબક્કે પૂ. રાવસાહેબે ઘડિયા શીખવાની રીત બતાવી હતી તે યાદ આવે છે. વર્ગ શિક્ષણની દૃષ્ટિએ આ શરૂઆતમાં જ લઈ શકાય. એક વાટકામાં લખોટીઓ લો (આ ઉંમરે તો બાળકોને ભણવા કરતાં રમવામાં વધુ રસ હોય ને ?) 'ત્રણ'નો ઘડિયો કરાવવો હોય તો, આમ કરવાનું-તેને કહો: એક વાર ત્રણ લખોટી લો; લખો 1 3 3; લખોટી પાછી નાખી દો; હવે બે વાર ત્રણ ત્રણ લખોટી લો; ગણો, લખો 2, 3, 6; .. એક એક કરીને દસ સુધી કરી અને એકની નીચે એક હારમાં લખો. એટલે ત્રણનો ઘડિયો તૈયાર ! આ જોઈને વિદ્યાર્થીની પ્રતિક્રિયા શું હશે ? 'અરે આ તો ત્રણનો ઘડિયો!' જે ગોખતા'તા તે જ, આપણે જાતે કર્યો... એ છે સર્જનનો આનંદ! હવે બાળકને 4, 5, 6, ... એક બીજા ઘડિયા પણ જાતે કરવાની ઈચ્છા થશે. એટલું જ નહિ, આમ કરતાં કરતાં સતેજ વિદ્યાર્થી વિચારશે પણ કે દર વખતે લખોટી ભેગી કરી દેવી અને પછી પાછી લેવાની... તેને બદલે જો 6 વખત લેવાની હોય તો 5 વાર તો લીધી જ છે; એક વાર વધુ લઈ લઉં તો? ... આમ આ ઘડિયામાં ત્રણ ત્રણ ઉમેરતા જવાનું જ છે, તેવો ખ્યાલ આવે. આ રીતે, તે અવલોકન અને વિચારશક્તિ વડે કંઈક શોધ્યાનો આનંદ પણ મેળવશે. ઉપરાંત, આગળ જતાં 'ચાર વાર ત્રણ'ને ગુણાકાર સાથે પણ સહેલાઈથી સાંકળી શકશે.

આ તો ઘડિયા બનાવવાની સરસ, રમત જેવી રીત થઈ. વર્ગ શિક્ષણની દૃષ્ટિએ, એકવાર 1થી 10 ના ઘડિયા તૈયાર કર્યા પછી આવા પ્રશ્નોની પણ વિચારીને ચર્ચા કરી શકાય. – (અહીં હવે

ગુણાકારના- છેલ્લા ઊભા- સ્તંભની જ વાત કરીશું.)

પહેલા ઘડિયામાં 1થી શરૂ કરી છેલ્લામાં 100 આવે છે. તો-

1. 1થી 100 સુધીની દરેક સંખ્યા શું કોઈને કોઈ ઘડિયામાં આવશે ? કેમ ?
2. કઈ સંખ્યા ન આવી શકે ?
3. જે આવે, તે કેટલીવાર આવશે, તે જાણી શકાય ?
4. એવી કોઈ સંખ્યા ખરી, જે એક જ વાર આવે?
5. અવિભાજ્ય સંખ્યા આવી શકે ?
6. ન આવતી હોય તેવી નાનામાં નાની યુગ્મ સંખ્યા કઈ ?
7. કુલ કેટલી જુદી જુદી સંખ્યાઓ આવી ?
8. ત્રણના ઘડિયામાં (ચોથી હારમાં) 3 4 12 આવે છે. અહીં ક્રમિક સંખ્યાઓ 1, 2, 3, 4 એકજ ઘડિયામાં, એક જ હારમાં આવે છે. 1થી 10 સુધીના ઘડિયામાં આવાં, કોઈ પણ ચાર ક્રમિક સંખ્યાઓ એકજ હારમાં આવે તેવાં, બીજાં ઉદાહરણો મળે ?

આમ તો દસે દસ ઘડિયા તપાસીને આ બધાના જવાબ મેળવી શકાય, પરંતુ તેમ કર્યા વગર મેળવી શકાય ?

જેમ કે 1. આપણી પાસે સો સંખ્યાઓ અને તે મૂકવા માટે સો જગ્યાઓ છે. હવે જો દરેક સંખ્યા કોઈને કોઈ જગ્યાએ આવતી હોય, તો દરેક સંખ્યા એક જ વાર આવી શકે. પણ 2. એકના અને બેના, બન્ને ઘડિયામાં આવે છે. આથી કોઈક સંખ્યા રહી જશે.

નવનો ઘડિયો એક ખાસ વિશિષ્ટતા ધરાવે છે, જેને લીધે તે હાથનાં આગળાંની મદદથી કોઈપણ જાતની ગણતરી વગર તૈયાર થઈ શકે છે.

1. બંને હાથ તમારી તરફ ધરતા હો, તેમ રાખો.
2. ડાબા અંગૂઠાને એકથી શરૂ કરી બધી આંગળીઓને ક્રમાંક આપો. જમણા અંગૂઠાનો ક્રમ 10 થશે.

હવે 9ના ઘડિયામાં $9\times n$ જોઈતો હોય, તો-

1. n મી આંગળી વાળી દો.
2. વળેલી આંગળીની ડાબી બાજુએ આવેલી આંગળીઓની સંખ્યા દશકને અંક અને જમણી બાજુએ આવેલી આંગળીઓની સંખ્યા એકમનો અંક.

ઉદાહરણ :

9×1 માટે – 1 ક્રમાંકની આંગળી વાળી દો;
વળેલી આંગળીની ડાબી બાજુએ એક પણ આંગળી નથી, અને જમણી બાજુએ 9 છે, માટે દશકમાં 0 અને એકમમાં 9 આવશે, આમ જવાબ 09 એટલે કે 9 મળશે.

9×7 માટે – 7 ક્રમાંકની આંગળી વાળી દો;
વળેલી આંગળીની ડાબી બાજુએ 6 આંગળી છે, અને જમણી બાજુએ 3 છે, માટે દશકમાં 6 અને એકમમાં 3 આવશે, આમ જવાબ 63 મળશે.

લગભગ આ જ રીતે 19, 29, 39, …, 99 માટે પણ મળે. માત્ર દશકનો અંક મેળવવાની રીતમાં થોડો ફેર છે. એક ઉદાહરણ લઈએ. 49નો ઘડિયો બનાવવા માટે :

49×6 માટે 6 ક્રમાંકની આંગળી વાળી દો;

> વળેલી આંગળીની જમણી બાજુએ આવેલી આંગળીઓની સંખ્યા, તે એકમનો અંક થશે; અહીં તે 4 છે.
>
> (વળેલી આંગળીની ડાબી બાજુએ આવેલી આંગળીઓની સંખ્યા) + (49ના દશકના અંકનો, વળેલી આંગળીના ક્રમાંક સાથેનો ગુણાકાર) = દશકનો અંક.
>
> અહીં, દશકનો અંક = 5 + (4 × 6) = 5 + 24 = 29.
>
> આમ જવાબ 294 મળશે.

આપણે 1થી 10 સુધીના ઘડિયાની વાત કરી. પણ મોટી સંખ્યાનો ઘડિયો જોઈએ તો હોય તો ? તેને માટે જુદી જુદી રીતો જોવા મળે છે. આમ તો આ દસ સુધીના ઘડિયાની મદદથી જ મળે. તેમાંની એકાદ રીત જોઈએ.

માનો કે 37નો ઘડિયો બનાવવો છે. (જુઓ આકૃતિ 1)

3			7		
	3			7	37
	6		1	4	74
	9		2	1	111
1	2		2	8	148
1	5		3	5	185
1	8		4	2	222
2	1		4	9	259
2	4		5	6	296
2	7		6	3	333
3	0		7	0	370

આકૃતિ-1

પહેલાં ઉપરની હારમાં 3 અને 7 લખો;

બંનેની નીચે તેના ઘડિયા લખો;

બંનેમાં એકમ અને દશકની રકમ વચ્ચે લીટી દોરો;

કોઈપણ એક હારમાં –

- ડાબી બાજુના અંક ગુણાકારના શતકમાં,
- વચ્ચેના બેનો સરવાળો દશકમાં (નવથી વધુ આવે તો, વદી શતકમાં);
- જમણી બાજુના એકમમાં જાય.

દા.ત. 37×6 → 1..(8+4)..2 → 222

આકૃતિ 2

આ કંઈક જાણીતું લાગશે. લાગેજ ને? ગુણાકારમાં આમ જ કરીએ છીએ.

ઘડિયા બનાવવાની રીત તો જોઈ. આમાં દરેક ઘડિયાની કેટલીક લાક્ષણિકતાઓ છે. તે જોઈએ. તે એટલી તો રસપ્રદ છે કે દસ સુધી ઘડિયા આવડ્યા બાદ તે જોવાની મઝા આવે. 9ના ઘડિયાની તો ઘણી વિશિષ્ટતાઓ છે. તેમાંની કેટલીક તો ખૂબ જાણીતી છે. તે જોઈએ. પહેલાં તેનો ઘડિયો જોઈએ. (આકૃતિ 2)

9 × 1 = 9
9 × 2 = 18
9 × 3 = 27
9 × 4 = 36
9 × 5 = 45
9 × 6 = 54
9 × 7 = 63
9 × 8 = 72
9 × 9 = 81
9 × 10 = 90

આકૃતિ 2

વધે	ઘટે
↓	↓
0	9
1	8
2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1
9	0

આકૃતિ 3

ગુણાકારનો, છેલ્લો સ્તંભ, આકૃતિ 3 પ્રમાણે થશે. તેમાં જોઈ શકીશું કે –

૧. દરેક સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 થાય છે.

૨. દશકનો અંક 0થી 9 વધે છે અને એકમનો અંક 9થી 0 ઘટે છે.

૩. કોઈ એકનો દશક અને તેની પહેલાંનાનો એકમ લઈએ (ત્રાંસા તીર વડે દર્શાવેલ) તો તેનો સરવાળો 10 થશે.

૪. પહેલી પાંચ સંખ્યાઓ લો; બાકીની પાંચની આની સાથે ઊલટા ક્રમમાં લઈ જોડ બનાવો. તો 09-90, 18-81, 27-72, 36-63 અને 45-54 મળશે. આ તો અંકોની અદલાબદલીની રમત થઈ ગઈ !

આ અવલોકનોને આધારે (2) પરથી પહેલાં માત્ર દશક અને પછી એકમ (ઉતરતા અને ચઢતા ક્રમમાં અનુક્રમે) લેતાં નવનો ઘડિયો તૈયાર ! એટલું જ નહિં, પણ (4)ને આધારે, પહેલી પાંચ સંખ્યાઓ જ જાણવાની જરૂર !

ઘડિયાઓમાં એક રસપ્રદ લાક્ષણિકતા છે, તેમના મૂલાંકોમાં.

કોઈપણ સંખ્યાનો મૂલાંક એટલે શું ? મૂલાંક મેળવવા માટે, તે સંખ્યામાં આવતા અંકોનો સરવાળો કરો; જો એ સરવાળો 9થી મોટો આવે. તો આ પ્રક્રિયા ફરી કરો; જ્યાં સુધી એક અંકમાં જવાબ ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો; છેલ્લે મળતો અંક, તે આપણી સંખ્યાનો મૂલાંક.

જેમ કે :

$24 \rightarrow 2 + 4 = 6$; 24 નો મૂલાંક 6.

$49 \rightarrow 4 + 9 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$; 49 નો મૂલાંક 4.

કોઈપણ ઘડિયાની વાત કરતી વખતે આપણે તેમાંના ગુણાકારની સંખ્યા, એટલે કે, છેલ્લા સ્તંભ પર જ ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું.

હવે પ્રત્યેક ઘડિયાના ગુણાકારના મૂલાંક મેળવી તેમાં ભાત (pattern) જોવા પ્રયત્ન કરીએ. તેને માટે સંખ્યાઓને 1, 2, 3, ..., 8, 9, 1, 2, ... એમ ચક્રીય ક્રમમાં લઈશું. હવે તરત ખ્યાલ આવશે કે 9 ના ઘડિયામાં ગુણાકારની દરેક સંખ્યાનો મૂલાંક 9 છે ! માત્ર 9 નો ઘડિયો એવો છે જેમાં આવું થાય છે. પરંતુ દરેકમાં કોઈને કોઈ પેટર્ન તો છે જ. જેમકે,

1. 8 માટે : છેલ્લો સ્તંભ - 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80;

   તેના મૂલાંકો : 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8.

   ભાત : 1. પહેલા અને છેલ્લા સરખા છે.

   2. બીજા બધા ઊતરતા ક્રમમાં.

2. 11 માટે : છેલ્લા સ્તંભની સંખ્યાઓના મૂલાંકો : 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 2.

   ભાત : 1. પહેલા અને છેલ્લા સરખા છે.

   2. બીજા બધા બબ્બે વડે વધે છે.

કયા ઘડિયામાં મૂલાંક પેટર્ન 3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, 6, 9, 3 છે ?

નોંધ : બધામાં પહેલા-છેલ્લા સરખા છે, એ સ્વાભાવિક નથી?

A rare combination of knowledge and style – Prof. A.M.Vaidya

Dr. Pradeep Jha

[The following article was prepared by the author for publication in the special issue of Suganitam dedicated to Prof. A. M. Vaidya (Issue No. 305). The article, somehow did not reach the editors in time and could not be published then. With regret for what happened, we publish the article here – Editors]

Just the onset of my pursuance of M.Sc. was greeted with profound knowledge and hypnotic teaching style of a new Professor, Dr.A.M.Vaidya. All, with no exception, were really impressed when he entered the class room with blue suit and peach shirt, still unforgettable, and was applauded by students, welcoming him. He responded with his charismatic smile.

It was great, something new. Normally it so happens that a speaker receives applause at the end, but it was different here. The speaker was applauded even before he uttered a single word. Then, pin drop silence prevailed and taking command of the situation, he thanked the students by introducing himself in the politest American style. The very first impression continued for at least two years till we completed our post-graduation.

There are many incidents that we came across during the span of two years, which have enrooted the traits of his teaching style indelibly in our minds and classically those, like me, who were determined to develop career in academic profession. You can play with a subject presenting it from various angles, only when you are empowered with the thorough knowledge of the subject.

I would like to put forth before you some enlightening experiences that inspired us to retain as 'Jivan mantra", that a student, who is on the verge of a new era, carries in his life.

Once I approached him offering him a very thin and elegant pen set. He asked: "Do you have a factory of manufacturing pens?". "No Sir", I replied. Then he said that there was no such need to spend money, and reading my emotions coupled with embarrassment, he added: “Okay, be happy, but do not repeat this so long as you are a student. What I need is your progress in learning mathematics”.

There are many interactions with him before and after my studentship and all of them have remained inspiring, in one way or the other, and motivated me to some new direction.

He had, I have experienced, the clear picture of the subject matter he is supposed to handle, and the level of the students and finally the route to reach the destination. Once I approached him for classification of square matrices into different groups, he thought for a while, analyzed the problem, and suggested as to what exactly I should do. Whenever I visited his house, I always received our “Traditional Nagri” welcome.

He was, I have observed during my university days, a good friend of Prof. A. R. Rao. I saw them many times engrossed in discussing some points of higher mathematics in his cabin.

Let me end with my experience of viva-voce in the final year of M.Sc. A subject expert in Complex Analysis continued asking me details, to all of which I responded correctly. He had already taken twenty minutes testing me thoroughly, while five to seven minutes was usual time that the external examiner spent for viva-voce. Prof. Vaidya, an internal examiner, politely managed the situation by saying: “Four times the time is over; may he be allowed to go.’’

Unforgettable fragrance that he has immortalized through his devotion shall remain forever. A great respect and love, Sir.

ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રારંભમાં ગણિતની ભૂમિકા

કમલનયન એન. જોષીપુરા
નિવૃત્ત પ્રોફેસર, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી, વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9825318897

સૌ પ્રથમ તો આ લેખ હું આદરણીય પ્રો. અરુણભાઈ વૈદ્યની પુણ્યસ્મૃતિમાં સમર્પિત કરું છું. 'સુગણિતમ્' માં મારો પહેલો લેખ, માર્ચ 1976ના અંકમાં છપાયો ત્યારે તેઓએ મને જે પ્રોત્સાહન પુરું પાડ્યું હતું એ તો કદી ભૂલાશે નહિં. 'ગણિતનો વિજ્ઞાનમાં વિનિયોગ' એ શીર્ષક હેઠળના તે લેખમાં, જેને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં સરળ આવર્ત ગતિ (simple harmonic motion) કહે છે તેનું નિરુપણ કરતાં વિકલ સમીકરણની ચર્ચા કરવામાં આવી હતી. પ્રસ્તુત લેખમાં આપણે જે વાત કરવી છે એ ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રારંભ તેમજ વિકાસમાં ગણિતના મૂળભૂત પ્રદાન વિષેની છે, અને તેનું વિષયવસ્તુ ધોરણ 9-10ના વિજ્ઞાનમાંથી પસંદ કરેલ છે. ઉપરાંત, આઈઝેક ન્યૂટન અને એડમંડ હેલીને સાંકળતી એક રસપ્રદ કહાણી પણ અહીં કહેવી છે.

તો ચાલો, સૌ પ્રથમ તો ઈતિહાસની કેડી પર ફ્લેશબૅકમાં, મધ્યયુગીન યુરોપના ઈટલીમાં આવેલ પિસા (Pisa) શહેરમાં જઈ પહોંચીએ. સમય છે ઈ. 1590ના અરસાનો. કહે છે કે પ્રસિધ્ધ વિજ્ઞાની ગૅલિલિયોએ ત્યાંના પ્રખ્યાત ઢળતા મિનારા (leaning tower) પરથી એક ઐતિહાસિક પ્રયોગ કર્યો. તેણે એ મિનારા પરથી, એક ખૂબ વજનદાર અને બીજો જરા હલકો એમ બે પદાર્થોને એક સાથે નીચે પડતા મુક્યા, અને પ્રયોગો પરથી નોંધ્યું કે, એ બન્ને પદાર્થો એક સાથે જ જમીન પર પટકાય છે. આમ, ગૅલિલિયોએ પ્રાયોગિક રીતે દર્શાવ્યું કે, મુક્ત પતન પામતા પદાર્થનો પ્રવેગ તેનાં દળ (દ્રવ્યમાન) પર આધાર રાખતો નથી, અને તેણે સદીઓથી ચાલી આવતી એરિસ્ટોટલની વિચારધારા – જે મુજબ ભારે પદાર્થ વહેલો નીચે પડે – ને ખોટી પુરવાર કરી. મુક્ત પતનના પ્રવેગને આપણે ગુરુત્વ પ્રવેગ 'g' કહીએ છીએ અને તેનું જાણીતું મૂલ્ય છે, 9.8 મીટર/સેકંડ^2. વિજ્ઞાનમાં પ્રયોગોના આદ્યપિતા ગણાતા ગૅલિલિયોનું જે વર્ષમાં અવસાન થયું તે વર્ષ 1642માં ઈંગ્લેંડમાં આઈઝેક ન્યૂટનનો જન્મ થયો. વિજ્ઞાન જગતમાં જ્યારે ન્યૂટને પદાર્પણ કર્યું ત્યારે તેને એક તરફ ગૅલિલિયોનાં મહત્ત્વપૂર્ણ પ્રાયોગિક અવલોકનો તો બીજી તરફ જર્મન વિજ્ઞાની કેપ્લરે તારવેલા ગ્રહીય ગતિના નિયમો (Kepler's laws of planetary motion) વારસારુપે મળ્યા હતા. ઈ.1665 અને તે પછીનાં વર્ષોમાં ન્યૂટને, કોઈ પદાર્થ (કણ)ની ગતિના ત્રણ મૂળભૂત નિયમો આપ્યા, તેમજ સાર્વત્રિક ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ સ્થાપ્યો, અને તે સાથે વૈજ્ઞાનિક તથ્યોને ગણિતનાં સમીકરણો રૂપે વ્યક્ત કરવાનો એક સિલસિલો શરુ થયો. જેને ગણિતશાસ્ત્ર સાથે અત્યંત નિકટનો સંબંધ છે એ

ભૌતિકવિજ્ઞાનનો પ્રારંભ આ રીતે થયો હતો. મુક્ત પતન પામતા પદાર્થ માટે ગૅલિલિયોએ જે ઉપરોક્ત નિષ્કર્ષ તારવેલો તેની સમજૂતી ન્યૂટનના સાર્વત્રિક ગુરુત્વાકર્ષણ બળના નિયમ પરથી આપી શકાય છે. આ જાણીતા નિયમ મુજબ, એકબીજાથી 'r' અંતરે રહેલા કોઈ પણ બે પદાર્થપિંડ જેમનાં દળ m_1 અને m_2 હોય તેમની વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (F) નીચેનાં સમીકરણથી વ્યક્ત થાય છે.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

આપણી ચર્ચામાં કોઈ પદાર્થનું દળ m તથા પૃથ્વીનું દળ M લઈએ. વળી, મુક્ત પતન પામતા પદાર્થની પ્રારંભિક ઉંચાઈ સામાન્યપણે પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R (આશરે 6400 કિમી.) ની સરખામણીએ ઘણી ઓછી હોય છે. માટે તે પદાર્થનું પૃથ્વીનાં કેંદ્રની અંતર R લઈ શકાય. તેથી પદાર્થ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ છે,

$$F = G.\frac{mM}{R^2} \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

અહીં G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે, જેનું મૂલ્ય 6.67×10^{-11} ન્યૂટન.મીટર^2/ કિગ્રા^{2} છે. અત્રે Gના એકમમાં 'ન્યટન'નો ઉલ્લેખ છે, તે આપે જોયું?!

મિત્રો, આપણે એ સમજવું છે કે જુદા જુદા પદાર્થો માટે (પૃથ્વીની નજીકમાં) ગુરુત્વપ્રવેગ 'g' નું આ મૂલ્ય એકસમાન કેમ હોય છે. તે હેતુસર આપણે ન્યૂટને આપેલા ગતિના ત્રણ મૂળભૂત નિયમો તરફ નજર દોડાવીએ. વૈજ્ઞાનિક પ્રયોગોના પિતામહ એવા ગૅલિલિયોએ જુદા જુદા પદાર્થોની ગતિ અને જડત્વ (inertia) ના ગુણધર્મ વિષે પ્રયોગશાળામાં અભ્યાસ કરીને કેટલાંક અવલોકનો તારવ્યાં હતાં. તેને આધારે તર્કબધ્ધ વિચારણા કરીને ન્યૂટને ગતિના ત્રણ મૂળભૂત નિયમો આપ્યા, જે પૈકીના બીજા નિયમનું સુત્ર છે,

$$F = ma \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\; (3)$$

આ સમીકરણ કહે છે કે m દળના પદાર્થકણ પર કોઇ બળ F લાગુ પાડતાં તેને પ્રવેગ 'a' મળે છે. સમીકરણ (3) એ ગતિવિજ્ઞાન (mechanics) નું પાયાનું અને સર્વવ્યાપક સમીકરણ છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ બળ F_g હેઠળ પડતા પદાર્થકણ માટે તેનું સ્વરુપ છે, F_g=mg, જેને સમી. (2) માં ડાબી બાજુએ મુકતાં નીચેનું પરિણામ મળે છે.

$$g= G.M/R^2 \;\;\ldots\ldots\ldots\;\; (4)$$

અહીં જમણી બાજુએ આવતી ત્રણેય સંજ્ઞાઓ તો આપણે જાણીએ છીએ, તે પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે કોઈપણ પદાર્થણનો ગુરુત્વપ્રવેગ 'g' તેના દળ પર આધારિત નથી પણ એકસમાન હોય છે. બીજા શબ્દોમાં, ગૅલિલિયોનાં પ્રાયોગિક અવલોકનોની સૈધ્ધાંતિક સાબિતી ન્યૂટને મેળવેલ પરિણામો દ્વારા પ્રાપ્ત થાય છે.

