RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

વર્ષ : 62 ઈ-આવૃત્તિ-10 સળંગ અંક : 315 ઓક્ટોબર-2024

For Private Circulation Only

મુખપૃષ્ટ પરનો ગણિતજ્ઞ

લાર્સ આહ્લફોર્સ (Lars Ahlfors)

Birth : 18th April, 1907 Death : 11th October, 1996

email : suganitam2018@gmail.com

આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

સંવર્ધક તંત્રી
ડો. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

અનુક્રમણિકા

સળંક અંક : 315 **ઈ-આવૃત્તિ-10** **ઑક્ટોબર-2024**

સંપાદકીય

વર્ષ 2024નો સુગણિતમ્ નો છેલ્લો અંક એટલે કે સળંગ અંક 315 (E-અંક-10) આપ સમક્ષ મૂકતાં હર્ષની લાગણી અનુભવીએ છીએ. સુગણિતમ્ એ ગણિતને સમર્પિત એવું સામાયિક છે જેમાં લોકભોગ્ય શૈલીમાં લખાયેલા ગણિતના વિવિધ વિષયાંગો પરના લેખો પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે. ગુજરાતમાં યોજાતી ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓના અહેવાલો, રસપ્રદ ગણિત કણિકાઓ, ગાણિતિક કોયડાઓ, વાચકોના પ્રતિભાવો વગેરેનો પણ સમાવેશ સુગણિતમ્માં કરવામાં આવે છે, જે ગણિતપ્રેમીઓને અમૂલ્ય ભાથું પૂરું પાડે છે.

આ સામયિકની નીતિ મુજબ સુગણિતમ્ના વાચકો માટે રસપ્રદ બની શકે તેવા ગણિત સાથે સંકળાયેલ કોઈપણ મૌલિક લેખ સુગણિતમ્ ના હવે પછીના અંકોમાં શક્ય પ્રકાશન માટે આવકાર્ય છે. આ ઉપરાંત સુગણિતમ્ ને સમૃદ્ધ બનાવવા માટેનાં આપના સૂચનો અને અભિપ્રાયો આવકાર્ય છે.

ગુજરાત ગણિત મંડળનું 61મું વાર્ષિક અધિવેશન તા.10-12 નવેમ્બર 2024 દરમ્યાન ઓક્સફર્ડ સ્કૂલ ઓફ સાયન્સ, અમરેલી મુકામે આયોજિત થશે. દર વર્ષની જેમ આ વર્ષના અધિવેશનમાં પણ લોકભોગ્ય પ્રવચનો, આમંત્રિતોના વ્યાખ્યાનો, પ્રશ્ન સંધ્યા, ગણિત સમાચાર વગેરેનું આયોજન થશે. અધિવેશનનું આમંત્રણ પત્ર સુગણિતમ્ના આ અંકમાં જોઈ શકાશે. અધિવેશનમાં ભાગ લેનાર સહભાગીઓને ગત વર્ષની જેમ આ વખતે પણ વર્ષ દરમિયાન પ્રકાશિત સુગણિતમ્ ના સળંગ અંક ક્રમાંક 312-315 એક પુસ્તિકાના સ્વરૂપમાં આપવામાં આવશે.

આ અંકને તૈયાર કરવા માટે હરહંમેશની જેમ જહેમત ઉઠાવનાર પ્રા. પ્રહલાદભાઈ વ્યાસનો સંપાદક મંડળ વિશેષ આભાર માને છે.

અત્યાર સુધી જે ઉમળકાભર્યો આવકાર સુગણિતમ્ ને મળેલ છે તે આગળ પણ ચાલુ રહેશે એવી આશા સાથે હવે નવા વર્ષે અંક ક્રમાંક 316માં ફરી મળશું.

- સંપાદકો

કૃપા કરી આટલું કરશો.

સુગણિતમ્માં પ્રકાશિત કરવા માટે ઘણાં બધાં – સારા, પ્રકાશિત કરવા જ જોઈએ એવાં - લખાણો મળી રહ્યાં છે. કેટલાંક લખાણો ટાઈપ કરેલાં હોય છે તો કેટલાંક હસ્તલિખિત પણ હોય છે. હસ્તલિખિત લખાણોના ફોટા પાડીને અને ટાઈપ કરેલાં લખાણોની Doc-File અને PDF મળે છે. અમે નમ્રતાપૂર્વક નીચે પ્રમાણે ત્રણ સૂચનો કરીએ છીએ.

1. ટાઈપ કરેલાં લખાણો 14 પોઈન્ટના અક્ષરોમાં ટાઈપ કરવાં. ટાઈપ કરતી વખતે બે લીટી વચ્ચેનું અંતર (Line Spacing) થોડું વધારે રાખવું. પછી તેની Doc-File અને PDF બન્ને મોકલવી.
2. હસ્તલિખિત લેખ તદ્દન કોરા કાગળો પર પાનાની એક જ બાજુએ લખવો. લીટીવાળા-આંકેલા કાગળોનો ઉપયોગ ન કરવો. લખાણ 0.7 પોઈન્ટની અણી (Nib) વાળી વાદળી અથવા કાળા કલરની Gel Pen વડે લખવું. Ball Pen નો ઉપયોગ ન કરવો.
3. હસ્તલિખિત લખાણના ફોટા પાડતા પહેલાં અને ટાઈપ કરેલ લખાણની PDF બનાવતા પહેલાં, લેખ બરાબર વાંચી જવો.

જો આપ આ સૂચનોનો અમલ કરશો તો ટાઈપ કરનારને અને પ્રુફ વાંચનારને ઘણી સુગમતા થશે.

આભાર...

સો અંક પહેલાં...

[સુગણિતમ્‌નો 215 મો અંક મે-જૂન 2005નો હતો. આ અંકમાં પ્રા. અરુણભાઈ વૈદ્ય સાહેબનો લેખ 'એક ચર્ચા (કે વિવાદ)ને આમંત્રણ' પ્રગટ થયો હતો તે અત્રે પુનઃમુદ્રિત કરીએ છીએ. - પ્રધાન સંપાદક]

એક ચર્ચા (કે વિવાદ) ને આમંત્રણ

છેલ્લાં કેટલાંક વર્ષોથી એક વાત મનમાં ઘોળાયા કરે છે તેને આખરે બધાની સામે મૂકવાની હિંમત કરું છું. વાતમાં મૉણ નાખ્યા વગર સીધી વાત કરું તો છેલ્લાં ત્રીસ વર્ષથી શાળા કક્ષાએ ગણિતમાં આપણે જે નવો અભિગમ અપનાવ્યો છે તેનાથી જેટલી અપેક્ષા હતી તેટલો લાભ થયો છે કે કદાચ થોડું નુકસાન થયું છે તે વિચારવાની જરૂર લાગે છે. આ બધી ચર્ચા, તપાસ પછી જરૂરી લાગે તે ફેરફાર કરવાની આપણી તૈયારી છે કે કેમ તે પણ ચર્ચવાની જરૂર લાગે છે.

