क्षेत्रीय गणित ओलिंपियाड – 2024

समय: 3 घंटे

नवम्बर 03, 2024

निर्देश:

- किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.
- पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.
- सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102.
- बिना स्पष्टीकरण के केवल उत्तर बताने पर अंक नहीं दिए जाएंगे.
- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.

1. मान लें कि $n > 1$ एक धनात्मक पूर्णांक है. $1, 2, \ldots, n$ का पुनर्विन्यास $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nice कहलाता है यदि प्रत्येक $k = 2, 3, \ldots, n$ के लिए, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ **किसी भी** k द्वारा विभाज्य **नहीं** होता है.
   (a) यदि $n > 1$ विषम है, तो सिद्ध करें कि $1, 2, \ldots, n$ का कोई nice पुनर्विन्यास नहीं है.
   (b) यदि n सम है, तो $1, 2, \ldots, n$ का एक nice पुनर्विन्यास खोजें.

2. एक धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $R(n)$ को प्राप्त शेषफलों का योग मानें जब n को $1, 2, \ldots, n$ से विभाजित किया जाए. उदाहरण के लिए, $R(4) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$, $R(7) = 0 + 1 + 1 + 3 + 2 + 1 + 0 = 8$. सभी ऐसे धनात्मक पूर्णांकों n को खोजें जिनके लिए $R(n) = n - 1$ हो.

3. ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है. D, BC पर वह बिंदु है जिसके लिए AD, BC पर लंबवत् है. O, H, G क्रमशः त्रिभुज ABC के परिकेंद्र, लम्बकेन्द्र, और केंद्रक हैं. यह दिया गया है कि $2 \cdot OD = 23 \cdot HD$. सिद्ध करें कि G, त्रिभुज ABC के अंतःवृत्त पर स्थित है.

4. मान लें कि a_1, a_2, a_3, a_4 वास्तविक संख्याएँ हैं जिनके लिए $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$ है. सिद्ध करें कि ऐसे i, j का अस्तित्व है जिनके लिए $1 \le i < j \le 4$ तथा $(a_i - a_j)^2 \le \frac{1}{5}$.

5. मान लें कि $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें AB, CD के समांतर है. मान लीजिए कि O, $ABCD$ का परिकेंद्र है, और L, AD पर वह बिंदु है जिसके लिए OL, AD पर लंब है. सिद्ध करें कि
$$OB \cdot (AB + CD) = OL \cdot (AC + BD).$$

6. मान लें कि $n \ge 2$ एक धनात्मक पूर्णांक है. पूर्णांकों के अनुक्रम $a_1, a_2, \cdots, a_k$ को n–chain कहा जाता है यदि $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = n$ तथा a_{i+1} को a_i सभी i, $1 \le i \le k - 1$ के लिए विभाजित करता है. मान लीजिए $f(n)$, n–chains की संख्या है जहाँ $n \ge 2$. उदाहरण के लिए, $f(4) = 2$ है, जो 4–chains $\{1, 4\}$ और $\{1, 2, 4\}$ के संगत है.
   सिद्ध करें कि प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक m के लिए, $f(2^m \cdot 3) = 2^{m-1}(m + 2)$.

----------00000----------