હવે એક પ્રશ્ન થાય – થવો જોઈએ; ન્યૂટને પાયાનાં પરિણામો, ઉપરોક્ત સમી. (1) અને (3), શી રીતે મેળવ્યાં હશે? શું તેણે કોઇ અવલોકનોનો આધાર લીધો હશે? તેના જવાબની દિશામાં આપણે સમી. (3) એટલે કે F = ma પર ધ્યાન કેંદ્રિત કરીએ. ગૅલિલિયોએ પોતાની પ્રયોગશાળામાં પદાર્થોની ગતિ અને તેમાં થતા ફેરફારો વિષે જે ગુણાત્મક અવલોકનો કર્યાં હતાં, તેને અહીં સંજ્ઞાઓમાં વ્યક્ત કરીએ તો, કોઇ બળ Fની અસરથી m દળનાં

પદાર્થકણની ઝડપ(v)માં સમયગાળામાં થતો ફેરફાર હોય તો, એ F તેમજ ના સમપ્રમાણમાં અને m ના વ્યસ્તપ્રમાણમાં હોય છે. આમ,

$\Delta v \,\alpha\, F \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{m}$; યાને કે, $F \,\alpha\, m \frac{\Delta v}{\Delta t}$, જેથી કરીને, $F = (k)m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$;

જાણીતી વ્યાખ્યા મુજબ પ્રવેગ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, અને તેથી

$F = (k)\, m \cdot a$

અત્રે 'k' સમપ્રમાણતાનો અચળાંક છે. તેનું મૂલ્ય શી રીતે મળે? એક પાયાની સંકલ્પના તરીકે બળની વ્યાખ્યા રચવા માટે, આપણે એક અગત્યની ધારણા કરીએ કે, જો $m = 1$ એકમ અને $a = 1$ એકમ હોય તો F નું મૂલ્ય 1 એકમ થાય છે. બીજા શબ્દોમાં બળનું એકમ દળ અને પ્રવેગનાં એકમોમાં વ્યાખ્યાયિત થાય છે અને તે સાથે સમપ્રમાણતાનો અચળાંક $k = 1$ થાય છે અને આપણને પ્રાપ્ત થાય છે, ભૌતિકશાસ્ત્રનું પ્રસિધ્ધ સમીકરણ $F = m \cdot a$ ન્યૂટનના બીજા નિયમનું આ સૂત્ર બળનું માપ આપે છે તેમજ બળનું એકમ પણ આપે છે. આપ નોંધો કે ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં સમીકરણમાં ડા.બા. અને જ.બા. મૂલ્યની તેમજ એકમોની રીતે પણ સરખી હોવી જોઈએ. તેથી, બળનું એકમ કિગ્રા.મીટર/સેકંડ^2 થાય છે. તે એકમને આઇઝેક ન્યૂટનની યાદમાં 'ન્યૂટન' કહેવાય છે, અને તે કારણે Gના એકમમાં 'ન્યૂટન' આવે છે.

ગતિના એક પ્રકાર તરીકે વર્તુળમય ગતિને ધ્યાનમાં લઈને ન્યૂટને દર્શાવ્યું કે તેને માટે જવાબદાર બળ છે, વર્તુળના કેંદ્ર તરફ લાગતું બળ, અર્થાત્ કેંદ્રગામી બળ (centripetal force). વધુમાં 'r' ત્રિજ્યાના કોઈ વર્તુળ પર એકસમાન ઝડપ v થી ફરતાં m દળનાં કણ પર લાગતું કેંદ્રગામી બળ mv^2/r હોય છે.

તો હવે બીજો એક સવાલ; ન્યૂટને ગુરુત્વાકર્ષણ બળને વ્યક્ત કરતું સમી. (1) શી રીતે મેળવ્યું હશે? શું તેમાં પણ તેણે કોઈ અવલોકનોનો આધાર લીધો હશે? હા. તે સંદર્ભે આપણે યાદ કરીએ જર્મન વિજ્ઞાની કેપ્લરને, જેણે લગભગ 1609ના અરસામાં તેના ગુરુ ટાયકો બ્રાહેએ લીધેલાં ખગોળીય અવલોકનો પરથી ગ્રહોની ગતિના ત્રણ નિયમો તારવ્યા હતા. કેપ્લરે કહ્યું કે ગ્રહો સૂર્યની આસપાસ દીર્ઘવૃત્તીય (ઉપવલયી elliptical) કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. ગ્રહીય ગતિ અંગેના કેપ્લરના ત્રીજા નિયમ મુજબ જો કોઈ ગ્રહનો સૂર્યને પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ T હોય અને તેની ભ્રમણક્ષાની અર્ધ ગુરુઅક્ષ (semi- major axis) 'a' હોય તો,

$T^2 \,\alpha\, a^3$

ત્યારબાદ ન્યૂટને સ્પષ્ટપણે જણાવ્યું કે ગ્રહો અને સૂર્ય વચ્ચેનું બળ છે ગુરુત્વાકર્ષણ. સરળતા ખાતર ગ્રહની કક્ષા વર્તુળાકાર લઈ લઈએ, તો અર્ધ ગુરુઅક્ષ 'a' તે વર્તુળની ત્રિજ્યા 'r' થશે. ન્યૂટને કેંદ્રગામી બળનાં સૂત્ર mv^2/r અને કેપ્લરના ત્રીજા નિયમ $T^2 \,\alpha\, a^3$ નો સમન્વય કરીને ગુરુત્વાકર્ષણનો વ્યાપક અને સુપ્રસિદ્ધ નિયમ, સમી. (1) સ્વરૂપે પ્રસ્થાપિત કર્યો. કેપ્લરના ત્રીજા નિયમમાં રહેલ સમપ્રમાણતાના અચળાંકની કિંમત સમી. (1) પરથી મળી શકે છે. વિશેષમાં, ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ દ્વારા ભૌતિક-

વિજ્ઞાનમાં સર્વપ્રથમ સાર્વત્રિક અચળાંકના રૂપમાં ‘G’ એક મહત્ત્વનું સ્થાન પ્રાપ્ત કરે છે.

વાચકમિત્રો, આપણે લેખની શરુઆત ગૅલિલિયોના ઐતિહાસિક પ્રયોગ દ્વારા કરી હતી. એ રીતનો પ્રયોગ આપણે પણ જુદી જુદી વસ્તુઓ લઈને કરી શકીએ. ધારો કે આપણે એક હાથમાં ભારે વસ્તુ અને બીજા હાથમાં સાવ હલકી વસ્તુ દા.ત. કાગળના ટુકડા લઈને તે બન્નેને એક જ ઉંચાઈએથી એક સાથે પડવા દઈએ, તો શું એ બન્ને એક જ સમયે જમીન પર આવી પહોંચશે ? ના. કાગળના ટુકડા તો હવામાં ધીમે ધીમે ગતિ કરતા નીચે આવી પડશે, અને તેમાં ભાગ ભજવે છે હવાનું અવરોધક બળ. તે અવરોધક બળ ભારે પદાર્થો માટે નગણ્ય કે બીનઅસરકારક બની રહે છે. એ સંદર્ભમાં, એક રસપ્રદ આધુનિક પ્રયોગ થોડાં વર્ષો પહેલાં કરવામાં આવ્યો હતો. એક મોટી નિર્વાત કરેલી પેટી (vacuum chamber) માં એક પીછું અને એક ભારેખમ ગોળો એકસાથે પડતા મુકવામાં આવેલ, અને તેમનો નીચે આવી પહોંચવાનો સમય ખૂબ જ ચોક્સાઈભર્યા ઉપકરણોથી માપવામાં આવ્યો હતો. પરિણામે એ સિધ્ધ થયું કે હવાનો અવરોધ ન હોય તો કોઈપણ પદાર્થ એકસમાન પ્રવેગ ‘g’ થી પતન પામે છે. એ પ્રયોગનો વિડીયો youtube પર જોવા મળશે.

હવે જરા વિષયાંતર લાગે તેવો એક સવાલ. તમારું વજન કેટલું… ? આ સવાલ ઉપરોક્ત ચર્ચાના અનુસંધાને જ છે. તમે કહેશો, અરે, એમાં શું …? એમ કહીને તમે તમારું વજન આટલા કે તેટલા કિલોગ્રામ, એવો જવાબ આપશો. પરંતુ, કિલોગ્રામ એ તો દળનું એકમ છે. તો વજન એટલે શું ? વૈજ્ઞાનિક દૃષ્ટિએ વજન એ પદાર્થ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ F_8 છે. આમ, m દળના પદાર્થના વજન W નું સુત્ર બને છે,

$W = mg$ .... (5)

આ વ્યાખ્યા પરથી 50 કિગ્રા દળના પદાર્થ (કે વ્યક્તિ)નું વજન થશે, W=490 N, જ્યાં N એ બળના એકમ ‘ન્યૂટન’ની સંજ્ઞા છે. હવે જરા વિચાર કરજો; કોઈ સ્થુળકાય વ્યક્તિ આકરી કસરત કરીને વજન ઉતારે છે ત્યારે તેનું વજન ઘટે છે કે દળ? … કે બન્ને…?

આગળ વધતા પહેલાં બે બાબતોનો ઉલ્લેખ કરીએ. પૃથ્વીનો ગોળો એ સંપૂર્ણ ગોલક (perfect sphere) તો નથી. પૃથ્વી ધ્રુવો પરથી સહેજ ચપટી છે, અને વિષુવવૃત્ત પરથી તેનો આકાર થોડો દુંદાળો (bulging) છે, જેથી ધ્રુવો પર ‘g’ નું મૂલ્ય વિષુવવૃત્તની સરખામણીએ થોડું વધું હોય છે. બીજું કે 9.8 મીટર/સેકંડ^2 એ g નું પૃથ્વીની સપાટી પરનું કે નજીકનું સરેરાશ મૂલ્ય છે. પદાર્થનું પૃથ્વીથી અંતર વધતાં તેનું મૂલ્ય પણ વ્યસ્ત વર્ગ પ્રમાણે ઘટતું જાય છે. જુઓ સમી. (1) અને (4).

આમ, ન્યૂટને ગૅલિલિયોનાં પ્રાયોગિક પરિણામો પરથી ગતિવિજ્ઞાનના ત્રણ મૂળભૂત નિયમો આપ્યા, અને એ નિયમોનો કેપ્લરના ગ્રહીય ગતિના નિયમો સાથે તાલમેળ સાધીને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ આપ્યો. આ રીતે, પ્રયોગ અને અવલોકનની સાથોસાથ તર્ક અને ગણિત

પર આધારિત એવી વિજ્ઞાનની એક શાખા તરીકે ભૌતિકવિજ્ઞાન (Physics) નો પ્રારંભ થયો. આ સમગ્ર ઘટનાક્રમનો ઇતિહાસ પણ રસપ્રદ છે. ઇ.1665ના અરસામાં જ્યારે યુવા ન્યૂટન કેમ્બ્રિજમાં ભણતા હતા ત્યારે, એવું બન્યું કે લંડનમાં પ્લેગનો મહારોગ ફાટી નીકળ્યો, અને તેમને પોતાના વતનમાં પરત થવું પડ્યું. આ મહાન વિજ્ઞાની સ્વભાવે એકલસુડા હતા; એ ભલા અને એમનું કામ ભલું... ! પ્રચલિત વાર્તા એ છે કે એકવાર એ ઝાડ નીચે બેઠા હતા અને એક પાક્કું

સફરજન નીચે પડ્યું.... એ જોઈને ન્યૂટનને ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ સ્ફુર્યો... !! અહીં આપેલ ચિત્ર જુઓ.

Picture credit Google Source;
https://images.app.goo.gl/Cqvf7QwACno7Fadm7

હકીકતે એ સમય દરમિયાન ન્યૂટન સતતપણે પદાર્થોની ગતિના તેમજ મુક્ત પતન અંગે ઊંડાણપૂર્વકના વિચારો કરતા રહ્યા; મનોમન એવો પ્રશ્ન પણ કર્યો કે કોઇપણ વસ્તુ અધ્ધરથી નીચે આપમેળે પડી આવે છે તો ચંદ્ર કેમ આકાશમાંથી ધરતી પર આવી પડતો નથી ...! વધુમાં તેમણે કલનશાસ્ત્ર (calculus)નો ખ્યાલ વિકસાવ્યો, અને એક નોંધ તૈયાર કરીને પોતાના વિચારો ટપકાવી લીધા. આપેલ ચિત્રમાં પણ તેમને નૉટબુક સાથે બેઠેલા બતાવેલ છે. પછીનાં એકાદ વર્ષમાં પ્લેગ કાબૂમાં આવી જતાં તેઓ કેમ્બ્રિજ આવીને અન્ય અભ્યાસ અને સંશોધનમાં પ્રવૃત્ત થઇ ગયા.

લગભગ 1684માં ખગોળશાસ્ત્રી એડમંડ હેલી (Halley) અને બે અન્ય વિજ્ઞાનીઓ ન્યૂટન પાસે આવ્યા અને ગ્રહો વગેરેની ગતિ અંગે પૃચ્છા કરી. ચર્ચા દરમિયાન ન્યૂટને તેઓને જણાવ્યું કે તે સંબંધે ગુરુત્વાકર્ષણના મૂળભૂત સિધ્ધાંતની શોધ કરીને પોતે એક નોંધ પણ લખી રાખેલ છે. હેલીએ તેમને એ નોટ 'શેર' કરવા વિનંતી કરી, પણ બન્યું એવું કે ભૂલકણા ન્યૂટને એ નોટ ક્યાંક મૂકી દીધી હોવાથી હાથ લાગી નહીં. એટલે એમણે તો પોતાની આખી નોંધ ફરીથી લખી નાખી. એ વાંચીને હેલી પ્રભાવિત થયા અને તેમણે ન્યૂટનને એ સંબંધે એક વિગતવાર પુસ્તક લખવાની પ્રેરણા આપી. અને આમ 1687માં બહાર પડ્યો એક ઐતિહાસિક મહાગ્રંથ કે જેના દ્વારા દુનિયાને ન્યૂટનના મૂળભૂત પ્રદાનની જાણ થઇ; તેનું નામ હતું (લેટિનમાં) Philosophiae naturalis principia mathematica, યાને કે Mathematical Principles of Natural Philosophy. ન્યૂટનના આ જગપ્રસિધ્ધ પુસ્તકના શીર્ષકમાં બે વાત નોંધવા જેવી છે. અહીં પ્રયોજાયેલ શબ્દો 'natural philosophy' એ પ્રકૃતિના વિજ્ઞાનનો સૈધ્ધાંતિક તેમજ પ્રાયોગિક અભ્યાસ દર્શાવે છે, જેને

તે પછીનાં લગભગ સોએક વર્ષ બાદ Physics નામ આપવામાં આવ્યું. બીજી બાબત એ નોંધીએ કે, 'mathematical principles' શબ્દો પ્રયોજીને સ્વયં ન્યૂટને જ પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાન અર્થાત્ ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રારંભમાં ગણિતની ભૂમિકા ઉજાગર કરેલ છે. અન્ય એક રસપ્રદ વાત એ પણ ઉમેરીએ કે, calculus તરીકે ઓળખાતી ગણિતની શાખાનો આવિષ્કાર કરીને ન્યુટને તેનું નામ આપ્યું fluxions, જેનો અર્થ 'ફેરફારનો દર' (rate of change) એવો થાય છે. ગતિને લગતી બાબતો (ભૌતિક રાશિઓ) ઝડપ, કે પ્રવેગ જે એક પ્રકારે સમય-દર બતાવે છે, તેને અનુલક્ષીને આ નામ અપાયું હોય તેમ લાગે છે.

દોસ્તો, 17મી સદીના અંતભાગે ન્યૂટન અને હેલીની જોડી જામી હતી ત્યારે ધૂમકેતુ દેખાવાની ખગોળીય ઘટના બની. ધૂમકેતુ એ આપણા આકાશનો એક સુંદર અતિથિ છે, પણ જૂના જમાનામાં અજ્ઞાનને કારણે તેની સાથે અંધશ્રધ્ધા જોડાયેલી રહેતી હતી. જોકે એમ પણ માનવામાં આવતું હતું કે કોઈ કોઈ ધૂમકેતુ નિયમિતપણે ફરી ફરીને દેખાયા કરતો હોય છે. ન્યૂટનના સિધ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરીને હેલીએ ધૂમકેતુની ભ્રમણકક્ષાનો અભ્યાસ હાથ ધર્યો. એક ધૂમકેતુ વિષે પાછલી નોંધો પરથી તેને લાગ્યું કે એ આવર્તી (periodic) હોવો જોઈએ. તે અંગે ગણતરીઓ કરીને તેમણે વૈજ્ઞાનિક આગાહી કરી કે એ ધૂમકેતુ (જે 1682માં દેખાયો હતો તે) ફરી 1758માં દેખાવો જોઈએ. ખરેખર 1758માં એ ફરી દેખાયો, અને તે સાથે હેલીની ગણતરીઓની તથા ન્યૂટનના સિધ્ધાંતોની એક સ્પષ્ટ સાબિતી મળી. ત્યારે હેલીનું અવસાન થઇ ચૂક્યું હતું પણ તેમની યાદમાં એનું નામ પડ્યું હેલી ધૂમકેતુ. એ સૌથી પ્રસિધ્ધ ધૂમકેતું છે, જે છેલ્લે 1985-'86માં દેખાયો હતો, અને તેને જોવાનો તેમજ વિદ્યાર્થીઓ-શિક્ષકો વગેરેને બતાવવાનો એક અનન્ય અવસર આ લેખકને પ્રાપ્ત થયો હતો. ધૂમકેતુઓ અત્યંત લંબગોળાકાર (દીર્ઘવૃત્તીય) કક્ષામાં સૂર્યને પરકમ્મા કરે છે. હેલીની કક્ષાની ઉત્કેંદ્રતા (eccentricity) e=0.97 છે જેની તુલનામાં પૃથ્વીની કક્ષા માટે e=0.0167 છે. 76 વર્ષનો ભ્રમણકાળ ધરાવતો હેલી ધૂમકેતુ હવે 2024ના અરસામાં સૂર્યથી દૂરતમ અંતરે પહોંચશે, અને ત્યાંથી એ ફરી પાછો સૂર્ય તરફ આવવા પ્રયાણ આદરશે.

... અને આ ધૂમકેતુ હવે ફરીથી 2061માં દેખા દેશે... આપ સૌ જરુર જોજો ...!

બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ-2

ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિ. સુરત.
(M) 98980 57891

આ લેખમાળાના પ્રથમ લેખમાં બ્લેકહોલ સંખ્યા 123ની રજૂઆત કરવામાં આવી હતી. હવે બીજા લેખમાં આવી જ વધુ એક બ્લેકહોલ સંખ્યા 1 વિશેની જાણકારી મેળવીશું. તે પહેલાં ગ્રીક પૌરાણિક કથાઓમાં વિખ્યાત અને નિપુણ કારીગર તથા ખૂબ જ અટપટી ભુલભુલામણીના સર્જક તરીકે જાણીતા ડેડલસ તથા તેના પુત્ર ઈકારુસની જાણીતી કથા રજૂ કરવાનો છું. આ કથાનો નાયક ડેડલસ તેના વતન એથેન્સનો અત્યંત પ્રતિભાસંપન્ન કસબી તથા શિલ્પકાર હતો, જે તેની ચતુરાઈ, જાણકારી તથા ક્ષમતા માટે દેશ-વિદેશમાં ખૂબ જ વિખ્યાત હતો. ડેડલસ સામાન્ય રીતે મોટી ઈમારતો તથા મંદિરોનાં નિર્માણકાર્ય માટે જ તેના હુન્નર તથા ક્ષમતાનો ઉપયોગ કરતો હતો. શક્યતઃ તે સમયના શ્રેષ્ઠ સ્થપતિ તરીકે તેની ગણના થતી હતી. આવી પ્રતિભા હોવા છતાં પણ ડેડલસ અહંકારી અને ઈર્ષ્યાળુ વ્યક્તિ હતો. તેને હંમેશાં એ વાતની આશંકા રહેતી હતી કે તેનો ભત્રીજો તેનાથી વધુ નામના ન મેળવે. આથી એક સમયે આવેશમાં આવીને ડેડલસે પોતાના ભત્રીજાની હત્યા કરી હતી, જેની સજા સ્વરૂપે ડેડલસને એથેન્સમાંથી દેશ નિકાલ કરવામાં આવ્યો હતો. આથી તેણે એથેન્સ છોડીને પુત્ર ઈકારુસ સાથે ક્રેટ ટાપુ તરફ પ્રયાણ કર્યું હતું.

તે સમયે ક્રેટ ટાપુ એ ગ્રીક ટાપુઓમાં સૌથી સુંદર તથા વિશાળ ટાપુ તરીકે ખૂબ જાણીતો પ્રદેશ હતો, જેના પ્રથમ રાજા મિનોસ આકાશ તથા ગર્જનાના દેવતા ઝિયસ તથા મહારાણી યુરોપાના પુત્ર હતા. રાજા મિનોસનો પુત્ર (?) મિનોટૌર માનવશરીર તથા બળદનું મસ્તક ધરાવતો ભાયનક રાક્ષસ હતો, જેને મિનોસ ખૂબ જ ચાહતા હતા. મિનોસ તેના આ પ્રીતિપાત્ર મિનોટૌર માટે નૈસર્ગિક રહેઠાણ સ્વરૂપે એવી ભુલભુલામણીની રચના કરવા ઈચ્છતા હતા જે અતિસુંદર પણ હોય અને સાથોસાથ એવી અટપટી પણ હોય કે જેની અંદર પ્રવેશ કર્યા બાદ તેમાંથી બહાર નીકળવું સરળ ન હોય. આમ તેઓ મિનોટૌરને પ્રાકૃતિક એવી ખુલ્લી કેદમાં સુરક્ષિત રાખવા માંગતા હતા, જેથી તેમના નગરજનો સલામત રહે. તે માટે મિનોસે ડેડલસને તેની પ્રતિષ્ઠાને ધ્યાનમાં રાખીને ક્રેટ ટાપુ પર આવકાર્યા હતા. ભયાનક પ્રાણી સ્વરૂપ મિનોટૌર માટે રાજાનો પ્રેમભાવ જોઈને ડેડલસ ખૂબ જ આશ્ચર્યચકિત થયો હતો. પરંતુ તેને સોંપવામાં આવેલ કાર્યને પ્રાધાન્ય આપી તથા અન્ય સર્વે

બાબતોને ગૌણ સમજીને તેણે આ આમંત્રણનો સ્વીકાર કર્યો હતો.

ડેડેલસે એવી જટિલ ભુલભુલામણી બનાવવાની તૈયારી કરી જેમાં કોઈ એકવાર પ્રવેશ કરે તે પછી બહારના કોઈની મદદ વગર તેમાંથી બહાર નીકળવા માટે અસમર્થ હોય.