1973ના જૂનમાં સમગ્ર ગુજરાતમાં કહેવાતું "નવું ગણિત" આઠમા ધોરણમાં અમલમાં આવ્યું. અત્યાર સુધીમાં બે પેઢીના વિદ્યાર્થીઓ "નવું ગણિત" ભણી ચૂક્યા છે. નવા અભ્યાસક્રમ અને જૂના અભ્યાસક્રમમાં વિષયવસ્તુમાં બહુ મોટો ભેદ હતો નહિ. બીજગણિતમાં પહેલાંની જેમ જ સુરેખ સમીકરણો, સુરેખ સમીકરણ સંહતિઓ, અવયવ, દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ હજી હતાં અને ભૂમિતિમાં પહેલાંની જેમ જ યુક્લિડીય ભૂમિતિનો અભ્યાસ જ હતો પણ અભિગમમાં એટલું મોટું પરિવર્તન હતું કે તે શિક્ષકોને માટે પણ ખૂબ કઠીન પડ્યું હતું.

એક પરિવર્તન તો એ હતું કે સમગ્ર ગણિતના પાયામાં ગણસિદ્ધાંત છે એ નવા ગણિતમાં સ્પષ્ટ થતું હતું. અંકગણિતમાં સંખ્યાઓના ગણનો અભ્યાસ થાય, બીજગણિતમાં બહુપદીઓનો ગણ હોય, ભૂમિતિમાં સમતલનાં બિંદુઓનો ગણ હોય.

નવા ગણિતનું બીજું લક્ષણ તર્કનું પ્રાધાન્ય. ગણિતમાં પહેલેથી જ તર્કનું મહત્વ તો હતું જ. પણ નવાગણિતમાં તો તેમાં જરાય ઢીલાશ ન ચાલે તેવો આગ્રહ હતો. તમે જે પરિણામની વાત કરતા હો તે ગમે તેટલું દેખીતું લાગતું હોય તો પણ તેની સાબિતી આપવી જ પડે – અથવા તેને સાબિત કર્યા વગર સ્વીકારી લેવાનું છે તેવી વાત તો કરવી જ પડે. જો નવા ગણિતને વિદ્યાર્થીઓ અત્યંત અકળાવનારો વિષય સમજતા હોય તો તેમાં તર્કનો આ અતિરેક ઘણે અંશે કારણભૂત હોઈ શકે.

નવા ગણિતનું ત્રીજું લક્ષણ ચોક્સાઇ. બે ખૂણા "સરખા" ન કહેવાય, "એકરૂપ" જ કહેવાય, $\angle A=20^{o}$ ન હોય, $\angle A$ નું માપ ૨૦ હોય, જૂના ગણિતમાં તો AB નો અર્થ-અંતર AB કે રેખા AB કે રેખાખંડ AB-એમ ગમે તે હોઈ શકતો પણ નવા ગણિતમાં આવું ડિંડવાણું ન ચાલે.

નવા ગણિતનું ચોથું લક્ષણ તે સંકેતોની ભરપાર. નવા ગણિતમાં હોય અને જૂના ગણિતમાં ન હોય એવા કેટલાંક સંકેતોઃ $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $m\angle A$, $\cong$, $\in$, $\sim$, $\odot(A, 5)$ વગેરે.

નવા ગણિતનાં જે લક્ષણો આપણે ઉપર ગણાવ્યાં છે તે બધાં જ એક ગણિતશાસ્ત્રીને મન કદાચ ખૂબ ઉત્તમ છે અને માટે જ આપણે એ શાળાઓમાં દાખલ કર્યાં હતાં. પણ હવે આટલાં વર્ષે જરા થોભીને આજુબાજુ જોઈને કદાચ વિચારવું જોઈએ કે આ બધાં લક્ષણો દાખલ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓ કેટલે અંશે ગણિતથી આકર્ષાયા ? કેટલા ગણિતથી તેનાં આ લક્ષણોને કારણે જ કંટાળ્યા ?

બીજો વિચાર એ કરવાનો છે કે આ બધાં લક્ષણો વગરનું જૂનું ગણિત જે લોકો ભણ્યા હતા એ બધાના પ્રમાણમાં આ નવા વિદ્યાર્થીઓને કોઈ વિશેષ લાભ મળ્યો છે ખરો ?

ત્રીજું એ વિચારવાનું રહે છે કે આ મુજબનો અભિગમ ભારતમાં બહુ ઓછા પ્રદેશોએ અપનાવ્યો છે (મારી જાણ મુજબ તો કદાચ આપણે એકલા જ છીએ) તો એ અન્ય પ્રદેશોની સરખામણીમાં આટલાં વર્ષે આપણે ક્યાં છીએ ? આગળ, પાછળ કે સાથો સાથ ?

આ લેખમાં મુખ્યત્વે મહત્વના પ્રશ્નો જ ઉઠાવવાનો મારો પ્રયત્ન છે. એ પ્રશ્નોના (કે એમાંના કેટલાકના) જવાબો મારી પાસે છે, પણ મારો ઉદ્દેશ ચર્ચા જગાવવાનો છે. હું આશા રાખું છું કે સુગણિતમ્‌ના ઘણા વાચકો આ અંગે ટૂંકમાં પોતાનાં મંતવ્યો અમને લખશે. આ બધાં લખાણ જો અમને જુલાઈની દસમી સુધીમાં મળી જાય તો તેમાંનાં કેટલાંકને ઑગસ્ટના અંકમાં સ્થાન આપી શકાય અને જો આ પ્રશ્ને સારી એવી જાગૃતિ જણાય તો ગુજરાત ગણિત મંડળના આગામી અધિવેશનમાં આ અંગે એક ખુલ્લી ચર્ચા પણ ગોઠવી શકાય.

[2024ની નોંધ : આ લેખમાં-2005માં-ઉઠાવવામાં આવેલા મુદ્દા આજે બે દશકા પછી પણ એટલા જ સુસંગત છે. સુગણિતમ્‌માં, Whatsapp પરના જુદાજુદા ગણિત-ગ્રુપમાં, ગણિત શિક્ષણ, પરીક્ષા પધ્ધતિ, શાળાકક્ષાએ ગણિતના અભ્યાસક્રમોનું અવમુલ્યન જેવા મુદ્દાઓ અવારનવાર ચર્ચાતા રહે છે. ચર્ચાઓ થતી રહે છે. પણ ગણિત શિક્ષકો, ગણિત શિક્ષણવિદો, કે ગણિતના વિદ્યાર્થીઓમાં પણ આવી ચર્ચામાં ભાગ લેવા પ્રત્યે એક પ્રકારની ઉદાસીનતા જોવા મળે છે. **નવા ગણિતના આદ્ય પ્રણેતાઓ પૈકીનાં એક, એવા સ્વ. અરુણભાઈ આ ચર્ચા ઉપસ્થિત કરી, પણ તેના પ્રતિભાવ રૂપે માત્ર બે લેખો મળ્યા હતા. ચાલો, આજે ફરી એકવાર પ્રયત્ન કરીએ, જોઈએ કે કેટલા અને કેવા પ્રતિભાવો મળે છે.]**

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ગણિત કણિકા

Teacher	**:**	**How do we change Kilometers to Meters?**
Me	**:**	**Sir, very easy. Remove Kelo.**

(M) 9712346664

નિલેશ માંડલિયા
અમદાવાદ.

એમ. એચ. વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9824669364

આ લેખમાળાના સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 314માંના લેખમાં આપણે યુક્લિડના જીવનના બે'ક પ્રસંગોની અને તેના ગ્રંથ 'Elements'ની વાત કરી. યુક્લિડની ભૂમિતિ શાળામાં એટલા લાંબા સમય સુધી શીખવાય છે અને શાળાના ગણિત શિક્ષણનો એ એટલો મહત્ત્વનો ભાગ છે કે વિદ્યાર્થીના મનમાં એવી છાપ ઊભી થઈ શકે કે યુક્લિડ ભૂમિતિવિદ્ અને કેવળ ભૂમિતિવિદ્ હતા. પરંતુ એવું નથી. યુક્લિડ સંખ્યાઓ વિશે પણ ઘણું જ્ઞાન ધરાવતા હતા. બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુરુતમ સાધારણ અવયવ શોધવાની યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ (Euclid's Division Algorithm) આ વાતની સાક્ષી પૂરે છે. એ જ રીતે '1 થી મોટા અને અવિભાજ્ય ન હોય તેવા દરેક ધનપૂર્ણાંકને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.' એ અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય પણ જુદા સ્વરૂપે યુક્લિડના 'Elements' ગ્રંથના નવમા ભાગમાં Proposition 14 તરીકે જોવા મળે છે. મતલબ કે યુક્લિડને ભૂમિતિ ઉપરાંત સંખ્યાશાસ્ત્રમાં પણ એટલો જ ઊંડો રસ હતો. અહીં આપણે યુક્લિડે આપેલી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના એક પરિણામની સુંદર સાબિતી વિશે વાત કરવી છે. આપણે જાણીએ છીએ કે 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 .... એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. પ્રશ્ન એવો ઊભો થાય કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની આ હારમાળા ક્યાંક અટકી જાય કે પછી ચાલ્યા જ કરે, ચાલ્યા જ કરે ? પરિણામ એવું છે કે આ હારમાળાને અંત નથી. બીજી રીતે કહીએ તો અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે. પહેલી દૃષ્ટિએ એમ લાગે કે આ પરિણામની સાબિતી અઘરી નહિ હોય. કોઈપણ અવિભાજ્ય સંખ્યા p માટે, p થી મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા qનું અસ્તિત્વ બતાવી દઈએ એટલે કામ પૂરું થઇ જાય. ધન પૂર્ણાંકોનો ગણ અનંત છે એ સાબિત કરવા માટે આમ જ કરીએ છીએ ને ? કોઈ ધન પૂર્ણાંક n લો. તો n+1 ધનપૂર્ણાંક છે અને $n+1 > n$. તેથી ધનપૂર્ણાંકોનો ગણ અનંત છે. આ સાબિતીમાં ધનપૂર્ણાંક n માટે nથી મોટો ધનપૂર્ણાંક n+1 તુરત મળી ગયો, અને તેથી આપણું કામ સરળતાથી પતી ગયું. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની તકલીફ એ છે કે આપેલી અવિભાજ્ય સંખ્યા p થી મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા મેળવવાની કોઈ સહેલી (કે અઘરી) રીત નથી. તો શું કરવું? યુક્લિડે એક સરસ સાબિતી આપી. સાબિતી સરળ છે અને સુંદર છે. ગણિતનાં પરિણામોની સુંદર સાબિતીઓની યાદીમાં યુક્લિડની આ સાબિતી અવશ્ય સ્થાન પામે છે.

➲ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.

યુક્લિડની સાબિતી : અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગણને P વડે દર્શાવીએ. આપણે બતાવવું છે કે P અનંત ગણ છે. ધારો કે P સાંત ગણ છે. P નાનામાં નાની સંખ્યા 2 છે. P સાંત હોવાથી તેમાં મોટામાં મોટી સંખ્યા પણ હશે આથી આપણે P ને એક સાંત શ્રેણી $(p_1, p_2, p_3, \dots p_n)$ તરીકે લખી શકીએ, જ્યાં p_1=2, p_2=3, p_3=5 વગેરે. p_n એ Pની મોટામાં મોટી સંખ્યા છે અને $p_1 < p_2 < p_3 \dots < p_n$ હવે m=$p_1p_2\dots p_n$+1 લો. દેખીતી રીતે જ m>p_n. વળી p_n એ મોટામાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. આથી m અવિભાજ્ય નથી. તેથી m વિભાજ્ય છે. આથી mને એક અવિભાજ્ય અવયવ p હશે. (શા માટે?) તેથી P∈P = $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ અને તેથી $p=p_i$ કોઈક i જ્યાં $1 \le i \le n$. પરંતુ m ને જો p_i વડે ભાગીએ તો શેષ 1 મળે. એટલે p_i એ mનો અવયવ નથી. આથી $p=p_i$ એ mનો અવયવ નથી. આમ વિરોધાભાસ મળ્યો. વિરોધાભાસ એટલા માટે મળ્યો કે આપણે ધાર્યું કે P સાંત છે. આથી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ P અનંત છે.

➲ ઈરેટોસ્થેનિસની ચાળણી (SIEVE OF ERATOSTHENES)

અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની વાત કરીએ એટલે ઈરેટોસ્થેનિસની યાદ આવે. ઈરેટોસ્થેનિસે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ઓળખવાની અને તેની યાદી બનાવવા માટે એક રીત આપી, જે ઈરેટોસ્થેનિસની ચાળણી તરીકે ઓળખાય છે. આ રીત સમજવા માટે એક ચોક્કસ ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે આપણે 1 થી 100 સુધીની સંખ્યાઓમાંની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ જોઈએ છે. સંખ્યા અવિભાજ્ય હોવા માટે વિભાજ્ય ન હોવી જોઈએ અને સંખ્યા વિભાજ્ય તો જ હોય, જો એ તેનાથી નાની કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યાનો ગુણિત હોય. બસ, ઈરેટોસ્થેનિસની રીત આ જ પરિણામ પર આધારિત છે. 1 થી 100 સુધીની સંખ્યાઓમાંની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ મેળવવા માટે પહેલાં 1 થી 100 સુધીની સંખ્યાઓ લખી નાંખીએ.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

હવે નીચે પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરીએ.

પગલું 1 : સંખ્યા 1 અવિભાજ્ય નથી. માટે 1 છેકી નાંખો.

પગલું 2 : પગલા 1 માં ન છેકાયેલી સંખ્યાઓમાંની નાનામાં નાની સંખ્યા 2 છે. તેની આસપાસ વર્તુળ દોરો. ઉપરાંત 2 ની ગુણિત હોય તેવી, 2 સિવાયની સંખ્યાઓ છેકી નાંખો. આમ આ પગલે 2 સિવાયની બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓ છેકાઈ જશે.