આ રીતે રાજાની ઈચ્છા પણ પૂર્ણ થાય, મિનોટૌર આ ભુલભુલામણીમાં જ આનંદપૂર્વક કાયમી વસવાટ કરે જેમાંથી તે સહેલાઈથી બહાર નીકળી ન શકે, અને તે કારણસર ટાપુની પ્રજા સુરક્ષિત રહે.

ડેડેલસનું જ્યારે ક્રેટ ટાપુ પર આગમન થયું ત્યારે પુત્ર ઈકારુસ પણ તેની સાથે હતો. તે પોતે જ્યારે કામમાં વ્યસ્ત રહેતો હતો ત્યારે ઈકારુસ ટાપુના અન્ય બાળકો સાથે ખેલકૂદમાં સમય પસાર કરતો હતો.

આમ પિતા-પુત્ર બન્ને ક્રેટ ટાપુ પર આવીને પ્રસન્ન હતા. થોડા સમય બાદ ભુલભુલામણીનું કાર્ય સમાપ્ત થયું અને મિનોટૌર તેની અંદર રહેવા લાગ્યો હતો. અત્યંત શાંત તથા રમણીય વાતાવરણમાં પથરાયેલ ભુલભુલામણીના રસ્તાઓ જોઈને રાજા મિનોસ પણ અત્યંત રાજી થયા હતા. આથી તેમણે ડેડેલસને મોટી રકમ ઈનામ સ્વરૂપે આપી હતી તથા ક્રેટ ટાપુ પર થોડા વધુ સમય માટે રહેવાની વિનંતી કરી હતી, જેનો ડેડેલસે નમ્રતાપૂર્વક સ્વીકાર કર્યો હતો.

એક સમયે ગ્રીસના કેટલાક યુવાનો જહાજ મારફતે ક્રેટ ટાપુ પર આવ્યા હતા અને ત્યાં રાત્રિરોકાણ કરીને બીજા દિવસે પરત ફર્યા હતા. પરંતુ તેઓ રાજા મિનોસની પુત્રી એરિડેનનું અપહરણ કરીને બળપૂર્વક તેમની સાથે લઈ ગયા હતા. આ ઉપરાંત તેઓએ ભુલભુલામણીની અંદર જઈને મિનોટૌરની હત્યા પણ કરી હતી. આથી રાજા મિનોસ ઘેરા વિષાદમાં સરી પડ્યા હતા. તેઓ એ વાત સ્વીકારવા તૈયાર ન હતા કે કોઈ ભુલભુલામણીમાં પ્રવેશ કરીને મિનોટૌરની હત્યા કર્યા બાદ કોઈપણ જાણકારની મદદ વગર સલામત રીતે બહાર નીકળીને પલાયન થઈ શકે. આ કારણસર ભુલભુલામણીની રચના કરનાર ડેડેલસ પર જ તેમને શંકા ગઈ હતી. તેમનું એવું માનવું હતું કે ડેડેલસે જ તેઓને મદદ કરી છે કારણ કે તેના સિવાય અન્ય કોઈ પણ આવું કરવા માટે સક્ષમ ન હતું. (જો કે વાસ્તવિકતા કંઈક અલગ જ હતી, જે એક અલગ જ કથા છે.) આથી રાજા મિનોસે ડેડેલસ તથા તેના પુત્ર ઈકારુસને આજીવન કારાવાસની સજા ફટકારી હતી તથા ક્રેટ ટાપુ પર આવેલ સૌથી ઊંચા મિનારાના શિખરના ભાગની અંદર તેઓને કેદ કર્યા હતા.

પરંતુ ડેડેલસ કાબેલ શોધકર્તા હતો. તેમના કેદખાનાને ચક્કર લગાવતા પક્ષીઓને જોઈને તેણે કેદમાંથી ભાગી જવાનો રસ્તો શોધી કાઢ્યો હતો. તેણે ઈકારુસ સાથે મળીને પક્ષીની જેમ ઊડીને દૂર ચાલ્યા જવાની યોજના બનાવી. તેઓએ મિનારામાં વિખરાયેલાં પીંછાંનો ઢગલો કર્યો અને ત્યારબાદ તેમને આપવામાં આવતી મીણબત્તીઓના મીણના ઉપયોગથી વિશાળ પાંખોની બે જોડીઓ તૈયાર કરી. કેદમાંથી ઊડીને ભાગી જવાની યોજના અમલમાં મૂકતા પહેલાં ડેડેલસે પુત્ર ઉકારુસને સ્પષ્ટ ચેતવણી

આપતાં કહ્યું કે જો તેઓ સમુદ્રની એકદમ નજીક રહીને ઉડાન ભરાશે તો સમુદ્રના પાણીને કારણે ભેજ લાગવાથી તેમની પાંખો વજનદાર થઈ જશે. આથી પાંખો વીંઝવાનું શક્ય બનશે નહીં. એથી વિપરીત ખૂબ ઊંચાઈએ ઊડવાથી ગરમીના કારણે પાંખોમાં રહેલ મીણ ઓગળી જશે. અને તેથી પાંખોનાં પીછા છૂટાં પડી જશે. આમ બન્ને સંજોગોમાં નિશ્ચિતપણે તેઓનું મૃત્યુ થશે. આથી યોગ્ય ઊંચાઈ રાખીને ઊડવું એ તેમની યોજનાની સફળતા માટેની સૌથી અગત્યની ચાવી હતી. ડેડેલસનાં આ સ્પષ્ટ સૂચનો સાથે બન્નેએ પાંખો લગાવી અને મિનારા પરથી કૂદવા માટે તૈયાર થયા.

અહીં આ વાર્તામાં હવે વળાંક આવે છે. જાદુઈ શક્તિ ધરાવતા રાજા મિનોસને તેમના આ કાવતરાની જાણ થઈ ચૂકી હતી, અને બન્ને કેદીઓ ભાગી જાય તે પહેલા જ મિનોસે મિનારામા પહોંચીને તેઓને રંગે હાથે પકડી પાડ્યા હતા. પરંતુ ડેડેલસે બનાવેલ પાંખો જોઈને મિનોસ પ્રભાવિત થયા હતા. આથી પિતા-પુત્રની આ જોડીને તત્કાળ મૃત્યુદંડ આપવાને બદલે તેઓને એક તક આપવાનું મિનોસે વિચાર્યું. તેમણે સર્વપ્રથમ ઈકારુસને કોઈ એક ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા પસંદ કરવાનો આદેશ કર્યો. તેની સાથે જ તેમણે કહ્યું કે જો આ પસંદ કરેલ સંખ્યા બેકી હશે તો તે સંખ્યાને અડધી કરવામાં આવશે; અને જો આ સંખ્યા એકી હશે તો આ સંખ્યાને ત્રણગણી કરીને તેમાં 1 ઉમેરવામાં આવશે. આ ક્રિયા કર્યા બાદ મળેલ જવાબ પર ફરીવાર એ જ ક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરીને આ ક્રિયા ચાલુ રાખવામાં આવશે. પુનરાવર્તિત ક્રિયા બાદ જવાબ તરીકે ક્યારેય પણ 1 આવશે તો મિનોસ તેની જાદુઈ શક્તિઓ દ્વારા ઈકારુસને અત્યંત ઊંચાઈ પર જ ઊડવા માટે મજબૂર કરશે. પરંતુ જો આ પુનરાવર્તિત ક્રિયાના પરિણામે હંમેશા 1 સિવાયની જ અન્ય કોઈ પણ સંખ્યા મળ્યા કરશે તો જ ઈકારુસને પોતાની રીતે ઊડવા માટેની સ્વતંત્રતા મળશે.

ત્યારબાદ મિનોસે ડેડેલસને પણ કોઈ એક ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા પસંદ કરવાનો આદેશ આપ્યો. વધુમાં તેમણે કહ્યું કે જો પસંદ કરાયેલ સંખ્યા બેકી હશે તો તે સંખ્યાને અડધી કરવામાં આવશે. પરંતુ જો આ સંખ્યા એકી હશે તો તેને ત્રણ ગણી કરીને તેમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવશે. આ ક્રિયા કર્યા બાદ મળેલ જવાબ પર ફરીવાર એજ ક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરીને આ ક્રિયા ચાલુ રાખવામાં આવશે. આ પુનરાવર્તિત ક્રિયા પછી જવાબ તરીકે ક્યારેય પણ 1 મળશે તો ડેડેલસને સમુદ્રની ખૂબ નજીક ઊડવામાટે મિનોસ દ્વારા મજબૂર કરવામાં આવશે. પરંતુ 1 સિવાયની જ અન્ય કોઈ પણ સંખ્યા આવ્યા કરશે તો ડેડેલસને પોતાની ઈચ્છા મુજબ ઊડવા માટેની સ્વતંત્રતા મળશે.

આમ ઈકારુસ તથા ડેડેલસે એવી સંખ્યા પસંદ કરવાની હતી કે જેથી તે સંખ્યા પર મિનોસે કહેલ ક્રિયા કરતાં ક્યારેય 1 આવે જ નહીં. જો આવું થાય તો જ તેઓ સ્વેચ્છાપૂર્વક ઊડીને પોતાનો જીવ બચાવી શકે. આથી મિનોસનો વિચાર બદલાય તે પહેલાં બન્નેએ નસીબ પર વિશ્વાસ રાખીને મનસ્વી રીતે સંખ્યા 11 પસંદ કરી અને તેઓ મિનારાની ટોચ

પરથી કૂદી પડ્યા. આ સાથે જ તેઓએ પાંખો ફફડાવતાં ઊડવાનું ચાલુ કર્યું.

હવે તેઓએ પસંદ કરેલ સંખ્યાનું મિનોસ દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ ક્રિયાના અનુસંધાનમાં વિશ્લેષણ કરીએ. પ્રથમ તો ઈકારુસ તથા ડેડેલસને દર્શાવવામાં આવેલ ક્રિયાને અનુક્રમે f તથા g વડે દર્શાવીએ. આ ઉપરાંત તેઓએ પસંદ કરેલ સંખ્યાને n વડે દર્શાવવામાં આવે તો મિનોસ દ્વારા ફરજ પાડવામાં આવેલ શરત મુજબ

$$f(n)=\begin{cases} n/2; \text{જો } n \text{બેકી હોય તો} \\ 3n+1; \text{જો } n \text{એ કી હોય તો} \end{cases}$$

તથા

$$g(n)=\begin{cases} n/2; \text{જો } n \text{બેકી હોય તો} \\ 3n-1; \text{જો } n \text{એ કી હોય તો} \end{cases} \text{ થશે.}$$

આ ક્રિયા કર્યા બાદ મળેલ સંખ્યા પર ફરીથી આ જ ક્રિયા કરતાં $f(f(n)) = f^2(n)$, $g(g(n)) = g^2(n), \ldots$ વગેરે મળશે. અહીં તેઓએ પસંદ કરેલ સંખ્યા $n = 11$ છે, જે એકી છે. આથી $f(11) = 3 \times 11 + 1 = 34$ થશે, જે બેકી છે. આથી $f^2(11) = \frac{34}{2} = 17$ થશે, જે એકી છે. આથી $f^3(11) = 52$ થશે. એજ પ્રમાણે $f^4(11) = 26$, $f^5(11) = 13$,
$f^6(11) = 40, f^7(11) = 20$,
$f^8(11) = 10, f^9(11) = 5$,
$f^{10}(11) = 16, f^{11}(11) = 8$,
$f^{12}(11) = 4, f^{13}(11) = 2$ તથા
$f^{14}(11) = 1$ થશે. આમ ક્રિયા કરતાં 1 આવતો હોવાથી મિનોસની જાદુઈ શક્તિઓના કારણે ઈકારુસ ખૂબ ઊંચાઈ પર ઊડવા માટે મજબૂર થઈ જાય છે, અને તેથી તેની પાંખો પરનું મીણ પીગળવા લાગે છે. થોડા સમયમાં જ તે સમુદ્રમાં પડી જાય છે અને તેનું મૃત્યુ થાય છે.

એ જ પ્રમાણે એકી સંખ્યા $n = 11$ માટે
$g(11) = 3 \times 11 - 1 = 32$,
$g^2(11) = 16, g^2(11) = 16$,
$g^3(11) = 8, g^4(11) = 4$,
$g^5(11) = 2$ તથા $g^6(11) = 1$ થશે. આથી ડેડેલસ સમુદ્રની એકદમ નજીક ઊડવા માટે મજબૂર થઈ જાય છે. થોડા સમયમાં જ તેની પાંખો ભેજવાળી થઈ જવાથી વજનદાર થઈ જાય છે અને ટૂંક સમયમાં જ તે થાકીને સમુદ્રમાં પડી જાય છે અને તેનું પણ મૃત્યુ થાય છે.

હવે સ્વાભાવિક રીતે અહીં પ્રશ્ન ઉદ્ભવે કે શું ઈકારુસ તથા ડેડેલસ 11 ને બદલે અન્ય કોઈ એવી સંખ્યા n પસંદ કરી શક્યા હોત કે જેથી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક k માટે $f^k(n)$ તથા $g^k(n)$ ની કિંમત ક્યારેય 1 ન થાય ? આ પ્રશ્નની ચર્ચા કરીએ તે પહેલાં એ નોંધીએ કે $n, f(n), f^2(n), \ldots, f^k(n)$ (જ્યાં કોઈપણ $1 \le r < k$ માટે $f^r(n) \neq 1$, પરંતુ $f^k(n) = 1$) શ્રેણીમાં આવતાં પદોની સંખ્યાને એ શ્રેણીની લંબાઈ કહેવામાં આવે છે. આ લંબાઈને $L_f(n)$ વડે દર્શાવીશું. એ જ પ્રમાણે શ્રેણી $n, g(n), g^2(n), \ldots g^k(n) = 1$ (જ્યાં કોઈ પણ $1 \le r < k$ માટે $g^r(n) \neq 1$)ની લંબાઈને $L_g(n)$ વડે દર્શાવીશું. આમ $L_f(11) = 15$ તથા $L_g(11) = 7$ થાય છે.

વધુમાં $f^{14}(11) = 1$ એ એકી સંખ્યા હોવાથી

જો આ જ ક્રિયા ચાલુ રાખીએ તો $f^{15}(11) = 4, f^{16}(11) = 2$ અને ફરીથી $f^{17}(11) = 1$ જ મળશે. એ જ પ્રમાણે $g^6(11) = 1$ હોવાથી $g^7(11) = 2$ અને $g^8(11) = 1$ થશે. આમ ક્રિયા f માટે શ્રેણી $1, 4, 2, 1$ તથા ક્રિયા g માટે શ્રેણી $1, 2, 1$ પુનરાવર્તિત રીતે ચાલ્યા જ કરશે. આ કારણસર બ્લેકહોલ સંખ્યાની સમજને અનુલક્ષીને અહીં 1 ને ક્રિયા f ના અનુસંધાને બ્લેકહોલ સંખ્યા ગણી શકાય.

વધુ એક ઉદાહરણ તરીકે $n = 12$ લઈએ તો ક્રિયા f માટે શ્રેણી 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 તથા ક્રિયા g માટે શ્રેણી 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1 મળે છે. આમ $L_f(12) = 10$ તથા $L_g(12) = 7$ થાય છે. જો $n = 19$ લઈએ તો ક્રિયા f માટે શ્રેણી 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 મળે છે, જેના માટે $L_f(19) = 21$ થાય છે. એજ પ્રમાણે એવું જોવામાં આવ્યું છે કે $L_f(9) = 20$ તથા $L_f(27) = 111$ થાય છે. નીચેનાં કોષ્ટકમાં 20 સુધીની સંખ્યાઓ n માટે $L_f(n)$ની કિંમત દર્શાવેલ છે :

n	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_f(n)$	:	1	2	8	3	6	9	17	4	20	7
n	:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$L_f(n)$	:	15	10	10	18	18	5	13	21	21	8

ક્રિયા f માટેનો પ્રશ્ન એ ગણિતશાસ્ત્રનો ખૂબ જ જાણીતો વણઉકેલાયેલ પ્રશ્ન છે. તે $3n + 1$ પ્રશ્ન, $3n + 1$ અનુમાન, ઉલામ અનુમાન, કકુતાની પ્રશ્ન, જ્વેઈટ અનુમાન જેવાં વિવિધ નામો દ્વારા ઓળખાય છે. પરંતુ આ પ્રશ્ન સૌથી વધુ તો કોલાટ્ઝ અનુમાન (Collatz conjecture) તરીકે જાણીતો છે. આ અનુમાન પ્રમાણે કોઈ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n થી શરૂ કરીને સર્વપ્રથમ તો એવી શ્રેણી બનાવવામાં આવે જેના દરેક પદ તેના તરત જ પહેલાના પદ પરથી નીચે મુજબ મેળવી શકાયઃ જો શ્રેણીનું કોઈ પદ બેકી હોય તો તેના પછીનું પદ તે પદ કરતાં અડધું થાય. વળી જો કોઈ પદ એકી હોય તો તેના પછીનું પદ તે પદના ત્રણ ગણા વત્તા 1 જેટલું થાય. કોલાટ્ઝ અનુમાન એવું કહે છે કે ગમે તે ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n થી શરૂ કરીએ તો પણ આ શ્રેણી હંમેશા 1 પર પહોંચે છે.

વર્ષ 1937માં જર્મન ગણિતશાસ્ત્રી લોથાર કોલાટ્ઝે આ પ્રશ્ન રજૂ કર્યો હતો, જે આજ સુધી વણઉકેલાયેલ રહ્યો છે. આ અનુમાન શક્યતઃ ગણિતશાસ્ત્રનો સૌથી સરળ વણઉકેલાયેલ કોયડો છે, જે ખૂબ જ સરળતાથી બાળકો કે પછી કોઈપણ સામાન્ય માણસને સમજાવી શકાય છે. આ અનુમાનની સત્યાર્થતા શરૂઆતની $20 \times 2^{58} \approx 5.764 \times 10^{18}$ સુધીની સંખ્યાઓ માટે કમ્પ્યૂટર દ્વારા ચકાસવામાં આવે છે. પ્રાયોગિક પુરાવા તથા સંશોધનાત્મક દલીલોના આધાર પર આ અનુમાન સાચું હોવાની પ્રબળ પ્રતીતિ થાય છે. આ કારણસર કેટલાય ગણિતશાસ્ત્રીઓ તેને ઉકેલવા માટે લલચાયા હતા, પરંતુ અંતમાં તો આ અનુમાન ઉકેલવા માટેની તેમની આશા ઠગારી જ નીવડી હતી.

વર્ષ 2011માં ગણિતશાસ્ત્રી ગેરહાર્ડ ઓપ્ફરે આ

અનુમાનના ઉકેલનો દાવો રજૂ કર્યો હતો. તેમણે આ અનુમાનની સાબિતી માટે Annihilation Graphની રચનાનો સહારો લીધો હતો. પરંતુ તેમની સાબિતીમાં ખામી જોવામાં આવી હતી, અને આ અનુમાન તે સમયે વણઉકેલાયેલ જ રહ્યું હતું. 85 વર્ષ જૂના આ કોયડાનો ઉકેલ મેળવવાની દિશામાં તાજેતરમાં "વિરાટ" કહી શકાય તેવી પરંતુ આંશિક સફળતા મળી છે. સપ્ટેમ્બર 2019 દરમિયાન વર્ષ 2006 નો ફિલ્ડ્ઝ મેડલ વિજેતા યુવા ગણિતશાસ્ત્રી ટેરેન્સ તાઓ આ અનુમાનના અવરોધને ભેદવામાં સફળ રહ્યા હતા. તેમણે એવું સાબિત કર્યું છે કે- "લગભગ" દરેક સંખ્યાઓ માટે કોલાટ્ઝ અનુમાન "લગભગ" સાચું છે. ટેરેન્સના આ પરિણામમાં જે થોડી કચાશ રહેલ છે તે છે તેમણે વાપરેલ - "લગભગ". આ શબ્દ જ હવે કોલાટ્ઝ અનુમાનના સંપૂર્ણ ઉકેલના રસ્તામાં રહેલ છેલ્લો અવરોધ છે. ટેરેન્સના આ પરિણામ મુજબ કહી શકાય કે કોલાટ્ઝ અનુમાનને ખોટો ઠરાવતું કોઈ પ્રત્યુદાહરણ જવલ્લે જ મળશે. ગણિતશાસ્ત્રીઓના મતે કોલાટ્ઝ અનુમાનનો ઉકેલ સંખ્યાગણિતનાં કાર્યો માટે નવી દિશા ખોલશે તથા તેના દ્વારા નવી અને અગત્યની પદ્ધતિઓનો વિકાસ થશે.

કેટલાંક વર્ષો પહેલાં વિખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રી પોલ ઈરડોશ આ અનુમાન માટે કહ્યું હતું કે – "Mathematics is not yet ready for such confusing, troubling and hard problem." તેમણે તેમની શૈલી તથા આદત અનુસાર આ કોયડાના ઉકેલ મેળવનારને 500 ડોલરનું ઈનામ આપવાની પણ જાહેરાત કરી હતી. વર્ષ 1996માં ગણિતશાસ્ત્રી જ્વેઈટે પણ આ અનુમાનનો ઉકેલ મેળવનાર માટે પુરસ્કાર જાહેર કર્યો હતો.

કોલાટ્ઝ અનુમાન વિશેનો મારો અંગત મત દર્શાવું તો આ અનુમાન એ સંખ્યા a તથા $a+1$ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ (Prime Factoritation) વચ્ચેનો ગૂઢ સંબંધ દર્શાવતું ગહન કથન છે. આ અનુમાનની પુનરાવર્તિત ક્રિયા ત્રણ પગલાં પર આધારિત છે, જેમાંનાં બે પગલાં તો અવિભાજ્ય અવયવીકરણના સંદર્ભમાં ઘણાં ઓછાં અગત્યનાં કહી શકાય; પરંતુ 1નો ઉમેરો કરવો એ ઘણું મહત્ત્વનું પગલું છે. મારા આ કથનનો આધાર એ છે કે – 3 વડે ગુણવાથી કે 2 વડે ભાગવાથી અવયવીકરણ પર કોઈ ખાસ અસર થતી નથી, કારણ કે તેનાથી અવયવીકરણમાં આવેલ અન્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ પર તેની અસર થતી નથી. પરંતુ 1ને ઉમેરવાની ક્રિયા એ અવયવીકરણ પર ખૂબ જ મોટી અસર કરે છે, કારણ કે કોઈપણ સંખ્યામાં 1 ઉમેરતા તેના અવયવોમાં ધરમૂળથી ફેરફાર થાય છે.

આ વાતને સમાપ્ત કરીએ તે પહેલાં ક્રિયા gના અનુસંધાનમાં વધુ એક ઉદાહરણનું વિશ્લેષણ કરીએ. જો $n=5$ પસંદ કરવામાં આવે તો $g(5)=14, g^2(5)=7, g^3(5)=20, g^4(5)=10, g^5(5)=5, g^6(5)=14$ મળે છે. આમ ક્રિયા g માટે 14, 7, 20, 10, 5, 14 પુનરાવર્તિત રીતે ચાલ્યા જ કરશે. આથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ક્રિયા g માટે હરહંમેશ 1 મળતું નથી. આ ઉપરાંત 17, 25,

34, 37, 41, 50, 55, 61, 68, 74, 82, 91, 110, 122, 136, 164, 182, 272 વગેરે સંખ્યાઓ માટે પણ 1 સિવાયની પુનરાવર્તિત શ્રેણી મળે છે. ડેડેલસની ક્રિયા g માટે બ્લેકહોલ સંખ્યા મળતી નથી.