પગલું 3 : પગલા 2 સુધીમાં જેની આસપાસ વર્તુળ ન હોય કે જે છેકી નાંખી ન હોય તેવી સંખ્યાઓમાં નાનામાં નાની સંખ્યા 3 છે. 3ની આસપાસ વર્તુળ દોરો. ઉપરાંત 3 સિવાયની, 3ની ગુણિત હોય એવી અને અગાઉ ન છેકાયેલી હોય તેવી સંખ્યાઓ છેકી નાંખો. આમ આ પગલે 9, 15, 21, 27, 33, ..., 93, 99 છેકાઈ જશે. આ રીતે આગળ વધતા રહો. દરેક પગલે, આગળના કોઈ પગલે જેની આસપાસ વર્તુળ ન દોર્યું હોય કે જે છેકી ન નાંખી હોય એવી બધી સંખ્યાઓમાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા આસપાસ વર્તુળ દોરો અને તે સંખ્યા સિવાયની, તેની ગુણિત સંખ્યાઓમાંથી જે અગાઉ ન છેકાઇ હોય તે સંખ્યાઓ છેકી નાંખો. છેવટે દરેક સંખ્યા માટે, એ સંખ્યા આસપાસ વર્તુળ હશે અથવા સંખ્યા છેકી નાંખી હશે.

ઉપર લખેલી 1 થી 100 સંખ્યાઓની યાદી હવે નીચે આપી છે તેવી દેખાશે.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~
~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~
~~99~~	~~100~~												

આવું બને ત્યારે વર્તુળ વાળી સંખ્યાઓ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હશે અને આ સંખ્યાઓ જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હશે.

ઉપરની રીતમાં આપણે વિભાજ્ય સંખ્યાઓને 'ચાળી' નાંખીએ છીએ, જેથી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ બાકી રહી જાય છે. આને કારણે આ રીતને ઇરેટોસ્થેનિસની ચાળણીની રીત કહે છે.

અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ શોધવાની આ રીત લાંબી લાગે, પરંતુ ખરેખર એ લાંબી નથી. રીત લાંબી ન હોવાનું કારણ નીચેનું પરિણામ છે.

જો ધનપૂર્ણાંક n વિભાજ્ય હોય તો તેને $\sqrt{n}$ થી મોટો નહિ એવો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય જ.

હવે જો n 100 કે તેથી નાનો વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંક હોય તો $\sqrt{n} \leq \sqrt{100} = 10$ હોવાથી n ને 10 કરતાં નાનો અવિભાજ્ય અવયવ હોવો જ જોઈએ. 10થી નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ 2, 3, 5 અને 7 જ છે. આથી n એ 2, 3, 5 અને 7માંથી એક સંખ્યાનો ગુણિત હોવો જ જોઈએ. તેથી 100 સુધીની સંખ્યાઓ માટે ઇરેટોસ્થેનિસની ચાળણીની રીત વાપરવા માટે 2, 3, 5 અને 7 ના જ ગુણિત છેકી નાંખવા જરૂરી છે. આ સંખ્યાઓના ગુણિત છેકી નાંખ્યા બાદ આગળ જવાની જરૂર નથી. બાકીની સંખ્યાઓ અવિભાજ્ય જ હશે. જો 200 સુધીની સંખ્યાઓ માટે ઇરેટોસ્થેનિસની ચાળણી તૈયાર કરવી હોય તો 13 કે તેથી નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણિત છેકવા પડે અને 500 સુધીની સંખ્યાઓ માટે 19 સુધીની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણિત છેકવા પડે. (શા માટે?)

અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ શીખવતી વખતે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓને ઇરેટોસ્થેનિસની ચાળણીનો ખ્યાલ આપી શકાય અને તેઓ પાસે એક પ્રવૃત્તિ તરીકે 100 કે 200 સુધીની સંખ્યાઓની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ શોધાવી શકાય. આમ કરવાથી તેમના વિભાજ્ય અને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ખ્યાલ સ્પષ્ટ થશે અને કંઈક કરવાનો તેમને આનંદ પણ આવશે. બનવાજોગ છે કે આ પછી કોઈ વિદ્યાર્થી 300 કે 400 સુધીની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની યાદી બનાવી કાઢશે.

ઇરેસ્ટોથેનિસ (ઇ.પૂ. 276-194) ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી હતો. ગણિતશાસ્ત્રી હોવા ઉપરાંત તે ફિલસૂફ, ભૂગોળવિદ્, ખગોળવિદ્, ઇતિહાસકાર અને કવિ પણ હતો. એલેક્ઝાન્ડ્રિયા શહેરના વિખ્યાત ગ્રંથાલયનો તે ગ્રંથપાલ હતો. આર્કિમિડીઝનો તે સમકાલીન અને મિત્ર હતો. ઇરેટોસ્થેનિસે પૃથ્વીના પરિધના માપની ગણતરી કરી હતી અને આવી ગણતરી કરનાર તે સર્વપ્રથમ વ્યક્તિ હતો.

નોંધ : આપણે આ લેખમાં નીચેનાં બે પરિણામોનો ઉલ્લેખ કર્યો છે.

(1) દરેક વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંકને એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય જ.

(2) જો n વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંક હોય તો, nને, $\sqrt{n}$ થી મોટો નહિ તેવો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય જ.

આ બંને પરિણામોની સાબિતી સહેલી છે. આમ છતાં આ અંકમાં ગણિત નોંધપોથીમાં આપણે તેની ચર્ચા કરીશું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

લંબકેન્દ્રના કેટલાંક વધુ પરિણામો

મૂળ લેખક : Dr. M. Rajaclimax & N. Sai Prasadkumar, Madurai
રૂપાંતરણ : મેઘરાજ જ. ભટ્ટ, (M) 9925837247

ગતાંકના લેખમાં ઉપરના લેખકોની પુસ્તિકા 'The Novelties of Geometry' માંથી લંબકેન્દ્રને લગતાં કેટલાંક પરિણામો જોયાં. લેખને અંતે ચાર પરિણામો સાબિતી વિના આપ્યાં હતાં. આ લેખમાં શરૂઆતમાં પરિણામ 6 અને 7ની ચર્ચા કરવી છે અને ત્યારબાદ અન્ય નૂતન વિગતો જોઈશું.

ગતાંકના પા.નં.63 પર આપેલું પરિણામ નીચે પ્રમાણે છે.

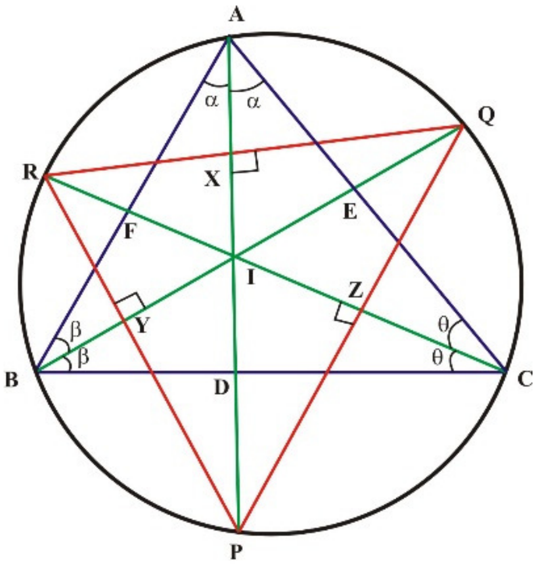
<u>પરિણામ-6</u> લઘુકોણ ત્રિકોણનું <u>લંબકેન્દ્ર</u>, તેના વેધોને લંબાવતાં તેઓ પરિવર્તુળને જે બિંદુઓમાં છેદે તે બિંદુઓથી બનતા ત્રિકોણનું **અંતઃકેન્દ્ર** છે.

પરિણામ-6ને થોડા જુદા શબ્દોમાં નીચે પ્રમાણે લખીએ તો તેનો પરિણામ-1 સાથેનો સંબંધ સ્પષ્ટ થશે.

"લઘુકોણ ત્રિકોણનું <u>અંતઃકેન્દ્ર</u>, તેના કોણદ્વિભાજકોને લંબાવતાં તેઓ પરિવર્તુળને જે બિંદુઓમાં છેદે તે બિંદુઓથી બનતા ત્રિકોણનું <u>લંબકેન્દ્ર</u> છે."

વાચકો જોઈ શકશે કે બંને પરિણામોમાં લઘુકોણ ત્રિકોણ અને તેનું પરિવર્તુળ સ્થાયી છે અને લંબકેન્દ્ર અને અંતઃકેન્દ્રની અદલાબદલી થયેલી છે. આપણે આ પરિણામની સાબિતી જોઈએ.

"ΔABCમાં $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ અને $\overrightarrow{CF}$ કોણદ્વિભાજકો છે જે Iમાં સંગામી છે. આ કોણદ્વિભાજકો પરિવર્તુળને અનુક્રમે P, Q અને Rમાં મળે છે. સાબિત કરો કે ΔPQRનું લંબકેન્દ્ર I છે."



આકૃતિ-1

ΔABCમાં $\angle A$, $\angle B$ અને $\angle C$ના અંતઃદ્વિભાજકો અનુક્રમે $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ અને $\overrightarrow{CF}$ છે જે ΔABCના પરિવર્તુળને અનુક્રમે P, Q અને Rમાં મળે છે.

<u>સાધ્ય</u> : I, ΔPQRનું લંબકેન્દ્ર છે.

<u>સાબિતી</u> : AP અને QRનું છેદબિંદુ X છે. BQ અને RPનું છેદબિંદુ Y છે, CR અને PQનું છેદબિંદુ Z છે.

$\angle PRC = \angle PAC = \frac{A}{2}$ ($\widehat{PC}$ થી બનતા ખૂણાઓ) $\quad \therefore \angle YRI = \frac{A}{2}$ .... (i)

$\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ .... (ii)

ΔRYI માટે $\angle YIC = \angle YRI + \angle RYI$ પરંતુ $\angle YIC = \angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ (ii પરથી)

$\angle YRI = \angle PRC = \frac{A}{2}$ (i) પરથી

$\therefore 90^\circ + \frac{A}{2} = \frac{A}{2} + \angle RYI \qquad \Rightarrow \angle RYI = 90^\circ$

$\Rightarrow PR \perp QY.$

$\therefore$ QY, ΔPQR નો વેધ છે.

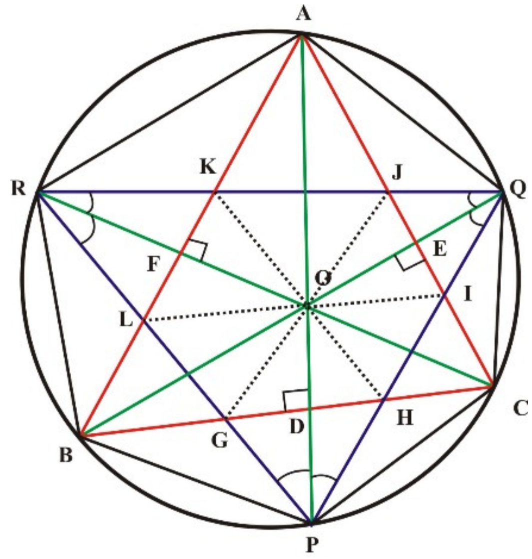
તે જ રીતે સાબિત કરી શકાય કે RZ અને PX પણ વેધ છે, જે ત્રણે Iમાં સંગામી છે.

∴ I, ΔPQR નું લંબકેન્દ્ર છે.

હવે આ સાબિતીને આધારે વાચકો પરિણામ 7 સાબિત કરી શકશે, કારણ કે એમાં એક ખૂણાનો અંતઃદ્વિભાજક અને બે ખૂણાના બહિઃદ્વિભાજકો લીધા છે.

હવે નીચેની આકૃતિ 2 બરાબર સમજી લઈએ અને અગાઉના પરિણામો યાદ કરીએ તો ઘણા નવા ગુણધર્મો (પરિણામો) મળે છે જે સાબિત કરવા સરળ છે.

ΔABC અને તેનું પરિવર્તુળ આપેલ છે. AD, BE અને CF વેધ છે અને O લંબકેન્દ્ર છે. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ અને $\overrightarrow{CF}$ પરિવર્તુળને અનુક્રમે P, Q અને Rમાં મળે છે. અગાઉ સાબિત કર્યા પ્રમાણે, O, ΔPQRનું અંતઃકેન્દ્ર છે. PQ, BC અને CA ને અનુક્રમે H અને Iમાં મળે છે. તે જ રીતે J, K, L અને G બિંદુઓ પણ છે.



આકૃતિ-2

સૌ પ્રથમ નીચેનું એક પરિણામ સાબિત કરીએ.

પરિણામ-8 PGOH સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સાબિતી : ΔPQRનું અંતઃકેન્દ્ર O છે.

∴ રેખા PO એટલે કે રેખા PD એ $\angle GPH$નો દ્વિભાજક છે, અને $PD \perp GH$. ∴ $GD = DH$ .... (i)

વળી અગાઉ સાબિત કર્યા પ્રમાણે $OD = DP$ .... (ii)

∴ ચતુષ્કોણ PGOHના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ છે અને એકબીજાને દુભાગે છે.

∴ PGOH સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

એ જ રીતે QIOJ પણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ સાબિત કરી શકાય.

વળી, PHIQ સમરેખ છે અને આથી G, O, J પણ સમરેખ છે. એ જ રીતે L – O – I અને H – O – K સાબિત થઈ શકે.

<u>પરિણામ-૯</u> આકૃતિ-2માં નીચે પ્રમાણે એકરૂપ ત્રિકોણોની જોડ મળે છે.