ડેડેલસ તથા ઈકારુસની આ વાર્તામાં તેઓએ પાંખો લગાવીને મિનારા પરથી કૂદવાની તૈયારી કરી હતી ત્યાં સુધીની દરેક વાત ગ્રીક પૌરાણિક કથા મુજબની જ છે. પરંતુ તે કથામાં ત્યારબાદની જે વાત છે તેમાં વળાંક લાવીને મેં બ્લેકહોલ સંખ્યા 1ની દિશામાં દોરી જતી વાર્તા રચીને મૂળ વાર્તામાં ફેરફાર કર્યો છે. અસલ વાર્તા મુજબ તો મિનોસ ને તેમની ભાગી છૂટવાની યોજનાની કોઈ જાણ થઈ ન હતી. ડેડેલસ તથા ઈકારુસ તેમના હાથમાં પાંખો લગાવીને મિનારા પરથી કૂદી પડ્યા હતા અને પાંખો વીંઝીને ક્રેટ ટાપુથી ઘણે દૂર પહોંચી ગયા હતા. જ્યાં સુધી તેમની નજર જાય ત્યાં સુધી ઉપર નીલગગન તથા નીચે અફાટ સમુદ્ર ફેલાયેલ હતો. તેઓએ નક્કી કરેલ યોજના મુજબ જ ડેડેલસે યોગ્ય ઊંચાઈએ ઉડવાનું ચાલુ રાખ્યું હતું. પરંતુ કોઈ મનુષ્ય ન કરી શકે તેવા તેમના ઈશ્વરીય સમકક્ષ કાર્યની સફળતાને કારણે ઘમંડ તથા લાગણીના આવેશમાં આવીને ઈકારુસ ઝડપથી પાંખો વીંઝીને ઉપરને ઉપર જવા લાગ્યો હતો. આ કારણસર અતિશય ગરમીના કારણે તેની પાંખો પરનું મીણ ઓગળવા લાગ્યું હતું અને પાંખો પરનાં પીંછાં છૂટાં પડવા લાગ્યાં હતાં. થોડાજ સમયમાં તે સમુદ્રમાં પડી ગયો હતો અને તેનું મૃત્યુ થયું હતું. સમય જતાં અપરાધભાવ અને પોતાનાં દુષ્કૃત્યો બદલના પસ્તાવાને કારણે ડેડેલસનું પણ મૃત્યુ થયું હતું. આમ પિતા-પુત્ર બન્ને જણને તેમના આચરણની કિંમત ચુકવવી પડી હતી.

સંદર્ભ : https://greece.mrdonn.org/greekgods / icarus.html.

*****

અમે એટલું જ સમજવાના છીએ

જર્મન ગણિતજ્ઞ વોન કારમન (Von Karman) જર્મનમાં એક વ્યાખ્યાન આપી રહ્યા હતા. થોડા સમય પછી તેમને ખ્યાલ આવ્યો કે તેઓ જે વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ બોલી રહ્યા હતા તેમને તો માત્ર અંગ્રેજી જ આવડતું હતું. કોઈને જર્મન આવડતું ન હતું. થોડા ક્ષુબ્ધ થઈ ગયા. વિદ્યાર્થીઓને કહે : ‘તમારે પહેલેથી મારું ધ્યાન ખેંચવું જોઈતું હતું. તમે મને કહ્યું કેમ નહિ?’ થોડી વાર શાંતિ છવાઈ ગઈ. પછી એક વિદ્યાર્થીએ કહ્યું : ‘સાહેબ, અફસોસ ન કરશો. તમે જર્મનમાં બોલો કે અંગ્રેજીમાં અમે તો સરખું જ સમજવાના છીએ.’

*****

પ્રશ્ન ચર્ચા - ભૂમિતિ (1)

જૈમિન પટેલ
એરાઈસ ફ્લોરસ, ગોતા, અમદાવાદ-382481
(M) 99042 35869

આપણે ઘણીવાર ગણિતના- અને વિશેષ કરીને ભૂમિતિના કોઈ પ્રશ્નો જોઈએ છીએ ત્યારે પ્રશ્ન થાય છે કે ઉકેલ શોધનારને આ ઉકેલ સૂઝ્યો કઈ રીતે ? આ પ્રશ્ન વાજબી છે કારણ કે જો ઉકેલ પાછળની વિચાર પ્રક્રિયા સમજી શકાય તો એ પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ કરીને પ્રશ્નોના ઉકેલ શોધવા સરળ બને પરંતુ ઉકેલ શોધવા પાછળની વિચાર પ્રક્રિયા સમજવી સહેલી નથી. એ પ્રક્રિયા સમજાવવી તો ઘણી અઘરી છે. એવું જોવામાં આવ્યું છે કે ચીલાચાલુ(routine) ન હોય તેવા પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે ઠીક ઠીક મનોમંથન કરવું પડે છે. વિચારો પણ કોઈ ચોક્કસ દિશા વગર આડા અવળા ચાલતા હોય છે. અને પછી એકાએક જ સ્ફુરણા થાય છે અને ઉકેલનો માર્ગ મળી જાય છે. આમ છતાં કેટલીક બાબતો પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે ધ્યાનમાં રાખવી જરૂરી છે, એટલુંજ નહિ આ બાબતો ઉકેલ શોધવામાં મદદરૂપ પણ બની શકે છે.

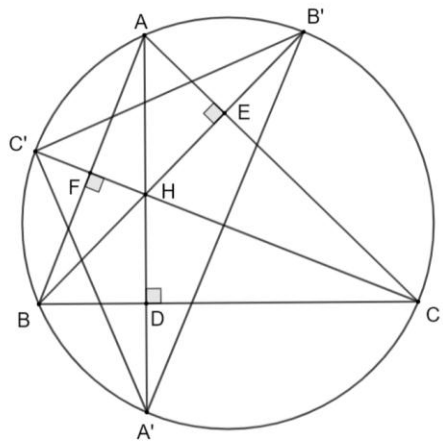
1. પ્રશ્નમાં આવતા ગાણિતિક શબ્દો બરાબર સમજવા.
2. પ્રશ્નમાં આપેલી વિગત બરાબર સમજવી.
3. પ્રશ્નમાં જે પૂછ્યું હોય તે સ્પષ્ટ રીતે સમજવું.
4. ભૂમિતિના પ્રશ્ન માટે સ્વચ્છ આકૃતિ દોરવી.
5. પ્રશ્નની છણાવટ કરવી. પ્રશ્નમાં આપેલી વિગતો પરથી ઉકેલ તરફ દોરી જતા શક્ય માર્ગો વિશે વિચાર કરવો.

એક ઉદાહરણ લઈને આ બાબતો સમજીએ.

પ્રશ્ન: લઘુકોણ ત્રિકોણ ABCનું લંબકેન્દ્ર H છે. રેખાઓ AH,BH અને CH ત્રિકોણ ABCના પરિવૃત્તને ફરી અનુક્રમે A', B' અને C' બિંદુઓમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે H એ ત્રિકોણ $A'\ B'\ C'$નું અંતઃકેન્દ્ર છે.

પૃથક્કરણ: પ્રશ્ન વાંચતાં જણાશે કે શરૂઆત કરતાં પહેલાં લંબકેન્દ્ર અને અંતઃકેન્દ્રની સમજ હોવી ખૂબ જરૂરી છે. આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણના વેધોને સમાવતી ત્રણ રેખાઓ સંગામી હોય છે અને તે સંગમ બિંદુને લંબકેન્દ્ર કહે છે. તેવીજ રીતે ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાના અંતઃકોણદ્વિભાજકો સંગામી હોય છે અને તે સંગમબિંદુને અંતઃકેન્દ્ર કહે છે (લંબકેન્દ્રમાં વેધોને સમાવતી **રેખાઓ** અને અંતઃકેન્દ્રમાં માત્ર અંતઃકોણ દ્વિભાજકો? તેમાં અંતઃકોણ દ્વિભાજકોને સમાવતી રેખા શા માટે નહિ?). પ્રશ્નમાં માગ્યા પ્રમાણે આકૃતિ દોરવા લઘુકોણ ત્રિકોણ ABC દોરી તેનું પરિવૃત્ત દોરીએ. ત્યારબાદ શિરોબિંદુઓ A, B અને Cમાંથી સામેની બાજુને

લંબ હોય તેવી રેખાઓ પરિવૃત્તને છેદે ત્યાં સુધી લંબાવીએ જેથી બિંદુઓ A', B' અને C' મળશે અને તે લંબ રેખાઓ બિંદુ H માં છેદશે. હવે આપણે Hને ત્રિકોણ $A'\,B'\,C'$નું અંતઃકેન્દ્ર બતાવવું છે. તો તેના માટે $\overline{A'\,H}, \overline{B'H}$ અને $\overline{C'\,H}$ ને અનુક્રમે $\angle B'\,A'\,C', \angle C'\,B'\,A'$ અને $\angle A'C'B'$ના કોણ દ્વિભાજકો બતાવવા પડશે. તેમ કરવા માટે કોઈ એક ખૂણા, $\angle B'A'C'$ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. $\overline{A'H}$ ને $\angle B'A'C'$નો કોણ દ્વિભાજક બતાવવા આપણે સાબિત કરવું જોઈએ કે $m\angle B'\,A'\,H = m\angle C'A'H$. અત્યાર સુધી જે પણ કર્યું તે માત્ર વ્યાખ્યાઓના સહારે કર્યું છે, પણ હવે આગળ વધવા થોડું અલગ વિચારવું પડશે. નોંધીએ કે બિંદુ A' એ ત્રિકોણ ABCના પરિવૃત્ત પર આવેલું છે અને સાથે સાથે એ પણ નોંધીએ કે, $\angle B'\,A'\,H \cong \angle B'A'A$ અને $\angle C'\,A'\,H \cong \angle C'A'A$. માટે આપણે $m\angle B'\,A'\,A = m\angle C'A'A$ સાબિત કરીએ તો પણ ચાલશે. આવું આપણે એટલા માટે વિચાર્યું કે, જે બે ખુણાનાં માપ સરખાં બતાવવાનાં છે તે જો



વર્તુળની સાથે સંકળાયેલાં હશે તો તેમને સરખાં બતાવવા માટે હવે વર્તુળ માટેનાં અમુક પરિણામોનો પણ ઉપયોગ થઈ શકશે. જેમકે $m\angle B'\,A'\,H = m\angle B'BA$ કારણકે તે જીવા $\overline{AB'}$ દ્વારા રચાતા એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ છે અને તેવીજ રીતે $m\angle C'\,A'\,A = m\angle C'CA$. તો હવે $m\angle B'\,A'\,A = m\angle C'A'A$ની જગ્યાએ $m\angle B'\,BA = m\angle C'CA$ સાબિત કરીશું તો પણ આપણું કામ થઈ જશે. એક વાત નોંધીએ કે અત્યાર સુધી H એ લંબકેન્દ્ર છે તેનો ઉપયોગ કર્યો નથી. તેનો ઉપયોગ કરવા ત્રણેય વેધોના લંબપાદને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે D, E અને F નામ આપીએ. હવે કાટકોણ ત્રિકોણ AFCમાં $m\angle ACF = 90° - m\angle BAC$ (શા માટે?) અને કાટકોણ ત્રિકોણ ABEમાં $m\angle ABE = 90° - m\angle BAC$. માટે $m\angle ACF = m\angle ABE \Rightarrow m\angle C'\,CA = m\angle B'\,BA$. આવીજ રીતે $\overline{B'H}$ અને $\overline{C'H}$ને અનુક્રમે $\angle A'B'C'$ અને $\angle B'C'A'$ના કોણ દ્વિભાજક બતાવી શકાય. માટે H એ ત્રિકોણ $A'B'C'$નું અંતઃકેન્દ્ર થશે. (એક જાણીતું પરિણામ એ પણ છે કે ત્રિકોણના ત્રણેય કોણ દ્વિભાજકો સંગામી હોય છે. માટે ત્રણ $\overline{A'H}, \overline{B'H}$ અને $\overline{C'H}$ પૈકી કોઈ પણ બે ને કોણ દ્વિભાજક સાબિત કરીએ તો ચાલે. અહીં $\overline{A'H}, \overline{B'H}$ અને $\overline{C'H}$ સરખા પ્રકારની દલીલોથી કોણ દ્વિભાજકો સાબિત થાય છે. કેટલાક પ્રશ્નો એવા પણ હોય છે જેમાં સરખા પ્રકારની દલીલોથી સાબિત ન પણ થાય. ભવિષ્યના અંકોમાં તેવા પ્રકારના પ્રશ્નોની પણ ચર્ચા કરીશું.)

પ્રશ્નનું પૃથક્કરણ કર્યા બાદ પ્રશ્નનો વિધિવત ઉકેલ આપીએ. ઉકેલમાં જરૂરી પગલાં હોવાં જોઈએ અને જરૂરી હોય એ જ પગલાં હોવાં જોઈએ. ઉપરાંત જે જે પગલાંનું સમર્થન જરૂરી હોય તે સમર્થન પણ આપવું જોઈએ.

ઉકેલ: આપણે પહેલાં બતાવીશું કે $\overline{A'H}$ $\angle B'A'C'$નો અંતઃદ્વિભાજક છે.

$\angle B'\,A'\,H \cong \angle B'\,A'\,A$ અને $\angle C'\,A'\,H \cong \angle C'A'A$

$(\because A' - H - A$ અને $C' - H - C)$ ...(1)

$\left.\begin{array}{l}\text{વળી, } \angle B'\,A'\,A \cong \angle B'\,BA \text{ (જીવા } \overline{B'A}\text{ના એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)} \\ \text{અને } \angle C'\,A'\,A \cong \angle C'\,CA \text{ (જીવા } \overline{C'A}\text{ના એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)}\end{array}\right\}$ ...(2)

(1) અને (2) પરથી,

$\left.\begin{array}{l}\angle B'\,A'\,H \cong \angle B'\,BA \text{ અને } \angle C'\,A'\,H \cong \angle C'CA \\ \text{ઉપરાંત, } m\angle B'\,BA = m\angle EBA = 90^\circ - m\angle A\end{array}\right\}$ ...(3)

અને $m\angle C'\,CA = m\angle FCA = 90^\circ - m\angle A$ ...(4)

(3) અને (4) પરથી,

$m\angle B'\,A'\,H = m\angle C'A'H$

આથી $\overline{A'H}$ $\angle B'A'C'$નો અંતઃદ્વિભાજક છે. આવી જ રીતે $B'H$ $\angle C'B'A'$ નો અંતઃદ્વિભાજક છે અને $\overline{C'H}$ $\angle A'C'B'$ નો અંતઃદ્વિભાજક છે. આથી H એ ત્રિકોણ $A'B'C'$ નું અંતઃ કેન્દ્ર છે.

નોંધ : ઉપરના પ્રશ્નમાં ત્રિકોણ ABC લઘુકોણ આપેલ છે. એ ત્રિકોણ કાટકોણ કે ગુરુકોણ હોય તો શું થાય? વિચાર કરજો. થોડું સૂચન કરું. જો $\angle A$ કાટખૂણો હોય તો $A = H = B' = C$ થશે. આથી ત્રિકોણ $A'B'C'$ બનશે જ નહિ. જો $\angle A$ ગુરુકોણ હોય તો AH $\angle A'$નો અંતઃદ્વિભાજક હશે જ્યારે $\overline{B'H}$ અને $\overline{C'H}$ અનુક્રમે $\angle B'$ અને $\angle C'$ ના બાહ્યદ્વિભાજક થશે. આથી H ત્રિકોણ $A'B'C'$ નું A' સામેનું બહિર્કેન્દ્ર (excentre) થશે. અલબત્ત આની સાબિતી જોઈશે. તમે પ્રયત્ન કરજો અને મને મોકલશો. આવતા અંકમાં તેની ચર્ચા કરીશું. આવતા અંકમાં આપણે નીચેના પ્રશ્નની પણ ચર્ચા કરીશું. આ પ્રશ્નનો ઉકેલ પણ તમે મને મોકલી શકો છો.

આવતા અંક માટે પ્રશ્ન: ત્રિકોણ ABC લઘુકોણ ત્રિકોણ છે. કિરણો AX અને AY એવી રીતે છે કે જેથી $\angle XAB$ના અંદરના ભાગમાં, $\angle BAC$ના અંદરના ભાગમાં અને $\angle YAC$ના અંદરના ભાગમાં કોઈ પણ બિંદુ સામાન્ય નથી તથા $m\angle XAB = m\angle YAC = \theta$ અને $\theta < 90^0$. B' અને C' એ બિંદુઓ B અને Cમાંથી અનુક્રમે કિરણો AX અને AY પર દોરેલા લંબના લંબપાદ છે. જો M એ $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ હોય તો સાબિત કરો કે, $MB' = MC'$.

પરિચય: શ્રી જૈમિન પટેલનો જન્મ 1997માં થયો હતો. તેઓ ચરોતર યુનિવર્સીટીમાંથી મિકેનિકલ એન્જિનિયરીંગમાં ડિગ્રી મેળવ્યા બાદ હાલમાં ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ગણિત વિભાગમાં એમ. એસસી.ના બીજા સેમેસ્ટરમાં અભ્યાસ કરી રહ્યા છે.

[**તંત્રીનોંધ:** આ લેખમાં શ્રી જૈમિન પટેલે ભૂમિતિના પ્રશ્નના ઉકેલ અંગે સુંદર છણાવટ કરી છે. ઘણા બધા પ્રશ્નોના ઉકેલ જોઈ જઈએ તેના કરતાં થોડા પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે પૂર્ણ વિચાર કરી ઉકેલ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ એ વધુ લાભકારક છે. પ્રશ્નના ઉકેલ માટે વિચાર કઈ રીતે કરી શકાય એ બાબત જૈમિને આ લેખમાં બતાવવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે. વિદ્યાર્થીઓ અને શિક્ષકોને આ લેખમાળા ભૂમિતિના પ્રશ્નો ઉકેલ મેળવવામાં મદદરૂપ થશે તેવી આશા છે. - એમ. એચ. વસાવડા]

*****

ક્રમિક સંખ્યાઓના સરવાળાની સમતાઓ

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

પેટર્ન જોઈ ? કોઈ પણ સમતાની જમણી બાજુના સરવાળાની છેલ્લી સંખ્યા પછીની સંખ્યા એ પછીની સમતાની ડાબી બાજુના સરવાળાની પહેલી સંખ્યા છે. (જેમ કે બીજી સમતાની જમણી બાજુના સરવાળાની છેલ્લી સંખ્યા 8. ત્યાર પછીની સંખ્યા 9. ત્રીજી સમતાની ડાબી બાજુના સરવાળાની પહેલી સંખ્યા 9.) હવે ચોથી અને પાંચમી સમતાને લખી એ સમતાઓ ચકાસો અને છેલ્લે, કોઈ ગણતરી વિના, ફટાફટ, દશમી સમતા લખી શકો ? તો લખો.

*****

પ્રશ્નાવલિ

1. આ કોણે કહ્યું ?

If I have seen a little farther than others it is because I have stood on the shoulters of giants.

આ વિધાનમાં કયા ‘giants’ની વાત છે ?

2. એનું મૃત્યુ માત્ર 21 વર્ષની વયે દ્વંદ્વ યુદ્ધમાં લડતાં લડતાં થયું. પરંતુ તેનું ગણિતનું પ્રદાન તેને અમરત્વ અપાવી ગયું. એ કોણ ?

*****

પ્રા. ડૉ. સુભાષભાઈ ભટ્ટ

રેખાબેન મહેતા
વલ્લભવિદ્યાનગર

ગુજરાતમાં ગણિત સંશોધનક્ષેત્રે વિરલ કહેવાય તેવી સિદ્ધિ મેળવનાર પ્રા.સુભાષભાઈના અચાનક અવસાનથી સંશોધનક્ષેત્રે કદી ન પૂરી શકાય તેવી ખોટ પડી છે. ટોચના સંશોધનકર્તા, આદરણીય અધ્યાપક, પ્રેમાળ વ્યક્તિ અને વિનમ્ર માનવ એવા અનેકવિધ ગુણોનો તેમનામાં સમન્વય હતો.

મારાં તેમની સાથેનો પરિચય અને સહકાર્ય લગભગ ૪૭ વર્ષોનાં. વયમાં તેઓ મારાથી એકાદ વર્ષ મોટા, પણ ગણિતવિભાગમાં (સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી) હું ૧૯૭૨માં અને તેઓ ૧૯૭૩માં પૂર્ણ સમયના સંશોધન વિદ્યાર્થી તરીકે જોડાયાં હતાં, બંને પ્રા. વસાવડા સાહેબના માર્ગદર્શન હેઠળ. આમ ગણિતીય સંબંધે અમે સાથે ઊછર્યાં; અલબત્ત, તેઓ પછી ઘણા આગળ નીકળી ગયા, એટલે તેમનાં સંસ્મરણો આલેખવા બેસું તો ક્યાંથી શરૂ કરી, ક્યાં પૂરું કરું એવો પ્રશ્ન થાય.

શરૂઆતમાં ગણિતીય ચર્ચાઓ, સેમિનારો સાથે ચાની લારીએ ચુસ્કી લેતાં ઘર-કુટુંબ-મિત્રોની, સ્વાધ્યાય પ્રવૃત્તિની, ગણિત વિષેની એવી વાતો ચાલ્યા કરતી. જો કે હું જ વધારે બોલ-બોલ કરતી, તેથી સુભાષભાઈ અને ખારોડ સુભાષભાઈ મને talking champion કહેતા.

ધીમે ધીમે, સંયોગોવશાત્ અમે ગંભીર બની કારકિર્દીને રસ્તે ચડી ગયાં અને અહીં જ ગણિતવિભાગમાં વ્યાખ્યાતા, રીડર, પ્રાધ્યાપક એમ આગળ વધતાં ગયાં. સુભાષભાઈની તેજસ્વી શૈક્ષણિક ઉપલબ્ધિઓથી સહુ પરિચિત છે જ, એટલે તેના વિષે હું વિશેષ કહેતી નથી. હા, એટલું જરૂર કહીશ કે સંશોધન માટે તેમની નિશ્ચયાત્મકતા અજોડ હતી. સંશોધન જ નહિ, જે પણ કામ હાથ પર લે તે પૂરી ધગશ અને લગનથી પાર પાડે.

એક જ વિભાગમાં હોવાથી, ડિપાર્ટમેન્ટની અનેકવિધ પ્રવૃત્તિઓ; સેમિનાર, કોન્ફરન્સનાં આયોજનો, સાપ્તાહિક સેમિનારો, એનાલીસીસ ગ્રુપની મિટિંગો, સંશોધનકક્ષાનાં નવાં પુસ્તકોની સાથે બેસીને ચર્ચા કરવી એવું ઘણું ઘણું સાથે કરવાની તક મળી. વિભાગનો એ સુવર્ણયુગ હંમેશાં યાદ રહેશે. સદ્ભાગ્યે, આ વાતાવરણમાં વિકસેલા નવા સદસ્યો પણ એ પરંપરા જાળવી રહ્યા છે, તેથી સ્વ.સુભાષભાઈનો આત્મા જરૂર સંતોષ-આનંદ અનુભવતો હશે.

સુભાષભાઈનો એક બીજો નોંધપાત્ર ગુણ તેમની દરિયાદિલી તેઓ પોતે કોઈ સમૃદ્ધ પરિવારમાંથી નહોતા આવતા, પરંતુ નબળી આર્થિક સ્થિતિવાળી વ્યક્તિને ઉદારદિલથી મદદ કરતા મેં તેમને વિદ્યાર્થીકાળથી જોયા છે.

તેમના અણધાર્યા અવસાનથી અમને સહુને અને ગુજરાતના ગણિતજગતને ન પૂરી શકાય તેવી ખોટ પડી છે. તેમના પરિવાર માટે તો આ અસહ્ય આઘાત છે. તેમના ઉચ્ચ અને પવિત્ર આત્માને ચિર શાંતિ અર્પે, એ જ પરમાત્માને પ્રાર્થના – વંદન.

[**તંત્રીનોંધ :** પ્રા.ડૉ. સુભાષભાઈ ભટ્ટનું અવસાન ૨૬મી ફેબ્રુઆરી, ૨૦૨૦ના રોજ થયું. તેમને શ્રદ્ધાંજલિ આપતો આ લેખ રેખાબેન મહેતાએ ત્યારબાદ થોડા સમયમાં મોકલ્યો હતો, પરંતુ લૉકડાઉન અને પૅન્ડેમિકને કારણેની અન્ય મુશ્કેલીઓને લીધે લેખ સુગણિતમ્‌માં પ્રસિદ્ધ થઈ શક્યો ન હતો. વિલંબ માટે રેખાબેનની ક્ષમા યાચના.]

*****

ક્ષમાયાચના

સુગણિતમ્‌ના પ્રાધ્યાપક અરુણ વૈદ્ય વિશેષાંક (સળંગ અંક 305)માં પ્રા. અરુણ વૈદ્યનો ‘some Unlikely But Amazing Men of Mathematics I have met’ એ શીર્ષકનો લેખ પ્રકાશિત થયો છે (પાના નં.1-12) ગુજરાત ગણિત મંડળના ઑક્ટોબર-2019માં જામનગર ખાતે યોજાયેલા 56મા અધિવેશન ખાતે અરુણભાઈએ આપેલા વ્યાખ્યાન પર આધારિત આ લેખ પ્રથમ The Mathematics consortium Bulletin (TMCB)ના Vol.1, Issue 3, January 2020માં પ્રસિદ્ધ થયો હતો (પાનાનં. 13-23). સુગણિતમ્‌માં આ લેખ પુનર્મુદ્રિત કરવા માટે અમારે TMCBના તંત્રી મંડળની મંજૂરી લેવી જરૂરી હતી. અમે આ બાબત ચૂકી ગયા હતા. અમારી આ ચૂક માટે અમો TMCBના તંત્રીમંડળના ક્ષમાપ્રાર્થી છીએ.

સંપાદક મંડળ
(સુગણિતમ્ - પ્રા. અરુણ વૈદ્ય વિશેષાંક)

હોસ્ટેલમાં હલ્લાબોલ

નીતા સંઘવી
આચાર્યા, બ્રાઈટ સ્કુલ, વડોદરા
(M) 8320576754

એક હોસ્ટેલમાં ચાર માળ હતા. દરેક માળ પર અમુક વિદ્યાર્થીઓ રહેતા હતા. શરૂઆતમાં પહેલા માળ પર સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓ હતા.

આ જોઈને બીજા, ત્રીજા અને ચોથા માળના વિદ્યાર્થીઓએ પહેલા માળના વિદ્યાર્થીઓને કહ્યું કે અમે જેટલા છીએ તેટલા તમારામાંથી અમારામાં આવી જાઓ.

આમ કરવાથી બીજા માળ પર વિદ્યાર્થીઓ વધી ગયા.

આ જોઈને પહેલા, ત્રીજા અને ચોથા માળના વિદ્યાર્થીઓએ બીજા માળના વિદ્યાર્થીઓને કહ્યું કે અમે જેટલા છીએ તેટલા તમારામાંથી અમારામાં આવી જાઓ.

આમ કરવાથી ત્રીજા માળ પર વિદ્યાર્થીઓ વધી ગયા.

આ જોઈને પહેલા, બીજા અને ચોથા માળના વિદ્યાર્થીઓએ ત્રીજા માળના વિદ્યાર્થીઓને કહ્યું કે અમે જેટલા છીએ તેટલા તમારામાંથી અમારામાં આવી જાઓ.

આમ કરવાથી ચોથા માળ પર વિદ્યાર્થીઓ વધી ગયા.

આ જોઈને પહેલા, બીજા અને ત્રીજા માળના વિદ્યાર્થીઓએ ચોથા માળના વિદ્યાર્થીઓને કહ્યું કે અમે જેટલા છીએ તેટલા તમારામાંથી અમારામાં આવી જાઓ.

આમ કરવાથી બધા માળ પર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સરખી થઈ ગઈ. તો દરેક માળ પર દરેક વખતે ઓછામાં ઓછાં કેટલાં વિદ્યાર્થીઓ હશે તે શોધો.

આ પ્રશ્ન રાજકોટના શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક દ્વારા OLYMPIADની તૈયારી માટે ચલાવાતા WhatsApp Groupમાંથી લઈને નજીવા ફેરફાર સાથે અત્રે રજૂ કર્યો છે. (ફેરફાર કરવાનો હેતુ પ્રશ્નનો વ્યાપક ઉકેલ મેળવી શકાય તેટલો જ છે.)

આ પ્રશ્નના બે ભિન્ન ઉકેલો તથા વ્યાપક ઉકેલ વડોદરાના શ્રી દયારામ ઠક્કરે મેળવ્યા છે.

આ ઉકેલોને સુગણિતમ્ માટે લેખ સ્વરૂપે આપવાના તેમના અનુરોધને માન આપીને આપની સમક્ષ આ લેખ લઈને ઉપસ્થિત થઈ છું.

તો ચાલો માણીએ દયારામભાઈના ઉકેલો નીતાબેનની કલમે.....

ઉકેલ (પ્રથમ રીત) :

આ ઉકેલ શ્રેણિકની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને મેળવેલ છે. ધારો કે શરૂઆતના પ્રથમ માળ પર ‘a’, બીજા માળ પર ‘b’, ત્રીજા માળ પર ‘c’, અને ચોથા માળ પર ‘d’ વિદ્યાર્થીઓ છે. આ સ્થિતિને P_0 સ્થિતિ (પ્રારંભિક સ્થિતિ) વડે દર્શાવીએ તો P_1 સ્થિતિમાં પહેલા માળ પરથી b વિદ્યાર્થીઓ બીજા માળ પર, c વિદ્યાર્થીઓ ત્રીજા માળ પર અને d વિદ્યાર્થીઓ ચોથા માળ પર જાય છે. તેથી પ્રથમ માળ પર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા a-b-c-d, બીજા માળ પર 2b, ત્રીજા માળ પર 2c અને ચોથા માળ પર 2d થાય. આ રીતે દરેક સ્થિતિમાં જે ફેરફાર થાય છે તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

કોષ્ટક-1

માળ	**પ્રારંભિક સ્થિતિ P_0**	P_1	P_2	P_3	**અંતિમ સ્થિતિ P_4**
1	a	a-b-c-d	2a–2b–2c–2d	4a–4b–4c–4d	8a–8b–8c–dd
2	b	2b	–a+3b–c–d	–2a+6b–2c–2d	–4a+12b–4c–4d
3	c	2c	4c	–a–b+7c–d	–2a–2b+14c–2d
4	d	2d	4d	8d	–a–b–c+15d

અંતિમ સ્થિતિ એટલે કે P_4 સ્થિતિમાં ચારેય માળ પર વિદ્યાર્થીસંખ્યા સરખી થઈ જાય છે તેને x વડે દર્શાવીએ તો નીચે મુજબ સમીકરણસંહતિ મળે.

$8a-8b-8c-8d = x$

$-4a+12b-4c-4d = x$

$-2a-2b+14c-2d = x$

$-a-b-c+15d = x$

જેને શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & 12 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & 14 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 15 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}}$$

જેનો ઉકેલ નીચે મુજબ મળે :

$$X \quad = \quad A^{-1} \quad B$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \alpha = \frac{33x}{16},\ b = \frac{17x}{16},\ c = \frac{9x}{16},\ a = \frac{5x}{16},$

દરેક માળ પર દરેક વખતે ઓછામાં ઓછા કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હશે તે જાણવા માટે xની ન્યૂનતમ કિંમત 16 હોવાથી નીચે મુજબ ઉકેલ મળે.

કોષ્ટક : 2

માળ	**પ્રારંભિક સ્થિતિ P_0**	P_1	P_2	P_3	**અંતિમ સ્થિતિ P_4**
1	33	02	04	08	16
2	17	34	04	08	16
3	9	18	36	08	16
4	5	10	20	40	16

ઉકેલ (બીજી રીત) :

આ રીતમાં કોષ્ટકનું માળખું પ્રથમ રીતમાં છે તેવું જ રાખીશું. માત્ર ગણતરી ઊંધેથી કરીશું.

ધારો કે અંતિમ સ્થિતિ એટલે કે P_4 સ્થિતિમાં દરેક માળ પર સરખા એટલે કે x વિદ્યાર્થીઓ છે. તો P_3 સ્થિતિમાં પહેલા, બીજા તથા ત્રીજા માળ પર $x/2$ વિદ્યાર્થીઓ હશે જ્યારે ચોથા માળ પર

$$x \quad + \quad \frac{3x}{2} \quad = \quad 5x/2$$

[અન્ય બધા માળને વિદ્યાર્થીઓ આપ્યા બાદ વધ્યા તે] [દરેક માળને $x/2$ વિદ્યાર્થીઓ આપ્યા તે]

વિદ્યાર્થીઓ હશે.

આ રીતે ઊંધી ગણતરી કરતાં નીચે દર્શાવ્યા મુજબ કોષ્ટક મળશે.

કોષ્ટક : 3

માળ	પ્રારંભિક સ્થિતિ P_0	P_1	P_2	P_3	અંતિમ સ્થિતિ P_4
1	$\frac{33x}{16}$	$\frac{x}{8}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{2}$	x
2	$\frac{17x}{16}$	$\frac{17x}{8}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{2}$	x
3	$\frac{9x}{16}$	$\frac{9x}{8}$	$\frac{9x}{4}$	$\frac{x}{2}$	x
4	$\frac{5x}{16}$	$\frac{5x}{8}$	$\frac{5x}{4}$	$\frac{5x}{2}$	x

અગાઉ મુજબ અત્રે ની ન્યૂનતમ કિંમત 16 લેવાથી કોષ્ટક : 2 માં દર્શાવ્યા મુજબ ઉકેલ મળે.

નોંધ : 16ના ગુણિતમાં ની જુદી જુદી કિંમત લેવાથી અનેક ઉકેલો મળી શકે.

વ્યાપક ઉકેલ :

મિત્રો, અત્રે પ્રશ્નમાં ચાર માળ આપેલા છે પરંતુ ચાર કરતાં ઓછા કે વધારે માળ હોય તો દરેક માળ પર પ્રારંભિક સ્થિતિ એટલે કે P_0 સ્થિતિમાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હશે તે નીચે દર્શાવેલ સૂત્ર દ્વારા શોધી શકાય.

જો n = કુલ માળની સંખ્યા $(n \geq 2)$

k = માળનો ક્રમાંક, k = 1, 2, 3, ...n

a_k = k માં માળ પર પ્રારંભિક સ્થિતિમાં વિદ્યાર્થી સંખ્યા હોય તો

$a_k = n\left(2^{n-k}\right) + 1$

દા.ત. અત્રે આપેલ પ્રશ્ન મુજબ કુલ ચાર માળ હોય તો ઉપર આપેલ સૂત્રમાં n=4 અને k = 1,2,3,4 મૂકતાં

$a_1 = 4\,(2^{4-1}) + 1 = 32 + 1 = 33$

$a_2 = 4\,(2^{4-2}) + 1 = 16 + 1 = 17$

$a_3 = 4\,(2^{4-3}) + 1 = 8 + 1 = 9$

$a_4 = 4\,(2^{4-4}) + 1 = 4 + 1 = 5$ મળે.

આમ, પ્રારંભિક એટલે કે P_0 સ્થિતિમાં પહેલા, બીજા, ત્રીજા અને ચોથા માળે અનુક્રમે 33, 17, 9 અને 5 વિદ્યાર્થીઓ હશે જે આપણી ગણતરી સાથે સુસંગત છે.

નોંધ :

(1) જો માળની સંખ્યા n $(n \geq 2)$ હોય તો કુલ વિદ્યાર્થી સંખ્યા હોય અને અંતિમ સ્થિતિએ દરેક માળ પર 2^n વિદ્યાર્થીઓ હોય.

(2) પ્રારંભિક સ્થિતિમાં દરેક માળ પર વિદ્યાર્થી સંખ્યા મળી ગયા પછી દરેક સ્થિતિમાં દરેક માળ પર કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હશે તે મૌખિક ગણતરીથી સહેલાઈથી શોધી શકાય.

સંખ્યાઓનો જાદુ

કલ્પેશ ડી. અખાણી
રાધનપુર
(M) 98790 53369

ઝી બાંગ્લા ટીવી પર સૌરવ ગાંગુલીનો ટીવી શો દાદાગીરી આવે છે. હમણાં એક એપિસોડમાં કલકત્તાના જાણીતા એનાલિસ્ટ, જાદુગર શતાબ્દો સેનગુપ્તાનો શો રજૂ થયેલો. લોકડાઉનના સમયગાળામાં શતાબ્દોના ઓનલાઈન પ્રોગ્રામમાં જોડાવવાનું થયેલું. તેમજ તેની સાથે વોટ્સએપ ચેટ તેમજ ફોન પર વાતો થયેલી.

પ્રસ્તુત એપિસોડમાં ગણિતની એક સરસ યુક્તિ તેણે રજૂ કરેલી તે આ લેખમાં રજૂ કરું છું.

ધારો કે આ શો શતાબ્દોની જગ્યાએ કલ્પેશ અખાણી રજૂ કરે છે. શરૂઆતમાં એક બંધ કવર પ્રો.મહાવીરભાઈ વસાવડાને આપવામાં આવે છે. તેમાં અગાઉથી એક સંખ્યા લખાયેલી છે.

હવે બોર્ડ પર પાંચ અંકની પાંચ સંખ્યાઓ જાદુગર પ્રેક્ષકોને બતાવે છે.

$$\left.\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 4 & 1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

જાદુગર મંચ પર પાંચ વ્યક્તિઓને બોલાવે છે. પહેલી વ્યક્તિને પહેલી હારમાંથી કોઈ અંક એક પસંદ કરવા કહે છે. તે 2 પસંદ કરે છે.

બીજી હારમાંથી કોઈ એક અંક પસંદ કરવા કહે છે. તે 3 પસંદ કરે છે.

આજ પ્રમાણે ત્રીજી હારમાંથી 1, ચોથી હારમાંથી 4 તથા પાંચમી હારમાંથી 7 પસંદ કરે છે.

આમ, પહેલો પ્રેક્ષક સંખ્યા પસંદ કરે છે : 2 3 1 4 7

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \underline{2} & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & \underline{3} & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & \underline{1} & 2 \\ 9 & \underline{4} & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & \underline{7} & 4 & 1 \end{array}$$

હવે, બીજા પ્રેક્ષકને આજ પ્રમાણે પહેલી, બીજી, ત્રીજી, ચોથી અને પાંચમી હારમાંથી અંક પસંદ કરવા કહે છે.

બીજો પ્રેક્ષક સંખ્યા પસંદ કરે છે : 1 5 6 3 8

3	2	(1)	4	2
5	4	3	2	(5)
7	(6)	2	1	2
9	4	(3)	2	3
5	(8)	7	4	1

ત્રીજો પ્રેક્ષક આજ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરે છે.

ત્રીજો પ્રેક્ષક સંખ્યા પસંદ કરે છે : 3 4 7 9 4

~~3~~	2	(1)	4	2
5	~~4~~	3	2	(5)
~~7~~	(6)	2	1	2
~~9~~	4	(3)	2	3
5	(8)	7	~~4~~	1

આજ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરી ચોથો પ્રેક્ષક સંખ્યા પસંદ કરે છે : 4 5 2 3 1

~~3~~	2	(1)	4	2
5	~~4~~	3	2	(5)
~~7~~	(6)	2	1	2
~~9~~	4	(3)	2	3
5	(8)	7	~~4~~	1

બાકી રહેલા અંકોથી પાંચમા પ્રેક્ષકની સંખ્યા થશે : 2 2 2 7 5

હવે જાદુગર કોઈ અન્ય પ્રેક્ષકને બોલાવી અગાઉ પાંચ પ્રેક્ષકોએ પસંદ કરેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવાનું કહે છે.

2	3	1	4	7
1	5	6	3	8
3	4	7	9	4
4	5	2	3	1
2	2	2	2	5
1 4	1	0	3	5

(2)

હવે જાદુગર મહાવીરભાઈ વસાવડાને કવર ખોલવા માટે કહે છે. વસાવડા સાહેબ કવર ખોલે છે. તેમાં ઉપરની જ સંખ્યા 1 4 1 0 3 5 લખેલી હોય છે. પ્રેક્ષકો ખુશ થઈને તાળીઓ પાડે છે. જાદુગર કહે છે : આ કોઈ સામાન્ય સંખ્યા નથી. આ તો આપણા સૌના પ્રિય સ્વ. અરુણભાઈ વૈદ્ય સાહેબની જન્મ તારીખ છે.

1 4 1 0 3 5 → 14-10-35

પ્રેક્ષકો ફરી જોરદાર તાળીઓ પાડે છે.

આ પ્રયુક્તિનું રહસ્ય જોઈએ. જાદુગરે શરૂઆતમાં લખેલી પાંચ સંખ્યાઓ (1)ને હારને બદલે સ્તંભમાં લખીએ તો (3)માં દર્શાવેલી સંખ્યાઓ મળે, જેનો સરવાળો 141035 થાય છે.

$$\left.\begin{array}{cccccc} & 3 & 5 & 7 & 9 & 5 \\ & 2 & 4 & 6 & 4 & 8 \\ & 1 & 3 & 2 & 3 & 7 \\ & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right\}(3)$$

જાદુગર સંખ્યાઓ (1) જાણે છે. તેથી સંખ્યાઓ (3) પણ જાણે છે અને તેથી સરવાળો 1 4 1 0 3 5 જાણે છે. આ સરવાળાની રકમ તે બંધ કવરમાં મૂકી દે છે. હવે પ્રશ્ન એ થાય કે પ્રેક્ષકોએ પસંદ કરેલી સંખ્યાઓ (2) અને સંખ્યાઓ (3)ના સરવાળા સરખા કેવી રીતે થાય ? આ માટે જુઓ કે (2)ની સંખ્યાઓના પહેલા સ્તંભના અંકો 2, 1, 3, 4, 2 છે જે (જુદા ક્રમમાં) (3)ની સંખ્યાઓના પહેલા સ્તંભના જ અંકો છે. તેવી જ રીતે (2)માંની સંખ્યાઓના બીજા, ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા સ્તંભમાં અંકો (3)માંની સંખ્યાઓના અનુક્રમે બીજા, ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા સ્તંભના જ અંકો છે.

હવે અમુક સંખ્યાઓના સ્તંભોના અંકો એટલી જ સંખ્યાઓના બીજા સમૂહના અનુરૂપ સ્તંભોને (કોઈ ક્રમમાં) સમાન હોય તો બંને સમૂહની સંખ્યાઓનો સરવાળો સરખો થશે. જેમ કે,

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 5 \\ & 6 & 0 & 8 \\ & 2 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{cccc} & 2 & 0 & 5 \\ & 3 & 7 & 8 \\ & 6 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{cccc} & 6 & 7 & 5 \\ & 2 & 4 & 9 \\ & 3 & 0 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

આવું શા માટે થાય છે એ જોવું સહેલું છે. વિચારજો.

હવે પ્રશ્ન એ તો રહ્યો જ કે (2) અને (3)ના સ્તંભના અંકો સરખા કેમ છે ? આ માટે જુઓ કે (2)ના પહેલા સ્તંભના અંકો પાંચ પ્રેક્ષકોએ પસંદ કરેલી પાંચ સંખ્યાના પહેલા અંક છે અને દરેક પ્રેક્ષકે પહેલો અંક (1)માંની પહેલી સંખ્યાના અંકોમાંથી પસંદ કરેલ છે. આમ (2)ના પહેલા સ્તંભના અંકોએ (1)ની પહેલી હારના જ અંકો છે, એટલે કે (3)ના પહેલા સ્તંભના જ અંકો છે. આવું જ (2)ના બીજા, ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા સ્તંભના અંકોનું.

* * * * *

Kaprekar's Constant and Beyond

J. H. Bhatt
Vadodara (M) 63544 95717
E-mail : jagdishchandrabhatt1945@gmail.com

Take any four digited number, say, 1423. Now derive the number ABCD from 1423 such that

A is greater than or equal to B,

B is greater than or equal to C,

C is greater than or equal to D.

We get ABCD = 4321.

Now replace A by D, B by C, C by B and D by A.

We get DCBA = 1234.

Now get ABCD-DCBA.

4321 – 1234 = 3087.

Go on repeating the same in succession.

8730 – 0378 = 8352.

8532 – 2358 = 6174.

7641 – 1467 = 6174.

We arrived at a constant 6174 which is known as Kaprekar's Constant. ....(A).

Similarly, I have derived other constants under different permutations of A, B, C and D.

ADCB-DABC from the same number 1423 we get the following.

4123 – 1432 = 2691.

9126 – 1962 = 7164.

7146 – 1764 = 5382.

8235 – 2853 = 5382.

Here 5382 is a constant ....(B).

Now under sequential operations of BADC-CDAB from the same number 1423 we get the following.

3412 – 2143 = 1269.

6912 – 2196 = 4716.

6714 – 4176 = 2538.

5823 – 3285 = 2538.

Here 2538 is a constant ....(C).

Now under sequential operations of BCDA-CBAD from the same number 1423 we get the following.

3214 – 2341 = 0873.

7308 – 3780 = 3528.

5328 – 3582 = 1746.

6417 – 4671 = 1746.

Here 1746 is a constant ....(D).

The constant in (A) is 6174.

The constant in (D) is 1746.

Please note the cyclic permutation.

The constant in (C) is 2538.

The constant in (B) is 5382.

Here is also a cyclic permutation.

We can derive the same four constants from any other four digited number.

In some cases, the result ends in 0 (zero).

પ્રા. ડૉ. હરીશભાઈ ડૉક્ટરને શ્રદ્ધાંજલિ

પ્રા. દિલીપ સી. જોષી
અધ્યક્ષ, ગણિતવિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત.
(M) 98984 24515

૬ઠ્ઠી ફેબ્રુઆરી, ૨૦૨૧ના રોજ આપણી વચ્ચેથી અણધારી રીતે વિદાય થયેલા મારા આદરણીય ગુરુ સ્વ.શ્રી ડૉ. હરીશભાઈ ડૉક્ટરને હું ભાવભરી અંજલિ અર્પણ કરું છું.

શિક્ષિકા માતા વ્રજબાળાબેન અને વ્યવસાયે મિકેનિક એવા પિતાશ્રી ધનુભાઈ ડૉક્ટરના પુત્ર હરીશભાઈનો જન્મ ૭ નવેમ્બર ૧૯૫૫ના રોજ બારડોલી મુકામે થયો હતો.