(i) $\Delta BDO \cong \Delta BDP$	(iv) $\Delta AEO \cong \Delta AEQ$	(vii) $\Delta PDG \cong \Delta PDH$
(ii) $\Delta CDO \cong \Delta CDP$	(v) $\Delta AFO \cong \Delta AFR$	(viii) $\Delta QEI \cong \Delta QEJ$
(iii) $\Delta CEO \cong \Delta CEQ$	(vi) $\Delta BFO \cong \Delta BFR$	(ix) $\Delta RFK \cong \Delta RFL$

સાબિતી : (i) ΔBDO અને ΔBDP માં

$DO = DP$ (અગાઉના લેખ પ્રમાણે)

$BD = BD$ સામાન્ય

અને $\angle BDO = \angle BDP = 90^\circ$

∴ $\Delta BDO \cong \Delta BDP$ (બાખૂબા)

આ જ રીતે અન્ય એકરૂપતાઓ સાબિત કરી શકાય.

પરિણામ-10 આકૃતિ-2માં નીચે પ્રમાણે સમરૂપ ત્રિકોણોની જોડ મળે છે.

$\Delta BOP \sim \Delta AOQ$

સાબિતી : $\angle BOP = \angle AOQ$ (અભિકોણ)

અને $\angle PBO = \angle PBQ = \angle QAP = \angle QAO$

$\therefore \Delta BOP \sim \Delta AOQ$

વાચકોને આવા અન્ય સમરૂપ ત્રિકોણોની જોડ શોધવા આમંત્રણ છે.

આ જ રીતે નીચે જણાવેલ પરિણામ-11 અને 12માંના તથ્યો સાબિત કરવા વાચકોને આમંત્રણ છે.

પરિણામ-11 (i) A એ ΔORQ નું પરિકેન્દ્ર છે.

(ii) B એ ΔORP નું પરિકેન્દ્ર છે.

(iii) C એ ΔOPQ નું પરિકેન્દ્ર છે.

પરિણામ-12 (i) AROJ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

(ii) BROG ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

આવા અન્ય ચક્રીય ચતુષ્કોણો પણ વાચકો શોધી શકશે.

ભૂમિતિમાં રસ ધરાવતા શિક્ષકો માટે આ આકૃતિ-2 અનેક પરિણામોનો ખજાનો છે અને વિદ્યાર્થીને ભૂમિતિમાં રસ લેતો કરવા માટે પણ આ બે લેખોમાંથી મળતા પરિણામો ઉદ્દીપક સમાન પુરવાર થઇ શકે.

હવે પછીના લેખમાં હજુ વધારે રસપ્રદ પરિણામો જોઈશું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

લેખક સન્માન

સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થતા ગાણિતિક લેખોના લેખકો માટે સુગણિતમ્‌ના પ્રકાશક - પ્રા. અરૂણ મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ - નીચેના પુરસ્કારો જાહેર કરતાં આનંદ અનુભવે છે.

(1) કોઈપણ કક્ષાએ અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા, સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત થયેલા, ગાણિતિક લેખ દીઠ રૂ.300/- લેખકને પુરસ્કારરૂપે આપવામાં આવશે.

(2) એક વર્ષ દરમિયાન પ્રગટ થયેલા, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા ગાણિતિક લેખો પૈકી સર્વશ્રેષ્ઠ લેખના લેખકને પુરસ્કાર રૂપે રૂ.500/- આપવામાં આવશે. (વર્ષ : 1-જાન્યુઆરીથી 31 ડિસેમ્બર ગણાશે.)

(3) જેમનાં લખાણો અગાઉના સુગણિતમ્‌માં ક્યારેય પ્રકાશિત ન થયાં હોય તેવા (નવોદિત) લેખકને તેમના પ્રથમ લેખ માટે રૂ.500/- પુરસ્કાર રૂપે આપવામાં આવશે.

(4) સુગણિતમ્ માટે લેખ લખતા લેખકો પોતાનો કિંમતી સમય લેખ તૈયાર કરવા માટે આપે છે. તેમનું લેખન કાર્ય અમૂલ્ય છે. આવા લેખનને કોઈ પુરસ્કાર આપી મૂલવવું યોગ્ય નથી. પણ ક્યારેક તો લેખકો લેખને ટાઈપ કરાવીને મોકલે છે. ટાઈપ કર્યા પછી કુરીયરથી મોકલે છે. ટાઈપ કરાવવાનો ખર્ચ, કુરીયર દ્વારા મોકલવાનો ખર્ચ તેઓ જાતે ભોગવે છે. લેખકે કરેલા પ્રયત્નને બિરદાવવા માટે અને તેમણે કરેલા ખર્ચને આંશિક રીતે ભરપાઈ કરવા માટે અમે નીચેની જાહેરાત કરીએ છીએ.

"દરેક ગાણિતિક લેખના, સુગણિતમ્‌માં છપાયેલાં પાનાં દીઠ લેખકને રૂ.100/- આપવા.
લખાણ એક પાનાથી ઓછું હોય તો લેખકને તે પાના માટે રૂ.50/- આપવા."

નિશ્ચાયકો અને એવું બધું...

પ્રા. રેખાબેન મહેતા
(M) 9998979352 E-mail : mehtard@gmail.com

નિશ્ચાયક એટલે શું તે જાણીતું છે, 'એવું બધુ' વિષે કંઇ કહું તે પહેલાં એક કોયડો...

એક ખેતરમાં ત્રણ પ્રકારનાં ધાન્ય પાકે છે.

પ્રથમ પ્રકારના ધાન્યના ત્રણ કોથળા, બીજા પ્રકારના ધાન્યના બે કોથળા અને ત્રીજા પ્રકારના ધાન્યનો એક કોથળો મળી કુલ વજન 39 મણ થાય છે.

પ્રથમ પ્રકારના ધાન્યના બે કોથળા, બીજા પ્રકારના ત્રણ કોથળા અને ત્રીજા પ્રકારનો એક કોથળો મળી કુલ વજન 34 મણ થાય છે.

પ્રથમ પ્રકારના ધાન્યનો એક કોથળો, બીજાના બે કોથળા અને ત્રીજાના ત્રણ કોથળા મળી કુલ વજન 26 મણ થાય છે. તો પ્રત્યેક પ્રકારના કોથળામાં ધાન્યનો કેટલો જથ્થો હશે?

આ બીજગણિત સહસમીકરણનો કોયડો છે. મઝાની વાત એ છે કે પ્રસ્તુત કોયડો Nine Chapters on Mathematics Art નામના ઇ.સ. પૂર્વે 200-100 દરમિયાન લખાયેલ ચાઇનીઝ પુસ્તકમાં છે, જેમાં તેનો ઉકેલ કંઇક આ મુજબના આપેલો છે.