૧૯૭૬માં બારડોલીની પી. જે. સાયન્સ કૉલેજમાંથી ગણિત મુખ્ય વિષય સાથે બી.એસસી. અને ૧૯૮૦માં દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટીમાંથી એમ.એસસી.ની ડિગ્રીઓ મેળવ્યા બાદ ૧૯૮૫માં તેમણે એસ.વી.આર. એન્જિનિયરીંગ કૉલેજ (હાલનું SVNIT)માંથી માનનીય ડૉ. એન. એલ. કલથિયા સાહેબના માર્ગદર્શન હેઠળ પીએચ.ડી.નું કાર્ય પૂર્ણ કર્યું. ૧૯૮૫-૧૯૮૭નાં વર્ષો દરમિયાન સુરતની બરોડા રેયોન હાઈસ્કૂલમાં સેવાઓ આપ્યા બાદ ૩જી ઓક્ટોબર, ૧૯૮૭ના રોજ તેઓ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગમાં વ્યાખ્યાતા તરીકે જોડાયા. આ વિભાગમાં તેમના માર્ગદર્શન હેઠળ ૭ વિદ્યાર્થીઓએ એમ.ફીલ. અને ૧૦ વિદ્યાર્થીઓએ પીએચ.ડી.ની ડિગ્રી મેળવી. ગણિત વિભાગની શિક્ષણ અને સંશોધનને લગતી પ્રવૃત્તિઓ ઉપરાંત અન્ય શૈક્ષણિક પ્રવૃત્તિઓમાં પણ ડૉ. હરીશભાઈ ડૉક્ટર કાર્યરત રહ્યા છે. ગુજરાત ગણિત મંડળના તેઓ આજીવન સભ્ય હતા અને સુરત ખાતે યોજાયેલ ગુજરાત ગણિત મંડળનાં અધિવેશનોના આયોજનમાં અને શૈક્ષણિક કાર્યક્રમોમાં તેઓએ સક્રિય ફાળો આપ્યો હતો.

ડૉ. હરીશભાઈ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ટીચર્સ ઍસોસિયેશનના મંત્રી અને પ્રમુખપદે રહી ચૂક્યા હતા.

તેમના કાર્યકાળ દરમિયાન શિક્ષકોના પ્રશ્નોને કારણે તેઓ યુનિવર્સિટીનાં સત્તામંડળો સાથે સંઘર્ષમાં ઊતરતા અચકાયા ન હતા. મિતભાષી અને સ્પષ્ટવક્તા હરીશભાઈ ડૉક્ટર સાહેબે ઘણા ઉતાર-ચઢાવવાળી તેમની જિંદગીમાં મુશ્કેલ પરિસ્થિતિઓનો મક્કમતાપૂર્વક સામનો કર્યો હતો. તેમનું જીવન અમારા માટે પ્રેરણાદાયી રહ્યું છે. તેમનાં સ્વભાવ અને કાર્યશૈલીમાંથી અમને ઘણું શીખવાનું અને જાણવાનું મળ્યું છે.

ડૉ. હરીશભાઈનાં પત્ની સ્વ.જ્યોતિબેન તેમનાં સહધર્મચારિણી બનવા પહેલાં તેમનાં સહાધ્યાયી હતાં. ત્યારબાદ તેઓએ સ્ટેટ બેંક ઑફ ઇન્ડિયામાં સેવાઓ આપી હતી. સંતાનોમાં હરીશભાઈને એક પુત્ર- હર્ષ અને એક પુત્રી- ઋજુતા છે. પ્રભુ ડૉ.હરીશભાઈના આત્માને ચિર શાંતિ આપે એવી પ્રાર્થના સાથે વિરમું છું.

માણ્યું તેનું સ્મરણ કરવું.... (My Prime encounters with Prof. Arun Vaidya)

કૌશિક ઠાકર
અમદાવાદ
(M) 98258 67429

અરુણ વૈદ્ય એમના નામમાં અજવાળું અને ઉપચાર હતાં.

અરુણભાઈ વૈદ્યસાહેબ મારા પ્રિય શિક્ષક હતા અને છેલ્લા દાયકાથી અંતરંગ મિત્ર વૈદ્યસાહેબ એક ઉત્તમ ગણિતશિક્ષક હોવા ઉપરાંત ભાષાવિદ્, કર્ણપ્રિય વક્તા અને ઉમદા લેખક હતા. પ્રસન્નવદન, નિખાલસતા, રમૂજી સ્વભાવ એમની ઓળખ હતાં. વૈચારિક રીતે તદ્દન સ્પષ્ટ કદાચ દુવિધા નામનો શબ્દ એમના શબ્દકોશમાં નહોતો.

અરુણ વૈદ્યસાહેબે ગુજરાતના ગણિતને એક ઊંચાઈ પર પહોંચાડ્યું છે. હવે એ ઊંચાઈ પર ટકી રહેવું એ આપણા સૌની સામૂહિક જવાબદારી છે.

છેલ્લાં દસ વર્ષમાં અમારા વચ્ચે લગભગ 150 મેઈલનો વિનિમય થયો હશે. હું ગણિતના પ્રશ્નોની ચર્ચા બહુ ઓછી કરતો. અમારા પત્રવ્યવહારમાં અમે વિવિધ વિષયોની ચર્ચા કરી હતી. જેમ કે નાગરસમાજની વિશેષતાઓ અને ખામીઓ, વિનુ માંકડ ટેસ્ટ મેચ, મિર્ઝા ગાલિબ, ઉમાશંકર જોશી, યશવંત શુક્લ, જ્યોં પોલ સાર્ત્ર, શ્રીનિવાસ રામાનુજન, સુનીલ ગાવાસ્કર 10,000 રન, અરુંધતીદર્શનન્યાય, દિલીપકુમાર, અમિતાભની ફિલ્મ શક્તિ, મંજુલ ભાર્ગવ, અન્ના હઝારે વગેરે. ક્યારેક તો અમે પત્રોરૂપી ટેબલ ટેનિસ રમતા-માત્ર બે કલાકની અંદર આઠ મેઈલની આપ લે થતી ! એમના પત્રોમાંથી મને હંમેશ કૈંક નવું શીખવા જાણવા મળતું. કમનસીબે, આ બધા પત્રો હું સાચવી શક્યો નથી.

એક બે યાદગાર પ્રસંગો ટાંકવાની ઈચ્છા છે.

(1) વર્ષ 2010માં ઉદ્વાડા ખાતે ગણિતમંડળનું વાર્ષિક અધિવેશન યોજાયું હતું. એ વર્ષે વૈદ્યસાહેબને 75 વર્ષ પૂરાં થતાં હોઈ અધિવેશનના પ્રથમ દિવસે સાંજે એમનો સન્માન સમારંભ યોજાયો હતો. એક પછી એક વક્તાઓ મંચ પર આવી રહ્યા હતા અને સાહેબ વિષે સુંદર વાતો કરતા હતા. થોડાક સમય બાદ એક અનન્ય ક્ષણે હું અચાનક મંચ પર જઈ ચડ્યો. ત્યાં પહોચીને મેં કહ્યું- એ બધું ખરું, પણ વિદ્યાર્થીઓ માટે સાહેબ આસાનીથી ઉપલબ્ધ (approachable) નહોતા. કેટલાક મિત્રોને મારી આ હરકત ન ગમી, જો કે સાહેબની નિખાલસતાથી હું પરિચિત હતો એટલે મારે મન એ સહજ ઘટના હતી. બીજા દિવસે સવારે ચા-નાસ્તાના સમયે હું અને વૈદ્યસાહેબ બંને ભેગા મળી ગયા. મને થોડો સંકોચ તો હતો. પણ જાણે કશુંજ બન્યું ન હોય એમ સાહજિક રીતે વૈદ્યસાહેબ મારી નજીક આવ્યા અને હસીને મને કહ્યું કે, “તમે અમારા ઘરે આવો. અમે પણ તમારા ઘરે જરૂર આવીશું.” અધિવેશનના એકાદ મહિના

પછી વૈદ્યસાહેબ વંદનાબહેન સાથે મારા ઘરે પધાર્યા હતા. ત્યારબાદ અમારો સંપર્ક સતત વધતો રહ્યો.

(2) વર્ષ 2010ની આસપાસ ગણિતવિભાગમાં M.Sc. અભ્યાસક્રમ સુધારણાનું કામ થઈ રહ્યું હતું. વિભાગ તરફથી મને Functional Analysis અને Number Theoryના અભ્યાસક્રમનું કામ સોંપવામાં આવ્યું હતું. Number Theoryના અભ્યાસક્રમ માટે વૈદ્યસાહેબનું માર્ગદર્શન લેવાનું મને ઉચિત લાગ્યું. મેં વૈદ્યસાહેબને મેઈલ કર્યો. એમણે મદદ કરવાની તૈયારી બતાવી. મુલાકાતની તારીખ અને સમય નક્કી કરવાનું કામ એમને સોંપ્યું. મુલાકાત નક્કી થઈ. સ્થળ : સાહેબનું ઘર સમય બપોરે 3-00 વાગ્યે. એમણે નક્કી કરેલા આ સમય બાબતે મને આશ્ચર્ય થયું. સામાન્ય રીતે બપોરે 1-00 થી 4-00 દરમ્યાન લોકો (ખાસ તો ગુજરાતીઓ) આરામ કરતા હોય છે. અમે બપોરે 3-00 વાગ્યે મળ્યા અને એમના તરફથી મળેલાં જરૂરી સૂચનો સાથે રાખીને મેં અભ્યાસક્રમ બનાવ્યો. આ મુલાકાતમાંથી મને એ શીખવા મળ્યું કે આરામ હરામ હૈ.

સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 305 (માર્ચ-એપ્રિલ 2022) પ્રાધ્યાપક અરુણ વૈદ્યસાહેબ વિશે છે. ગણિતપરિવારના મિત્રોએ પોતાના લેખોરૂપે વૈદ્યસાહેબને યાદ કરી શ્રદ્ધા-સુમન અર્પણ કર્યાં છે. અંક ખરેખર સુંદર થયો છે. તમામ લેખ સરસ છે પણ છતાં કેટલાક લેખ વિશેષ ગમ્યા. વસાવડા સાહેબ દ્વારા ગુજરાતીમાં લિખિત (અખિલમ્ મધુરમ્), અજય દેસાઈ સાહેબ તરફથી (સર્વાંગ સુંદર વ્યક્તિત્વ), કુમારપાળ દેસાઈ તરફથી (અમારી મોંઘેરી જણસ), નિરૂપમ વૈષ્ણવ દ્વારા લિખિત (સિદ્ધાંતનિષ્ઠ વિદ્વાન), નટવર રોઘેલિયા સંપાદિત (કરોગે બાત તો..), ઉદયન પ્રજાપતિ સંપાદિત (Problems proposed and solved by Prof A M Vaidya in AMM during 1963-1970), હિના ગોખલે તરફથી (અમારા મોટાભાઈ અરુણભાઈ) અને રશ્મિ કેશવાણી (વહાલા વૈદ્યસાહેબને ચરણે).

સળંક અંક 305 માં સળંક અંક 163 (વૈદ્ય સાહેબને 60 વર્ષ પૂરાં થાય ત્યારે પ્રગટ થયેલો વિશેષાંક)માંથી ઘણા લેખો લેવામાં આવ્યા છે. પહેલી નજરે મને આ પુનરાવર્તન ન ગમ્યું. પણ વિચાર કરતાં જણાયું કે નવી પેઢી માટે તો તમામ લેખ નવીન છે. આમ નવી પેઢીને કેન્દ્રમાં રાખી જોતાં જૂના લેખોનું પુનરાવર્તન વાજબી (equitable) છે. પ્રત્યેક ફોટોગ્રાફ વૈદ્યસાહેબની યાદ તાજી કરાવે છે.

આ સુંદર અંક માટે સમગ્ર ટીમને અભિનંદન.

હિનાબહેન ગોખલે અને તમામ વૈદ્ય પરિવારને જણાવવાનું કે અરુણ વૈદ્ય માત્ર આપના વૈદ્ય પરિવારનું જ એન્જિન નહોતા, તેઓ સમગ્ર ગુજરાત ગણિત સમાજરૂપી ગાડીનું એન્જિન હતા. હવે આપણે કોને બતાવીએ લીલી ઝંડી ?

અંતે, સાહિર લુધિયાનવીના એક શેર વિશે મેં વૈદ્યસાહેબ સાથે ક્યારેક વાત કરી હતી, એ શેર વૈદ્યસાહેબ માટે ટાંકીને વિરમું છું.

तुम मुझे भूल भी जाओ तो ये हक़ है तुमको
मेरी बात और है मैंने तो मुहब्बत की है ।

અરુણ વૈદ્યસાહેબને શતશત વંદન. સલામ.

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો-સળંગ અંક-304ના ઉકેલો

ડૉ. સચિન ગજ્જર
અમદાવાદ
(M) 99253 62754

(1) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 - 2x + 5 = 0$, then find the value of $\alpha^8 + \beta^8 + \gamma^8$.

Solution : Here α, β, γ are the roots of the equation $x^3 - 2x + 5 = 0$

$\therefore \sum\alpha = 0, \quad \sum\alpha\beta = -2$

Hence $\sum\alpha^2 = (\sum\alpha)^2 - 2\sum\alpha\beta = 0 - 2(-2) = 4$

Again, Since α is a root of the equation

$x^3 - 2x + 5 = 0$, we have $\alpha^3 = 2\alpha - 5$ ....(1)

$\therefore \alpha^4 = \alpha(2\alpha - 5) = 2\alpha^2 - 5\alpha$

and $\alpha^8 = (2\alpha^2 - 5\alpha)^2 = 4\alpha^4 - 20\alpha^3 + 25\alpha^2$

$= 4(2\alpha^2 - 5\alpha) - 20(2\alpha - 5) + 25\alpha^2$

$= 33\alpha^2 - 60\alpha + 100\alpha^0$

Similarly, since β and γ are roots of $x^3 - 2x + 5 = 0$

$\beta^8 = 33\beta^2 - 60\beta + 100\beta^0$ and $\gamma^8 = 33\gamma^2 - 60\gamma + 100\gamma^0$

$\therefore \sum\alpha^8 = 33\sum\alpha^2 - 60\sum\alpha + 100\sum\alpha^0$

$= (33 \times 4) - (60 \times 0) + (100 \times 3) = 432$

Note : we can also solve the question, as follows, first by getting an expression for α^n for $n \geq 3$, using (1) above and then taking necessary values of n.

For $n \geq 3$, $\quad \alpha^n = \alpha^{n-3}\alpha^3$

$= \alpha^{n-3}(2\alpha - 5)$ (using (1))

$\therefore \quad \alpha^n = 2\alpha^{n-2} - 5\alpha^{n-3}$ $(n \geq 3)$ ....(2)

Taking $n = 8$ in (2), $\alpha^8 = 2\alpha^6 - 5\alpha^5$ ....(3)

Again by taking $n = 6, 5, 4$ resp. in (2)

$\alpha^6 = 2\alpha^4 - 5\alpha^3, \alpha^5 = 2\alpha^3 - 5\alpha^2, \alpha^4 = 2\alpha^2 - 5\alpha$

Hence from (3)

$\alpha^8 = 2(2\alpha^4 - 5\alpha^3) - 5(2\alpha^3 - 5\alpha^2)$

$= 4(2\alpha^2 - 5\alpha) - 20(2\alpha - 5) + 25\alpha^2$

$= 33\alpha^2 - 60\alpha + 100\alpha^0$

$\therefore \sum\alpha^8 = 33\sum\alpha^2 - 60\sum\alpha + 100\sum\alpha^0$

$= (33 \times 4) - (60 \times 0) + (100 \times 3)$

$= 432$

(2) Prove that $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\binom{2n}{k}^{-1} = \frac{1}{n+1}$

Solution :

L. H. S. $= \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}(2n-k)!\,k!}{(2n)!}$

$$= \frac{1}{(2n)!(2(n+1))}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(2n+2)(2n-k)!k!$$

$$= \frac{1}{(2n)!2(n+1)}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\left[(2n+1-k)+(k+1)\right](2n-k)!\,k!$$

$$= \frac{1}{(2n)!2(n+1)}\Big[(2n)!(1)!+(2n-1)!\,2!$$
$$-(2n-1)!\,2!-(2n-2)!\,3!$$
$$+(2n-2)!\,3!+(2n-3)!\,4!$$
$$-(2n-3)!\,4!-(2n-4)!\,5!$$
$$+\ldots+2!(2n-1)!+(1)!(2n)!\Big]$$

$$= \frac{2(2n)!}{(2n)!\,2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

(3) Prove that $4\sin\frac{2\pi}{7} - \tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7}$

Solution : Put $\frac{\pi}{7} = \theta$. We want to show that $4\sin 2\theta - \tan\theta = \sqrt{7}$

We have

$4\sin 2\theta - \tan\theta \quad = \tan\theta(8\cos^2\theta - 1)$

$\qquad = \tan\theta(6\cos^2\theta + \cos 2\theta)$

$\qquad > 0$, since $\theta = \frac{\pi}{7}$

$\therefore$ It is enough to show that $(4\sin 2\theta - \tan\theta)^2 = 7$

Now $(4\sin 2\theta\text{-}\tan\theta)^2 = \left(\frac{4\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$ ....(1)

But $4\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta \quad = 2(\sin 3\theta + \sin\theta) - \sin\theta = 2\sin 3\theta + \sin\theta$

$\therefore (4\sin 2\theta \cos\theta - \sin\theta)^2$

$= (2\sin 3\theta + \sin\theta)^2$

$= 4\sin^2 3\theta + 4\sin 3\theta \sin\theta + \sin^2\theta$

$= 4\sin^2 3\theta + 2(\cos 2\theta - \cos 4\theta) + 1 - \cos^2\theta$

$= 4 - 4\cos^2 3\theta + 2(\cos 2\theta - \cos 4\theta) + 1 - 8\cos^2\theta + 7\cos^2\theta$

$= 5 - 4\cos^2 3\theta + 2(\cos 2\theta - \cos 4\theta) - 4(1 + \cos 2\theta) + 7\cos^2\theta$

$= 1 - 4\cos^2 3\theta - 2(\cos 4\theta + \cos 2\theta) + 7\cos^2\theta$

$= 1 - 4\cos^2 3\theta - 2(2\cos 3\theta \cos\theta) + 7\cos^2\theta$

$= 1 - 4\cos 3\theta(\cos 3\theta + \cos\theta) + 7\cos^2\theta$

$= 1 - 4\cos 3\theta(2\cos 2\theta \cos\theta) + 7\cos^2\theta$

$= 1 - 4\cos 3\theta \left(\frac{\cos 2\theta \sin 2\theta}{\sin\theta}\right) + 7\cos^2\theta$

$= 1 + 4\cos 4\theta \left(\frac{\sin 4\theta}{2\sin\theta}\right) + 7\cos^2\theta \left(\because \cos 3\theta = \cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos 4\theta\right)$

$= 1 + \frac{\sin 8\theta}{\sin\theta} + 7\cos^2\theta$

$= 1 + (-1) + 7\cos^2\theta \ (\because \sin 8\theta = \sin(7\theta + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta)$

$= 7\cos^2\theta$

$\therefore \left(\frac{4\sin 2\theta \cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = 7$

$\therefore$ by (1), $(4\sin 2\theta - \tan\theta)^2 = 7$

(4) If the real numbers a, b, x and y satisfy the equations $ax + by = 3, ax^2 + by^2 = 7, ax^3 + by^3 = 16$ and $ax^4 + by^4 = 42$, then find the value of $ax^5 + by^5$.

Solution : Multiplying both the sides of the equation $ax^2 + by^2 = 7$ by $(x + y)$ have,

$(x + y)\,(ax^2 + by^2) = 7(x + y)$

$\therefore ax^3 + by^3 + xy(ax + by) = 7(x + y)$

$\therefore 16 + 3xy = 7(x + y)$ ....(1)

$(\because ax + by = 3, ax^3 + by^3 = 16)$

Multiplying both the sides of the equation $ax^3 + by^3 = 16$ by $(x + y)$, we have

$(x + y)(ax^3 + by^3) = 16(x + y)$

$\therefore ax^4 + by^4 + xy(ax^2 + by^2) = 16(x + y)$

$\therefore 42 + 7xy = 16(x + y)$ ....(2)

$(\because ax^4 + by^4 = 42, ax^2 + by^2 = 7)$

Now equation (2) × 3 – equation (1) × 7

$\therefore 126 + 21xy - 112 - 21xy = 48(x + y) - 49(x + y)$

$\therefore 14 = -(x + y) \therefore x + y = -14$ ....(3)

Now from equation (1) and (3), we have

$16 + 3xy = 7(-14) \therefore 3xy = -98 - 16 = -114$

$\therefore xy = -38$ ....(4)

Now Multiply the equation $ax^4 + by^4 = 42$ by $(x + y)$

$\therefore (x + y)(ax^4 + by^4) = 42(x + y)$

$\therefore ax^5 + by^5 + xy(ax^3 + by^3) = 42(x + y)$

$\therefore ax^5 + by^5 + (-38)(16) = 42(-14)$

$\therefore ax^5 + by^5 - 608 = -588$

$\therefore ax^5 + by^5 = 20$

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો-અંક-306

(5) The sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are defined by $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ and $a_{n+1} = \frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}$,

$b_{n+1} = \dfrac{1 + b_n + a_{nbn}}{a_n}$

Show that $a_{2020} < 5$

શ્રેણીઓ $\{a_n\}$ અને $\{b_n\}$ એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે કે જેથી $a = 1, b = 2$ અને $a_{n+1} = \frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}$ દર્શાવો કે $a_{2020} < 5$.

(6) If $\mathrm{A} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6} + \cdots + \frac{1}{65\cdot66}$ and

$\mathrm{B} = \frac{1}{34\cdot66} + \frac{1}{35\cdot65} + \frac{1}{36\cdot64} + \cdots + \frac{1}{66\cdot34}$

then find the value of $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

જો $\mathrm{A} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots + \frac{1}{65.66}$ અને

$\mathrm{B} = \frac{1}{34.66} + \frac{1}{35.65} + \frac{1}{36.64} + \cdots + \frac{1}{66.34}$ હોય તો $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ નું મૂલ્ય શોધો.

(7) Suppose a_1, a_2, a_3, a_4 are distinct integers and $p(x)$ is a polynomial with integer coefficients satisfying $p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) = p(a_4) = 3$. Prove that there is no integer n such that $p(n) = 2020$.

ધારો કે a_1, a_2, a_3, a_4 એ ભિન્ન પૂર્ણાંકો છે અને $p(x)$ એ પૂર્ણાંક સહગુણકોવાળી એવી બહુપદી છે કે જેથી $p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) = p(a_4) = 3$ થાય. સાબિત કરો કે એવો કોઈ પૂર્ણાંક n ન મળે કે જેથી $p(n) = 2020$ થાય.

(8) If $\alpha = \frac{\pi}{7}$, then prove that $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin2\alpha} + \frac{1}{\sin3\alpha}$

જો $\alpha = \frac{\pi}{7}$ હોય, તો સાબિત કરો $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin2\alpha} + \frac{1}{\sin3\alpha}$

સુગણિતમ્‌ના પ્રા. અરુણ વૈદ્ય વિશેષાંક અંગે પ્રતિભાવો

પ્રાધ્યાપક અરુણભાઈ વૈદ્ય વિશેષાંક (સળંગ અંક 305, માર્ચ-એપ્રિલ-2022) પરત્વેના મારા પ્રતિભાવો ભાવાંજલિ રૂપે અત્રે રજૂ કરું છું.

સમગ્ર અંક ગુજરાતીમાં 47 લેખો, અંગ્રેજીમાં 14 લેખો અને હિન્દીમાં 1 લેખ સહિત કુલ 62 લેખોને સમાવે છે. આ બધા લેખો પ્રા. અરુણભાઈ સાથે એક યા બીજા સ્વરૂપે સંકળાયેલ સંનિષ્ઠ મહાનુભાવો દ્વારા લખાયેલા છે. આથી બધા લેખોની રજૂઆત મનનીય થઈ છે.

વિવેકી અને સરળ ભાષા, પ્રવાહી અને રસિક શૈલી તથા વિષયવસ્તુને પૂરી પ્રસ્તુતતાથી રજૂ કરતા આ લેખો જેમ જેમ વાંચતા જઈએ તેમ તેમ પ્રા. અરુણભાઈના સમગ્ર જીવન અને તેમની કાર્ય-જવાબદારીઓનો હૃદયસ્પર્શી પરિચય મળતો જાય છે. આથી, આ સમગ્ર વિશેષાંક માત્ર ઉપરછલ્લું અવલોકન કરવાને બદલે તેનો અભ્યાસ કરવા પ્રેરે છે.

કોઈ એક સામયિકનો આ માત્ર વિશેષાંક જ નથી. પરંતુ સંનિષ્ઠ પ્રાધ્યાપક અને ગણિતશાસ્ત્રીનાં જીવન અને તેમના પ્રદાન સંબંધી આ દળદાર અને સમૃદ્ધ સંદર્ભગ્રંથ પણ છે.

સામયિક સાઈઝના આશરે 150 જેટલાં બે કોલમયુક્ત પાનાંઓમાં તૈયાર થયેલો અને માહિતીસભર વિશેષાંક પ્રા.અરુણભાઈ સંબંધી આશરે 75 જેટલા આકર્ષક, રંગીન ફોટોગ્રાફ્સ પણ ધરાવે છે. સાથે સાથે તેમના કુટુંબનો ‘આંબો’ પણ રજૂ થયો છે. આથી આ અંક રસિક બન્યો છે.

આ વિશેષાંકના મુખપૃષ્ઠ અને અંતિમપૃષ્ઠ પર દર્શાવાયેલ ફોટોગ્રાફ્સ પ્રા. અરુણભાઈના હસમુખા વ્યક્તિત્વ અને પ્રભાવશાળી વકતા તરીકેની અનુભૂતિ કરાવે છે.

વિશેષાંકમાં રજૂ થયેલ પ્રથમ લેખત જ પ્રા. અરુણભાઈએ ગુજરાત ગણિત મંડળની 56મી વાર્ષિક પરિષદમાં આપેલા વાર્તાલાપ ઉપરથી તૈયાર થયો છે, જે પ્રા. અરુણભાઈના જીવનનો અંતિમ વાર્તાલાપ બની ગયો છે. આ વાર્તાલાપમાં પ્રા. અરુણભાઈએ પોતાના સંપર્કમાં આવેલ ચાર જેટલા ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓનાં પ્રદાનની સરળ ભાષામાં રજૂઆત કરી છે. જીવનના લગભગ અંતિમ વર્ષમાં પણ તેઓ ઊંડાણપૂર્વક કાર્ય કરી શકતા હતા તેની આપણને પ્રતીતિ થાય છે.

પ્રા. વસાવડા સાહેબ, ડૉ. ડી. વી. શાહ સાહેબ દ્વારા રજૂ થયેલ બીજા લેખમાં પ્રા. અરુણભાઈની શૈક્ષણિક ભૂમિકાની તેમજ તેમના પીએચ.ડી. સંબંધિત સંશોધન કાર્યની સદર રજૂઆત થઈ છે.

ત્યારબાદના લેખમાં પ્રા.વસાવડા સાહેબે પ્રા. અરુણભાઈના મધુર અને સર્વગ્રાહી વ્યક્તિત્વનું રસપાન કરાવ્યું છે. જ્યારે ડૉ. ડી. વી. શાહ સાહેબે એક લેખમાં પ્રા. અરુણભાઈ સાથેની સ્મરણયાત્રા દ્વારા પોતાના વિકાસમાં અરુણભાઈની ભૂમિકા અસરકારક રીતે રજૂ કરી છે.

પ્રા. પી. સી. વૈદ્ય સાહેબની એક નોંધથી આપણને જાણ થાય છે કે 1963માં પ્રકાશિત થયેલ સુગણિતમ્‌ના પ્રથમ અંકમાં પ્રા. અરુણભાઈનો પણ એક લેખ સમાવિષ્ટ હતો.

પ્રસ્તુત વિશેષાંકના પ્રત્યેક લેખમાં પ્રા. અરુણભાઈ વિષે કોઈને કોઈ વિશેષતાની રજૂઆત થઈ છે. કારણ કે દરેક લેખ પ્રા. અરુણભાઈના સંપર્કમાં આવેલા છે. તેમણે તેમને અનુભવ્યા છે, તેમની પાસેથી કંઈક મેળવ્યું છે અથવા તો તેમને માણ્યા છે. આના ફળ સ્વરુપે કંઈક પ્રસાદી પ્રત્યેક લેખમાં વાચકને મળી જાય છે.

આ લેખોનો તલસ્પર્શી અભ્યાસ કરવામાં આવે તો પ્રા. અરુણભાઈની જીવનવિકાસયાત્રાનો મહત્ત્વનો પરિચય થઈ જાય છે. કેટલાક લેખોમાં અરુણભાઈ આપણને અભ્યાસુ ગણિતશાસ્ત્રી દેખાય છે. કેટલાકમાં વિદ્યાર્થીપ્રિય શિક્ષક જણાય છે તો કેટલાક લેખો પુરવાર કરે છે કે પ્રા. અરુણભાઈ ઉત્તમ માનવીય ગુણોથી ભરપૂર એવું વ્યક્તિત્વ ધરાવતા હતા. આ ઉપરાંત જૂજ જ જોવા મળે તેવો એક ગુણ તેમનામાં હતો. તેઓ કોઈને પણ અણગમો ન થાય તે રીતે સત્યપાલન કરી શકતા હતા.

આ વિશેષાંકમાં સમાવિષ્ટ પ્રત્યેક લેખના સંદર્ભમાં કંઈક પ્રતિભાવ આપવો અત્રે વ્યવહારુ નથી. પરંતુ પ્રા.અરુણભાઈના વ્યક્તિત્વનું દર્શન થાય તેવા કેટલાક ઉલ્લેખનીય સંદર્ભો નોંધીએ.

- પ્રા.અરુણભાઈ દેસાઈ સાહેબના મતે અરુણભાઈ અસરકારક અધ્યાપક હતા.
- જાણીતા ચિંતક અને પ્રાધ્યાપક કુમારપાળ દેસાઈ સાહેબના અનુભવે પ્રા. અરુણભાઈ તેમના કાકાશ્રી પ્રા. પી. સી. વૈદ્ય જેવું જ કર્મનિષ્ઠ વ્યક્તિત્વ ધરાવતા હતા.
- ભવન્સ કૉલેજના ભૂતપૂર્વ આચાર્ય પ્રો. કે. એન. દેસાઈ સાહેબના મતે પ્રા. અરુણભાઈનાં વ્યાખ્યાનો અને લેખો લોકભોગ્ય હતાં.
- પ્રા. નટવરભાઈ રોધેલિયા સાહેબના લેખમાં તેમણે પ્રા. અરુણભાઈના કલોલ, જામનગર, ભાવનગર, ધોલેરા જેવાં કેટલાંક શહેરો વિષેનાં અવલોકનો તેમજ તેમના પરિવારજનો સાથેનાં સંબંધો દર્શાવ્યા છે.
- ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિએ તેમના લેખમાં નોંધ્યું છે કે પ્રો. એ. એમ. વૈદ્ય ‘True teacher, Marvellous mentor, Real Researcher, Olympian, Approchable editor, A one administrator અને Trustwothy trustee હતા.’ આ ઉપરાંત ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિસાહેબે ડૉ. અરુણભાઈએ સૂચવેલા ઉકેલો સહિતની 48 જેટલા ગાણિતિક કોયડાઓ રજૂ કરીને પ્રા. અરુણભાઈનો ગણિત પ્રત્યેનો ઊંડો લગાવ ઉજાગર કર્યો છે.

- પ્રા. રેખાબેન મહેતા પોતાના લેખમાં દર્શાવે છે કે શિક્ષણ, સંશોધન, ગણિત-સ્પર્ધાઓ, પાઠ્યપુસ્તક લેખન તેમજ અનેકવિધ શૈક્ષણિક ક્ષેત્રોમાં અરુણભાઈનું પ્રદાન બહુમૂલ્ય રહેતું. પ્રા. અરુણભાઈ ગુણવત્તાના આગ્રહી અને સ્પષ્ટવક્તા તો હતા જ ઉપરાંત અન્યોની સારી બાબતોની પ્રશંસા પણ કરી જાણતા.
- પરિવારજનોના લેખોથી જાણી શકાય છે કે અરુણભાઈ પોતાના કુટુંબના સભ્યો સાથે સુદૃઢ અને પ્રેમાળ સંબંધો જાળવવામાં માહેર હતા.

અંતમાં આ વિશેષાંકના અભ્યાસથી બે બાબતો નોંધવાનું મન થાય છે. એક આ લેખોના સંકલિત અભ્યાસથી પ્રા. અરુણભાઈના જન્મથી શરૂ કરી અંત સુધીના સમગ્ર જીવનનો સાતત્યપૂર્ણ ‘સ્કેચ’ મળી જાય તેમ છે. એટલે કે પ્રા. અરુણભાઈનો જીવન ઈતિહાસ તૈયાર કરવામાં આ વિશેષાંક ખૂબ જ મદદરૂપ થઈ શકે તેમ છે. બીજું, અરુણભાઈ ગણિતશાસ્ત્રના એક રસિક વિદ્યાર્થી, ઉત્તમ અધ્યાપક અને સંશોધક, સારા લેખક અને વહીવટકર્તા, અન્યોના વિકાસમાં લગાવપૂર્વક રસ દાખવનાર અને પરિવાર પ્રિય વ્યક્તિ હતા. ખરેખર તો તેમણે માનવીય ગુણોથી છલકાતું અને કોઈને પણ ઈર્ષા થાય તેવું ‘મીઠું મીઠું’ અને ‘યાદગાર’ જીવન માણ્યુ હતું.

ડૉ. પારસ ડી. ઉચાટ
ગાંધીનગર
(M) 9824434459

* * * * *

I would like to extend my heartfelt appreciation to Suganitam Trust and everyone associated with, and especially all who contributed to, this special issue dedicated to Prof. Dr. Arun Madhusudan Vaidya, my father.

Diversity of contribution is the omnipresent element I immediately noticed in this wonderful compilation of articles. Authors from all age groups and folks from around the globe have sent in their writings; usage of beautiful words in Gujarati, English and Hindi and best of all, professors from different faculties as well as students, have shared their thoughts. The one common denominator is the man about whom everyone found time to write. Having been fortunate enough to grow up under his guidance, my siblings and I can genuinely appreciate and empathise with every word written in this book.

My father's attitude to always seek the truth at its purest and without compromise, comes through very well in many of the articles here. He was a Gandhian in the truest sense of the word, believing that if one lived by ethics and principles and strictly adhered to them, then one need to have no fear of any force in the world. The comment that if he were not a professor of Mathematics, he would have been a professor of English is also so true. His reading was wide and eclectic and included literature from the most well-known authors to lesser-known gems. He read the Times of India every morning without fail, and would read it aloud with impeccable diction. If my English pronunciation and understanding of the language is any good today, all credit goes to him, and I am sure there are many others who would attest to this too.

I would like to add one more memory here, all the more precious to me because it involves our shared passion - cricket. England was playing India at the Wankhede Stadium in Mumbai, this was February of 1976, when there was no live national TV coverage. I was 10 years old and upon my childish insistence, Daddy took me to Mumbai to watch this Test Match at the stadium. He had to travel to Mumbai anyway for some work at TIFR, so he left home early to watch the pre-Lunch session and I was to meet him at a pre-agreed landmark outside the stadium during Lunch and take the ticket to watch the rest of the day while he proceeded to attend to his work. I reached there and met him but the way back into the stadium was rather crowded for a 10-year-old boy alone! He told me in most emphatic words and it made a tremendous impact on me. He said, "Hold this ticket tight in your hands no matter what and go through the crowd towards that gate, climb up two storeys and then a Marshall will guide you to your seat. Do not let go of this ticket from your hands." Those words have stayed with me. "Do not let go of this ticket from your hands." – Since then, I have not let go of any ticket once I have them in my hands,

Once again, my deep appreciation to Suganitam Trust for this wonderful publication, certainly a collector's item and one that my family and his legion of admirers will treasure.

Tapan Vaidya
Dubai
(M) +97336 785000

* * * * *

સુગણિતમ-પ્રાધ્યાપક અરુણ વૈધ વિશેષાંક : "અદ્‌ભુત સવિશેષાંક"

સુગણિતમ્ - વર્ષ:60 અંક:1 સળંગ અંક:305 માર્ચ-એપ્રિલ 2022 - એક "સવિશેષાંક" છે એવું કહીશ તો કદાચ અતિશયોક્તિ તો ન જ કહેવાય. કારણ, આ વિશેષાંક એવા લેખથી શરૂ થાય છે, જે આ મહાન વ્યક્તિવિશેષ દ્વારા સુગણિતમ્ માટે લખાયેલ અંતિમ લેખ છે, જેમાં આ મહાન ગણિતજ્ઞ દ્વારા અન્ય ગણિતજ્ઞોની ઝાંખી કરાવવામાં આવી છે.

પ્રા. અરુણ વૈદ્ય સાહેબ - ગુજરાતનાં ગણિત પ્રેમીઓને પરિચય આપવો પડે એવું વ્યક્તિત્વ નથી જ. હાલમાં જ મને જ્યારે નેહરુ સાયન્સ સેન્ટર, મુંબઈના પ્રખ્યાત વૈજ્ઞાનિક શ્રી. ડૉ. જે. જે. રાવલ સાહેબને રૂબરૂમાં મળવાનું અહોભાગ્ય મળ્યું, ત્યારે એમની સાથે થયેલી વાતચીત દરમિયાન ગુજરાતના મહાન ગણિતજ્ઞ તરીકે પ્રા. શ્રી અરુણ વૈદ્ય સાહેબનું નામ એમણે સૌપ્રથમ યાદ કર્યું અને પાઠયપુસ્તકની રચના બાબતે ચાલતી ચર્ચામાં આવા મહાન ગણિતજ્ઞનો પરિચય પાઠયપુસ્તકમાં સમાવિષ્ટ કરવો જોઈએ એવી ટકોર કરી. આવા મહાન ગણિતજ્ઞ વૈદ્ય સાહેબની સાથે રૂબરૂ પરિચય તો ન થઈ શક્યો પરંતુ ગુજરાત ગણિત મંડળનાં છેલ્લાં કેટલાંક અધિવેશનમાં એમને સાંભળવાની તક મળી.

આ વિશેષાંક પ્રા. અરુણ વૈદ્ય સાહેબનો નજીકથી પરિચય મેળવવાની તક અમને આપે છે. વિશેષાંકમાં પ્રસ્તુત થયેલા તમામ લેખો વૈદ્ય સાહેબના અદ્વિતીય ગણિત જ્ઞાન અને એમના સહજ સરળ સ્વભાવની

પ્રતીતિ કરાવે છે. પ્રત્યેક લેખક દ્વારા રજૂ થયેલા વૈદ્ય સાહેબ સાથેના એમના સ્વ-અનુભવો અલગ અલગ છતાં ગણિત અને પોતીકી લાગણીના એક તાંતણે જોડાયેલા છે.

પ્રા. અરુણ વૈદ્ય સાહેબ, કોઈકના માટે "સર્વાંગસુંદર અનુકરણીય વ્યક્તિત્વ" તો કોઈકના માટે "દાદા ગુરુ" છે. તો વળી કોઈકના માટે "સિધ્ધાંતનિષ્ઠ વિદ્વજ્જન", તો કોઈકના ભ્રાતાશ્રી - મોટાભાઈ. વૈદ્ય સાહેબે ઘણાને ગણિત સાથે પ્રેમ કરતાં શીખવ્યું તો વળી કોઈકના માટે "પત્ર-ગુરુ" બન્યા.

રોલ મોડેલ, અનોખા વ્યક્તિ, મૂઠી ઊંચેરા માનવી, સ્નેહીશ્રી, પ્રેરણાસ્રોત, ... કંઈ કેટલાંય ઉપનામો સાથે વૈદ્ય સાહેબનું અનેરું વ્યક્તિત્વ આ વિશેષાંકમાં આદરણીય લેખકો દ્વારા પ્રસ્તુત થયું છે અને છેલ્લો લેખ "અમારા ડેડી" - એક પિતા તરીકે એમનાં સંતાનોની નજરે વૈદ્ય સાહેબને જાણવાની પણ તક મળી. અંતમાં એમની વિવિધ છબીઓ એમના જીવનનાં સંભારણાં આપણા માનસપટ પર કોતરતી જાય છે.

સુગણિતમ્‌નો "પ્રા. અરુણ વૈદ્ય વિશેષાંક" એટલે ગુજરાતના મહાન ગણિતજ્ઞ વૈદ્યસાહેબનાં જીવન અને વ્યક્તિત્વને જાણવાનો અને માણવાનો અમૂલ્ય અનુભવ!

ઉન્નતિ દેસાઈ
વલસાડ
(M) 93756 22977

* * * * *

The special issue of Suganitam about Prof. Arun Vaidya is really excellent. I consider it on two counts. One tribute to the man who served the Mathematics fraternity from the primary students and school teachers to the research scholars and university professors. Second, the great inspiration that the articles serve to provide to the readers. All the articles are classic in the sense that I love to see Vaidya Sir's journey at a glance. The thought of having Prof. A. M. Vaidya foundation is really good. The beneficiaries of the activities under this foundation will be the students and teachers at large. Prof. Vaidya worked on Number Theory and he proved some remarkable results regarding density of square-free numbers (I guess without taking help of computers). His illustrious academic career is delineated in the article "Tribute to Prof. Arun Madhusudan Vaidya by Prof. M. H. Vasavada and Dr. D. V. Shah". By reading this and some other articles we feel that Prof. Vaidya is having an indomitable spirit. Prof. Vaidya can be considered as a primogenitor in the Number Theory in Gujarat just like Prof. P. C. Vadya Sir in the field of relativity. His contribution in promoting and propagating Mathematics at grassroot level through Suganitam is unparalleled. He will be remembered for a longe period of time. The meaningful tribute to Prof. Vaidya is to carry forward his mission.

Dr. Vipul Shah
Vallabh Vidyanagar
(M) 99096 12778

* * * * *

તા.06-05-2022ના રોજ અમારા વિભાગની ઑફિસમાં મારી ટપાલમાં સુગણિતમ્‌નો દળદાર અંક જોયો. પહેલાં તો આશ્ચર્ય થયું કે, સુગણિતમ્ તો હવે ઓનલાઈન સોફ્ટકોપીમાં મળવાનું છે, તો આ અંક કેવી રીતે ? પછી યાદ આવ્યું કે આ મુ. અરુણભાઈ વૈદ્ય વિશેષાંક છે.

મુખપૃષ્ઠ પર તેમનો ફોટો જેમાં તેમનું સ્મિત સરસ રીતે ચિત્રિત થયું છે અને બેક કવર પર વ્યાખ્યાન આપતી વેળાનો લાક્ષણિક છટાદાર ફોટો આ વિશેષાંકને દર્શનીય બનાવે છે.

આશરે 150 પાનાંના આ વિશેષાંકમાં વિશેષતઃ ગુજરાત અને દુનિયાભરમાંથી તાજા લેખો અને સુગણિતમ્‌ના અગાઉના અંકોમાંથી ચૂંટેલા લેખોનું સુંદર સંકલન થયું છે. પાછળના પેજમાં અરુણભાઈના વ્યક્તિત્વનો સુંદર ચિતાર આપતા ફોટોગ્રાફ્સ આ વિશેષાંકને ચાર ચાંદ લગાવે છે.

આ વિશેષાંકમાં સંકલિત થયેલા લેખો વારંવાર વાચવા લાયક છે. સંપાદકમંડળને આવો સરસ વિશેષાંક તૈયાર કરવા માટે અભિનંદન.

પ્રા. એ. એચ. હાસમાની
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 98792 60235

* * * * *

અ.મ.વૈ. શ્રદ્ધાંજલિ વિશેષાંક

ગણિતના લાડીલા મુ. અરુણભાઈની યાદોને વાગોળતો નાનકડો અંક 6 મે 2022ના રોજ ઈમેઈલમાં મળ્યો. જોગાનુજોગ સાંજે જ મેઈલ ખોલી અને થયું કે નજર નાખી લઉં. બસ, અંકની દાદાગીરીનો શિકાર બની ગયો. નજર નાખવામાં પાનાં ફરતાં ગયાં અને એકાદ કલાક સુધી અંકની બહાર ન નીકળી શક્યો. જો કે, કલાકમાં અંક પૂરો તો ન વાંચી શકાય; આમેય આ વિધિ પતાવવા વાંચવાનું કામ તો હતું નહીં! રસાસ્વાદમાં થોડો સમય લાગે જ. ભેંસની જેમ પ્રથમ વાંચી(નાખી)ને પછી વાગોળવાનો અર્થ નહોતો. પરિણામે ધીમી ઝડપે વાંચવાની મજા લીધી.

અંકનો દરેક લેખ આંખ સામે એક ફિલ્લમ (ફિલ્મ)ની પટ્ટીની જેમ એક ચલચિત્ર ઊભું કરતો હતો. દરેક વ્યક્તિએ અરુણભાઈ સાથે પોતાના એકાદ બે અનુભવ યાદ કરીને અરુણભાઈનું એક જીવંત ચિત્ર ઉપસાવ્યું છે. અંકમાંથી કોઈ એકાદ લેખ ટાંકી બાકીના એટલા જ ઉત્કૃષ્ટ લેખને અન્યાય કરવા નથી માંગતો, પણ દરેક લેખમાં એક વાત ઊભરીને આવતી દેખાય છે કે, શ્રી અરુણભાઈની કોઈ ને કોઈ અનુકંપા તેમના સંસર્ગમાં આવેલ દરેકને, નાત, જાત, ધર્મ, વય અને સ્થાન ભેદ સિવાય, પ્રાપ્ત થઈ છે. દરેક તેમના પ્રેમથી વિવિધ પ્રકારે લાભાન્વિત થયા છે.

તેઓની નિષ્ઠા એટલી ઊંચી કે પોતાના ફાયદાના ભોગે પણ વિભાગ, વિશ્વવિદ્યાલય, ગામ, દેશ અને સમાજનું હિત તેમણે સાધ્યું છે. પણ, આ અંકમાં એક વાત ખૂટતી દેખાય છે. કદાચ સામાન્ય રીતે તાર્કિક લાગતી વાત અનુસરીને એવું લખવાનું સૌએ ટાળ્યું હોય તેમ બને. અલબત્ત મારે એવા કિસ્સા ટાંકવા નથી, પરંતુ મારી વાત ધ્યાનથી વાંચશો તો સમજાશે કે તેમનું એક અગત્યનું પાસું અંકના કોઈ લેખમાં ન દેખાયું.