(1)

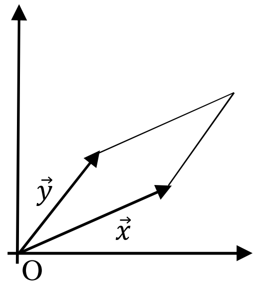
$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{bmatrix} \xrightarrow{3C_1-C_3,\ 3C_2-2C_3} \begin{bmatrix}0&0&3\\4&5&2\\8&1&1\\39&24&39\end{bmatrix} \xrightarrow{5C_1-4C_2} \begin{bmatrix}0&0&3\\0&5&2\\36&1&1\\99&24&39\end{bmatrix}$$

આ તો આપણી જાણીતી ગૉસના લોપની પદ્ધતિ (Gaussian Elimination Method) જેવી જ છે ! મતલબ કે નિશ્ચાયક-શ્રેણિક જેવા ખ્યાલ, તેના આધુનિક નામ વગર, ગણિતના ઇતિહાસમાં હાજર હતા; લાઇબ્નીઝ, ક્રેમર, કેલી અને સિલ્વેસ્ટર પહેલાં, 1800 વર્ષો અગાઉ ! ગણિતના ઇતિહાસનાં લગભગ ઘણાં પુસ્તકોમાં એવું જાણવા મળે છે કે નિશ્ચાયકનો પ્રાથમિક ઉપયોગ કાર્ડાં એ કરેલો, પરંતુ પદ્ધતિસરનો અભ્યાસ લાઇબ્નીઝ અને ક્રેમરે કરેલો. નિશ્ચાયક વિષેનું પ્રથમ પુસ્તક જેકોબીએ ઇ.સ.1841માં લખેલું.

પ્રશ્ન એ છે કે આ 'નિશ્ચાયક' શું 'નિશ્ચિત' કરે છે ? મૂળ તો આ જ પ્રશ્ન હતો, ક્યાંક જૂની નોટમાંથી જડેલો. તેના વિષે વિચારતાં, 'એવું બધું' લખવાની ઇચ્છા થઇ.

આ પ્રશ્ન ઉપસ્થિત કરતાં મળેલો પ્રથમ પ્રતિભાવ આવો હતો : નિશ્ચાયક શ્રેણિકના વ્યસ્તના અસ્તિત્વને નક્કી કરે છે. અને શ્રેણિકનાં લાક્ષણિક મૂલ્યો પણ આપે છે. પરંતુ નિશ્ચાયકનો ખ્યાલ અને નામ તો શ્રેણિકની પહેલાં ઉદ્ભવ્યો છે ! અલબત્ત, આ પ્રતિભાવ સાચો તો છે જ.

આગળ આપણે થોડોક ઇતિહાસ જોયો, તેના પરથી નિશ્ચાયકનો ખ્યાલ સહસમીકરણનાં બીજ મેળવવા માટે ઉદ્ભવ્યો છે તે સ્પષ્ટ છે. આમ નિશ્ચાયક (1) સહસમીકરણનાં બીજ નિશ્ચિત કરે છે. (2) શ્રેણિકનો વ્યસ્ત અને (3) શ્રેણિકનાં લાક્ષણિક મૂલ્યો નિશ્ચિત કરે છે.



આ ઉપરાંત, સમતલમાં બે સદિશો $\vec{x} = (x_1, x_2)$ અને $\vec{y} = (y_1, y_2)$ લઈને સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ બનાવીએ તો આ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix}$ નો માનાંક થાય, જે સરળતાથી ચકાસી શકાય.

તે જ રીતે અવકાશમાં ત્રણ સદિશો લેતાં 3×3 નો નિશ્ચાયક મળે જેનો માનાંક, આ સદિશો વડે રચાતા સમાંતરબાજુ ષટ્ફલકનું ઘનફળ થાય.

યામભૂમિતિમાં આપણે શીખીએ છીએ કે ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ અનુક્રમે $(x_{1,}y_1), (x_{2,}y_2)$ અને $(x_{3,}y_3)$ હોય તો તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ થાય.

નિશ્ચાયકોની ગણતરી કરતી વખતે વિદ્યાર્થીઓ કેટલીક વાર વારાફરતી ધન અને ઋણ ચિહ્નો વાપરવામાં થાપ ખાઇ જાય છે, ત્યારે તેને થતું હશે કે 'આ શોધ કરનારે બધી જગ્યાએ ધન (કે ઋણ) ચિહ્ન જ રાખ્યાં હોત તો કેટલુ સારું થાત !' ગણિતના વિશ્વમાં આવો ખ્યાલ પણ વ્યાખ્યાયિત થયેલો છે, જેને ધન નિશ્ચાયક (Positive Determinant) કે પરમેનેન્ટ (Permanent) કહે છે. તેનો ઉલ્લેખ છેક કોશીના કામમાં જોવા મળે છે અને તેનો વિસ્તૃત અભ્યાસ પણ થયો છે. તેનો ઉપયોગ સંચય-વિન્યાસશાસ્ત્ર (Combinatorics)માં અને પ્રસંભાવ્ય વિશ્લેષણ (Stochastic Analysis)માં થાય છે. પરમેનેન્ટ કોઈપણ $m \times n$ શ્રેણિક માટે વ્યાખ્યાયિત થઈ શકે છે.

અહીં આપણે તેની વિગતોમાં નહિ જઇએ. રસ ધરાવનાર વાચક (2) જોઈ શકે.

નિશ્ચાયક સાથે થોડી સરળ સરખામણી કરીએ :

1. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, ધન નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$
2. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$, ધન નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$
3. $\begin{bmatrix} a & o \\ b & c \end{bmatrix}$ જેવા શ્રેણિક માટે, નિશ્ચાયક અને ધનનિશ્ચાયક સરખા થાય.
4. સ્તંભ અથવા હારની યથેચ્છ અદલાબદલી કરવાથી ધન નિશ્ચાયકની કિંમત બદલાતી નથી.
5. Per (AB) $\neq$ Per (A) Per (B)

હવે આપણે સંચય-વિન્યાસશાસ્ત્રમાં તેનો ઉપયોગ જોઈશું. તેને માટે આપણે એક વ્યાખ્યા અને પરિણામ જાણવું પડશે :

વિસ્થાપિત-વિન્યાસ (derangement) : ધારો કે $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ એ $\{1, 2, ...n\}$ નો એવો ક્રમચય હોય કે જેથી કોઈપણ i (i=1, 2, ..., n) માટે $a_i \neq i$, તો આ ક્રમચયને વિસ્થાપિત-વિન્યાસ કહે છે.

જો n ઘટકોના બધા જ વિસ્થાપિત-વિન્યાસની કુલ સંખ્યાને D_n વડે દર્શાવી તો

$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$ થાય છે.

પ્રમેય : જો I_n, n કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક હોય અને J_n એવો શ્રેણિક હોય જેનો દરેક ઘટક 1 હોય તો (i) Per $(J_n) = n!$ અને (ii) Per $(J_n - I_n) = D_n$ થાય.

ઉદાહરણ : ધારો કે 5 કબૂતરોને તેમના ખાનામાંથી અમુક સમય બહાર રાખ્યા બાદ, ફરી પાછાં લાવવામાં આવે અને મુક્ત રીતે ખાના પસંદ કરવા દેવામાં આવે, તો કોઈપણ કબૂતર પોતાના મૂળ ખાનામાં ન જાય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે આવી કુલ પસંદગી D_5 થશે. તેથી ઉકેલ પ્રમેય મુજબ

$$D_5 = Per\ (J_5 - I_5) = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44 \text{ થાય.}$$

$\therefore$ સંભાવના $= \dfrac{D_n}{n!} = \dfrac{44}{5!} \approx 0.367$ થશે.