પહેલાં એક તર્કની વાત કરી લઉં. એક પ્રશ્ન હું ઘણીવાર વિદ્યાર્થીઓને પૂછતો. એ જ પ્રશ્ન અહીં મૂકવો છે. "શું તમે તમારા જીવનસાથીને પહેલાં મારતા/તાં હતા/તાં તેટલું જ હજી મારો છો? જવાબ હા કે ના આપો."

પ્રશ્ન પેચીદો લાગે છે. સામાન્ય રીતે આપણા અંતર્મનની વિડંબણામાં અટવાઈને આપણે એ જ વિચારીએ કે આ તો ફસામણો પ્રશ્ન છે. આવા પ્રશ્નનો જવાબ ન અપાય. ખેર! હું આનો જવાબ આપું, "હા". આનું કારણ તમે શોધજો. (આશા છે તંત્રીગણ આનો જવાબ આ અંકમાં નહીં આપે. સુગણિતમ્‌ના વાચકને વિચારવાની આદત છે જ.)

બસ આ જ તર્કને અનુસરીને મારે અરુણભાઈનું એક પાસું રજૂ કરવું છે કારણકે તે ગૌરવપ્રદ પાસું છે. શું વોશિંગ્ટન, લિંકન, મંડેલા, ગાંધીના જીવનમાં કોઈ મજબૂરીમાં પરિસ્થિતિ વશ કોઈ નિર્ણય લેવાની શક્તિને ચુનૌતી મળી હશે? અલબત્ત, આનો જવાબ હા જ હોય; જિંદગી કોઈને છોડતી નથી. આવી મજબૂરીમાં તેઓનું વર્તન કેવું રહ્યું હશે? આવી ક્ષણો અરુણભાઈના જીવનમાં નહીં આવી હોય તેવું નથી. આપણી સિસ્ટિમ (વ્યવસ્થા) સિનિયર વૈદ્યસાહેબને પણ ચુનૌતી આપી ચૂકી છે તે તેમના કુલપતિ તરીકેની કારકિર્દી દરમિયાન જોવા મળે છે અને એ વાત જાણીતી છે.

અલબત્ત, અરુણભાઈ સાથે તેમના જીવનમાં આવેલી આવી ક્ષણો બાબતે પણ અરુણભાઈ નિખાલસતાથી વાત કરતા અને પરિસ્થિતિનું વર્ણન પણ કરતા. તેઓ આવી બાબતોમાં પણ શત પ્રતિશત સત્ય બોલતાં જરા પણ અચકાતા નહોતા. તેમનું આ પાસું જ્યારે મારી સાથેની તેઓની વાતમાં પણ જોયું ત્યારે તેમની નિર્ભીકતા, પ્રામાણિકતા અને નિખાલસતા માટે માન વધી ગયું.

અંતમાં એક પ્રસ્તાવ મૂકું- તેમણે વિવિધ જગ્યાએ આપેલાં વ્યાખ્યાનને શ્રેણી રુપે સુગણિતમમાં પ્રકાશિત કરવામાં આવે તો ગમશે.

ડૉ. દિનેશ જે. કારીઆ
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 92271 60572

* * * * *

'સુગણિતમ્‌નો પ્રા. અરુણ વૈદ્ય સ્મૃતિ વિશેષાંક અનેક રીતે એક અનેરું યાદગાર પ્રકાશન બની રહેશે. શરૂઆતના એક લેખમાં તેમના નામના પ્રથમાક્ષરોને લઈને જેમને 'અખિલમ્ મધુરમ્' તરીકે બિદરાવવામાં આવેલ છે એ પ્રા. અરુણભાઈના બહુઆયામી વ્યક્તિત્વનો એક સમગ્ર ચિતાર જુદા જુદા લેખકોએ આપેલા ભાવાંજલિમાં જોવા મળે છે. કોઈ વાદ્યવૃંદમાં એકબીજાથી અપરિચિત કલાકારો એક જ મંચ પર આવીને પોતપોતાનાં વિવિધ વાદ્યો પર આપમેળે જ સંગીતના સૂરો છેડે અને એ સમગ્ર સૂરાવલિ એક સુમધુર સંગીતમાં પરિણમે એવો કંઈક ભાવ વિશેષાંકના લેખો વાંચતાં પ્રગટ થાય છે... અને એનું કારણ અરુણભાઈ સ્વયં ...! પ્રો. અરુણભાઈ એક ગણિતજ્ઞ, એક લેખક, શિક્ષક, પ્રેરક તેમજ ઘડવૈયા વિદ્વાન પણ સરળ રમૂજી વ્યક્તિત્વ, એક રોલ મૉડેલ, એક સંગીતપ્રેમી, એક પ્રેમાળ કુટુંબીજન... એવાં વિવિધ પાસાંઓને ઉજાગર કરતા અંકમાં પ્રો. પ્ર.ચુ.વૈદ્ય સાહેબે તેઓને માટે તેમજ સુગણિતમ્ માટે શુભેચ્છાઓ પાઠવેલ એ પણ સામેલ કરાયેલ છે. તો, 'જે મારતું તે પોષતું...' એવાં પ્રતિપ્રમેય સમાં શીર્ષકો સાથેના પ્રો. અરુણભાઈના લેખો વિષે પણ અહીં જાણવા મળે છે. 'એક વિશેષ પ્રકારનાં કાલજયી (સમય પર વિજય મેળવનાર!) યાનમાં' સૌને બેસાડીને કરાવવામાં આવેલ અરુણભાઈનો અનોખો પરિચય વાંચતાં પણ મન પ્રસન્ન થઈ જાય. તેઓના ગણિતશાસ્ત્રમાં સંશોધન પ્રદાનનો ખ્યાલ પણ કેટલાક અંગ્રેજી/ગુજરાતી લેખોમાં આપવામાં આવ્યો છે.

અહીં જેનો ઘણી જગ્યાએ ઉલ્લેખ થયેલ છે એ 'સુગણિતમ્'નો સળંગ અંક 163, ગુજરાત ગણિતમંડળની વૅબસાઈટ પર મૂકવામાં આવે તેમ કરવા વિનંતી. વળી, આ વિશેષાંકમાં તેમજ આ સામયિકમાં કોઈ કોઈ લેખોનું અનુસંધાન અન્યત્ર આપવામાં આવે છે, જે પાનાંની ગોઠવણને કારણે કરવું પડતું હશે એ જો નિવારી શકાય તો સરસ એકસૂત્રતા જળવાઈ રહે.

અંકનો પહેલો લેખ ખુદ અરુણભાઈનો જ છે તેઓનો કદાચ છેલ્લો ગણાય એવા તે લેખના અંતે તેઓ સંદેશો મૂકતા જાય છે. 'We can only hope and strive to create an education and examination system that would not stifle creativity but encourage and reward it.' જાણે કે કહેતા જાય છે, 'હમ લાયે હૈં તૂફાન સે કશ્તી નિકાલ કે...'

પ્રા. અરુણભાઈ વૈદ્યના જીવનની જેને અધૂરી રહી ગયેલ કાર્યસૂચિ (Unfinished Agenda) કહીએ એ ગણિતશાસ્ત્રનાં શિક્ષણ, સંવર્ધનનું કામ વધુ આગળ ધપાવતા રહીએ એ કાર્ય હવે વધુ જરૂરી બને છે કેમકે અત્યારે તો શાળા કક્ષાએ 'હળવું' ગણિત અને 'ભારે' ગણિત એવા અવનવા ખ્યાલો સામે આવી રહ્યા છે...! વળી, 'સુગણિતમ્'માં વિજ્ઞાનમાં ગણિતની ઉપયોગિતા દર્શાવતા લેખો આવે એ ઉપયોગી અને અર્થપૂર્ણ બની રહેશે.

ફરી એક વાર પ્રો. અરુણભાઈને સાદર ભાવાંજલિ અને આ વિશેષાંક બદલ તંત્રીમંડળને અભિનંદન!

કમલનયન જોષીપુરા,
નિવૃત્ત પ્રોફેસર, આણંદ
(M) 98253 18897

* * * * *

સુગણિતમ્‌નો વિશેષાંક

ડોરબેલ વાગી, બારીમાંથી જોયું તો ટપાલ લઈને બહેન ઊભાં હતાં. દરવાજો ખોલ્યો અને એમણે હાથમાં 'સુગણિતમ્'નો પ્રા. અરુણ વૈદ્ય વિશેષાંક મૂક્યો. ચિરપરિચિત મુખપૃષ્ઠ જોતાં જ જાણે ઘણા લાંબા સમયથી વિખૂટો પડેલો મિત્ર અચાનક સામે આવીને ઊભો હોય અને તેને જોતાં જે ઉમળકો થાય એવો આનંદ થયો. જો કે એના ચારેક દિવસ પહેલાં e-copy તો જોઈ હતી પરંતુ...

કોરોનાકાળમાં ઘણું બધું ખોરવાયું અને તેમાં 'સુગણિતમ્' પણ બાકાત નહોતું, આથી એક વર્ષથી વધુ સમય પસાર થઈ ગયો. પરંતુ છેવટે વિશેષાંક તૈયાર થઈ શક્યો એનો આનંદ છે.

મુખપૃષ્ઠ પરનો સ્વ. અરુણભાઈનો સરસ ફોટોગ્રાફ અને છેલ્લાં પાનાંઓમાંના તેમના અન્ય ફોટોગ્રાફ્સ પણ એમને શ્રદ્ધાંજલિ આપે એવા છે. લગભગ અરધા ભાગના લેખો આ વિશેષાંક માટે જ લખાયા હોય તેવા છે અને બાકીનામાંના લગભગ બધા જ 163માં અંકમાંથી પુનર્મુદ્રિત કરેલા છે. નવા લખાયેલા લેખોની સંખ્યા કદાચ થોડી ઓછી લાગે પરંતુ તે પણ વિપરિત સમયગાળાને કારણે જ હશે. જૂના અંકોમાંના લેખોનો સમાવેશ ઉચિત રીતે જ કર્યો છે. કારણ કે એ લેખોમાંથી પણ સ્વર્ગસ્થનાં જીવન અને કાર્યનાં કેટલાંક ઓછાં જાણીતાં પાસાંઓ ઉજાગર થાય છે. સ્વ. અરુણભાઈ વૈદ્ય સાહેબે American Mathematical Monthlyમાં સૂચવેલા અને ઉકેલેલા પ્રશ્નોનું પ્રા. ઉદયનભાઈએ કરેલ સંકલનને આમાં સમાવીને આ સ્મૃતિઅંકનું મૂલ્ય વધાર્યું છે. જેમને સ્વ. અરુણભાઈનો પ્રત્યક્ષ પરિચય નથી અથવા ઓછો છે તેમને માટે આ સુંદર ભાથું છે અને મારા સહિત અન્ય ઘણા જેઓને એમનો પ્રત્યક્ષ પરિચય છે તેમને માટે આ અંક સંસ્મરણો વાગોળવાનું કારણ બન્યો છે. અસ્તુ.

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ

વલસાડ

(M) 99258 37247

* * * * *

NEWS CORNER

1. The 87th Annual Conference of the Indian Mathematical Society was held virtually under the auspices of Jawaharlal Nehru Engineering College, Mahatma Gandhi Mission University, Aurangabad during December 4 - 7, 2021.
2. There is one prize and one award given during the conference, associated with the names of mathematicians from Gujarat.

   V.M.Shah Prize is given for the best research paper, presented in the IMS Annual Conference, in the areas of Real Analysis, Complex Analysis, Fourier Analysis, Harmonic Analysis, Approximation Theory and related areas.

   Subhash Bhatt Award is given for the best paper published during the year in the areas of Functional Analysis, Harmonic Analysis, Operator Theory and related areas. The award consists of Rs. 25,000/- and a citation.
3. 2021 V. M. Shah Prize: The prize was awarded to H. J. Khachar of M.S. University, Vadodara.

   Subhash Bhatt Award for the year 2021: This award was given to Arpita Lal and Kallol Paul, Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata, jointly for their paper entitled "Characterization of k-smooth operators between Banach spaces", published in <u>Linear Algebra and its Applications,</u> 586 (2020).

   While we were sending this report to the press, we received the shocking news of the sad demise of Prof. Satya Deo, the General Secretary of IMS, yesterday due to cardiac arrest. In passing away of Prof. Satya Deo, the mathematical community of India has lost a great teacher, a sincere worker and a thorough gentleman We pray for peace to the departed soul.

   Incidentally, an appeal signed by Prof. Satya Deo for donation to IMS, has been included in this issue of Suganitam.

* * * * *

REQUEST

The IMS has planned to construct its building at Pune. An appeal from IMS for the donation for the fund for the building is included below (the plan of the building is not included). Gujarat has strong ties with IMS. Prof. P. C. Vaidya was a President of the Society, Prof. V.M.Shah served as a General Secretary for several years and both, Prof.A.M.Vaidya and Prof. J.R.Patadia served as Editors of Mathematics Student for a long time. Prof. A.M.Vaidya also served as a Treasurer of the Society. We shall naturally extend our cooperation for the good cause to the Indian Mathematical Society, but our ties with the Society is an added reason for our generous contribution. So please contribute generously.

……… Editors

Appeal for Support to The Indian Mathematical Society Building Complex - Ganit Bhawan, Pune

The Indian Mathematical Society (IMS) is the oldest Scientific Society of our country which was founded in the year 1907. It has been serving the cause of promoting mathematical research and teaching in the universities, colleges, research Institutes like IITs, IIERs etc. in the entire country. The Society had been instrumental in publishing the earliest work of the legendary mathematician Srinivasa Ramanujan which was instrumental in getting the attention of the world to his work in the beginning of his career. A large number of eminent Indian Mathematicians have been associated with the IMS and have also served the Society in the capacity of its President and/or other office bearers in the past. IMS continues to get the support mathematicians across the country. All its Council members work voluntary and do not receive any honorarium.

For a long time the IMS was planning for its own campus. I am glad to share that The Indian Mathematical Society has now purchased a plot of land near Pune Airport in Pune for having its permanent Headquarters. The land is about 44,000 sq ft in area with a cost of about Rs. 2.1 crore including registration and boundary fencing etc.

The Council of the IMS is now planning to develop a building complex (Ganit Bhawan) having all facilities like an office, an auditorium, a library, a computer center, meeting halls, and a guest house for small conferences, and so on. The main building on the campus is planned to be a ’four storey structure’ accommodating all of these requirements. A copy of the Master Plan designed by an eminent architect of Pune ’Design India’ is attached herewith for your kind perusal. The estimated cost of the project is about Rs. 13 crores.

It may be noted that the IMS is a non-profit organization and not supported by any Government organization, and depends on the membership fees and a small amount of money coming from the subscription of its two periodicals. It is supported by the NBHM, DST and other agencies only for organizing its annual conferences. Therefore, the funds needed for developing this complex will depend mostly on the donations from well wishers and life members.

On behalf of the Council of the IMS, I am, therefore, making this appeal to all of you to generously support the IMS in building its complex by giving donations of any amount that you can conveniently give. It may be mentioned that donations received after Oct. 1, 2021 are eligible for exemption under Section 80 G of the Income Tax Act of the Govt of India. All donations will be acknowledged on the website of the IMS.

The donations can be made by bank transfer with the following details:

1. Name of the Account Holder : Indian Mathematical Society.
2. Account No. : 0981000100312287
3. Name of the Bank : Punjab National Bank.
4. Branch Name and Address : Adalat Road Branch, Aurangabad - 431001
5. IFSC Code: PUNB 0375900

Alternately donations can also be sent either in the form of Cheque/Draft (in the name of Indian Mathematical Society, payable at Aurangabad, Maharashtra) to: Prof. S. K. Nimbhorkar, Treasurer, IMS c/o Dr. Mrs. Prachi Kulkarni, Ankur Hospital, Tilaknagar, Aurangabad 431001

I am sure your generous help will strengthen the Society to serve the cause of mathematics more efficiently.

Satya Deo,
General Secretary, IMS

* * * * *

લેખક મિત્રોને

સુગણિતમ્ માટે આપનો લેખ મોકલવા માટે આમંત્રણ છે. આપનો લેખ સારા કાગળ પર બંને બાજુ હાંસિયો રાખીને અને બે લીટી વચ્ચે થોડી જગ્યા રાખીને સ્વચ્છ અને સુવાચ્ય અક્ષરોમાં લખીને અથવા ટાઈપ કરીને મોકલવા વિનંતી. આપનો લેખ કુરિયરથી અથવા ઈ-મેઈલ દ્વારા મોકલી શકશો. લેખ મોકલવા માટેનું સરનામું નીચે મુજબ છે.

કુરિયર માટે : ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ, ગણિત વિભાગ,
વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત - 395007.
(M) 9898057891

ઈ-મેઈલ : suganitam2018@gmail.com

ગણિત વિષયક લેખમાં ભાષાનું એવું મહત્ત્વ નથી એ વાત ખરી, પરંતુ ભાષાશુદ્ધિ જળવાય એ ઈચ્છનીય તો છે જ. જોડણી માટે જોડણી કોશની મદદ લઈ શકાય. સ્વ. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય સાહેબ કહેતા કે લેખકે જોડણીકોશ પોતાની બાજુમાં જ રાખવો જોઈએ. અલબત્ત, ગણિતની દૃષ્ટિએ સારો લેખ ભાષાને કારણે અસ્વીકાર્ય નહિ થાય.

સુગણિતમ્‌ના કેટલાક સિદ્ધહસ્ત લેખકોએ આપણી વચ્ચેથી વિદાય લીધી છે. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય સાહેબ, એ. આર. રાવ સાહેબ, ફાધર વાલેસ, અરુણભાઈ વૈદ્ય, એ. કે. વીરાણી, બચુભાઈ રાવળ અને અન્ય મિત્રો. એક વાત યાદ આવે છે. MASLOW નામના ભૌતિકશાસ્ત્રના એક પ્રેરણાદાયી અને પ્રભાવશાળી અધ્યાપક હતા. એક વાર તેમણે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓને પૂછ્યું : તમારામાંથી કોણ આવતી કાલનો નામાંકિત ગણિતશાસ્ત્રી, વૈજ્ઞાનિક, લેખક, સમાજસુધારક, સર્જક કે રાજકારણી બનશે ? વિદ્યાર્થીઓ એકબીજા સામે જોઈને ચૂપ રહ્યા. એકાદ મિનિટ શાંતિ છવાઈ ગઈ. MASLOWનો બીજો સવાલ : If not you, who then ? આપણો પ્રશ્ન પણ એવો જ છે. સુગણિતમ્‌માં હવે પછી લેખો કોણ લખશે ? જો તમે નહિ તો બીજું કોણ ?

આ અંકમાં અગાઉની શ્રેણીઓ 'સો અંક પહેલાં' અને 'મુખપૃષ્ઠ પરનો ગણિતજ્ઞ' ચાલુ રાખવામાં આવી છે. ઉપરાંત બીજી ત્રણ શ્રેણીઓ 'જાણીતાનું અજાણ્યું', 'પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આગમન' અને 'પ્રશ્ન ચર્ચા- ભૂમિતિ' શરૂ કરવામાં આવી છે. પહેલી શ્રેણીનો હેતુ ગણિતનાં કેટલાક જાણીતાં પરિણામોને લગતાં પણ ખાસ જાણીતાં ન હોય તેવાં સરળ અને રસપ્રદ પરિણામોની ચર્ચા કરવાનો છે. પ્રાચીન ભારતના ગણિતની જાણકારી મેળવવામાં એક મુશ્કેલી એ છે કે તેનું સાહિત્ય ઘણું ખરું સંસ્કૃતમાં છે. બીજી શ્રેણીમાં આ ગણિતજ્ઞાન

સરળ ગુજરાતીમાં પીરસવાનું આયોજન છે. ત્રીજી શ્રેણીમાં ભૂમિતિના પ્રશ્નમાં આપેલી વિગતોનું પૃથક્કરણ કરી ઉકેલ તરફ દોરી જતી તાર્કિક પ્રક્રિયાની ઉદાહરણો દ્વારા ચર્ચા કરવાનો હેતુ છે. આપ આમાંની કોઈ પણ શ્રેણીના પ્રસિદ્ધ થયેલા લેખમાં ઉમેરો કરીને અથવા તો જે તે શ્રેણીને બંધ બેસતો સ્વતંત્ર લેખ લખીને આપનું પ્રદાન કરી શકો છો. આ દરેક શ્રેણી 'ખુલ્લી' શ્રેણી છે અને તેમાં કોઈ પણ લખી શકે છે. ખરેખર તો એક શ્રેણીમાં જો એકથી વધુ વ્યક્તિઓ લખશે તો તેના લેખોમાં વૈવિધ્ય આવશે. આ જ રીતે સુગણિતમ્‌ના પાછલા અંકોમાંથી ચૂંટેલાં રસપ્રદ વાતો, આપના વર્ગશિક્ષણના અનુભવો, ગણિત ગમ્મત, કોયડાઓ, પાઠ્યપુસ્તક અંગેની ચર્ચા, વિજ્ઞાન/એન્જિનિયરીંગ/વ્યવહારમાં ગણિતનું મહત્ત્વ, પુસ્તક પરિચય, ગાણિતિક સંકલ્પનાઓ, ગણિતને લગતી સાંપ્રત સમસ્યાઓ, આપની આજુબાજુ કે આપનાથી દૂર સુદૂર બનતી ગાણિતિક ઘટનાઓ જેવા કોઈ પણ વિષય પર આપ ટૂંકી નોંધ કે વિગતવાર લેખ લખી શકો છો. તો ઉપાડો કલમ અને માંડો લખવા! સુગણિતમ્ આપના લેખની રાહ જુએ છે.

****

વાચક મિત્રોને

આપને વિનંતી છે કે સમય ફાળવીને આપ સુગણિતમ્‌નો આ અંક વાંચશો અને તેમાં આપને શું ગમ્યું, શું ન ગમ્યું તે અમોને જણાવશો. કોઈ લેખના વસ્તુ વિશે આપને વિશેષ માહિતી હોય કે તે અંગે કોઈ ટીકા ટિપ્પણી હોય તો તે લખશો. સુગણિતમ્‌ને વધુ ઉપયોગી અને સમૃદ્ધ કઈ રીતે બનાવી શકાય તે માટેનાં આપનાં સૂચનો જરૂર જણાવશો. આપનાં અભિપ્રાય અને સૂચનો અમારે માટે ઘણાં મૂલ્યવાન છે. દરેક અંકમાં 'વાચકો લખે છે' એ વિભાગમાં વાચક મિત્રોનાં અભિપ્રાય / સૂચનો સામેલ કરીશું.

****

વ્યવસ્થાપક મંડળ :

1.	પ્રા. એ.કે. દેસાઈ (કન્વીનર)	(M)	9824062983
2.	પ્રા. પી. કે. વ્યાસ	(M)	9825577784
3.	પ્રા. સચિન ગજ્જર	(M)	9925362754
4.	પ્રા. સાવન પટેલ	(M)	8141078809
5.	શ્રી નીલેશ માંડલિયા	(M)	9712346664
6.	પ્રા. પારસ ઉચાટ	(M)	9824434459