અન્ય રસપ્રદ પરિણામો અને ઉદાહરણો માટે સંદર્ભ (2) અને તેમાં સૂચવેલા અન્ય સંદર્ભો જોવા સૂચન છે.

સંદર્ભ

1. JJ O'Connor and E. F. Robertson, History of Determiant and matrices, Mac Tutor
2. Marcus Marvin, Minc Henryk, Permanents, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 577-591

π (પાઈ)

શું કહેવું તારા વિશે, પાઈ?
તું તો ગુણોત્તર વર્તુળમાં,
પરિધ અને વ્યાસનો !
હોય પરિધ કોઈ પણ,
ને હોય વર્તુળનો વ્યાસ ગમે તે,
રહે પાઈ તું નિષ્પક્ષ સદાય !
ગુણોત્તર તારો કાયમ રહેતો એક જ,
એ ગુણોત્તર 22/7 જ હોય !
ઉજવે દુનિયા 22 જુલાઈને તારા માનમાં,
કહીને એને 'પાઈ અંદાજિત દિવસ'.
કિંમત ક્યાં ચોક્કસ છે તારી ?
વિસ્તરેલ તું તો અનંત સુધી.
જાણે દુનિયા તારું મૂલ્ય એટલું જ,
એ તો છે, 3.141592.
પણ છે એ તો ઘણું વધારે,
ક્યાં રાખીએ યાદ આટલું બધું કોઈ ?
છતાંય માનવું પડે તને,
ભૂમિતિ અધૂરી તારા વિના !

વી.એન. ગોધાણી ઈંગ્લીશ સ્કૂલ, સુરત.
(M) 99258 37906
શ્રીમતી સ્નેહલ રાજન જાની

વીસરાતી ભૂમિતિ :

હેરોથી બ્રહ્મગુપ્ત અને તેથી આગળ... (From Heron to Brahmgupta and beyond...)

પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784, vyaspk123@gmail.com

આ લેખમાં ભૂમિતિ થોડી અને ત્રિકોણમિતિ વધુ છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉદ્ભવ પણ ભૂમિતિમાંથી જ થયો છે ને !

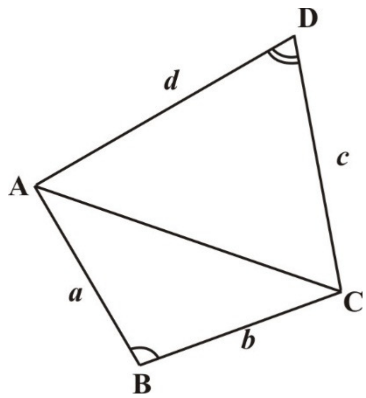
શીર્ષકમાં **"હેરોથી બ્રહ્મગુપ્ત અને તેથી આગળ..."** **(From Heron to Brahmgupta and beyond...)** એવું લખેલ છે. આપણે ઉલટા ક્રમમાં જઈ, "તેથી આગળ"થી શરૂ કરી બ્રહ્મગુપ્ત અને છેલ્લે હેરો પર આવીશું. જાણકાર વાચકો સમજી ગયા હશે કે અહીં ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળની વાત હશે ! હા, એમ જ છે.

આપણે ચતુષ્કોણ ABCDના સંદર્ભમાં ખૂણાઓનાં માપને A,B,C,D વડે દર્શાવીશું. બાજુઓનાં માપ AB=a, BC=b, CD=c, DA=d લઈશું.

ચતુષ્કોણ ABCD ની પરિમિતિ 2s વડે દર્શાવીશું. આમ $2s = a+b+c+d$.

તેથી અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

ચતુષ્કોણ ABCDના ક્ષેત્રફળને X વડે દર્શાવીશું. ΔABC અને ΔADCનાં ક્ષેત્રફળોને અનુક્રમે સંકેત [ABC] અને [ADC] વડે દર્શાવીશું.



આકૃતિ-1

ત્રિકોણમિતિનાં જે સૂત્રોનો ઉપયોગ કરવાના છીએ તેનો પણ ઉલ્લેખ કરી દઈએ.

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

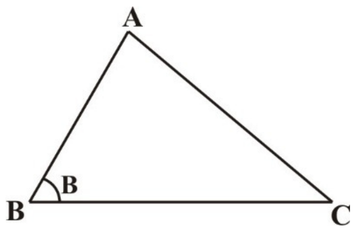
(2) ΔABC નું ક્ષેત્રફળ : $[ABC] = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B$

(3) ત્રિકોણમાં કોસાઈન સૂત્ર $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB \cdot BC}$

અને તે પરથી $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$

(4) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(5) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$



આકૃતિ-2

હવે, આકૃતિ (1)માં દર્શાવ્યા મુજબ, ચતુષ્કોણ ABCDનો વિકર્ણ AC દોરીએ.

આમ કરવાથી ચતુષ્કોણ ABCD બે અનાચ્છાદિત ત્રિકોણીય પ્રદેશો ABC અને ADCમાં વિભાજિત થશે.

$[ABC] = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} ab \sin B$

$[ADC] = \frac{1}{2} AD \cdot DC \sin D = \frac{1}{2} dc \sin D$

$\therefore X = [ABCD] = [ABC] + [ADC]$

$\therefore X = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D$

$\therefore 4X = 2ab \sin B + 2cd \sin D$

વર્ગ કરતાં $16X^2 = 4a^2b^2 \sin^2 B + 4c^2d^2 \sin^2 D + 8abcd \sin B \sin D$ .... (1)

ΔABC માં cosine સૂત્રથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

પણ AB=a અને BC=b તેથી $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$ .... (2)

તે જ પ્રમાણે ΔABCમાં cosine સૂત્રથી, $AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$ .... (3)

(2) અને (3) પરથી, $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$

$\therefore (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 2ab \cos B - 2cd \cos D$

વર્ગ કરતાં,

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2\cos^2 B + 4c^2d^2 \cos^2 D - 8abcd \cos B \cos D \quad \text{............. (4)}$$

(1) અને (4) નો સરવાળો કરતાં

$$16X^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4\, a^2b^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) + 4\, c^2d^2 (\sin^2 D + \cos^2 D)$$
$$- 8abcd (\cos B \cos D - \sin B \sin D)$$
$$= 4\, a^2b^2 + 4\, c^2d^2 - 8abcd \cos (B+D) \quad \text{............. (5)}$$

$B+D = 2\alpha$ લઈએ

$\therefore \cos (B+D) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha\text{-}1$

$\therefore$ (5) પરથી

$$16X^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4\, c^2d^2 - 8abcd\, (2\cos^2\alpha - 1)\,; \qquad \text{જ્યાં, } \alpha = \frac{B+D}{2}$$
$$= 4a^2b^2 + 4\, c^2d^2 + 8abcd - 16abcd \cos^2\alpha$$
$$= (2ab + 2cd)^2 - 16abcd \cos^2\alpha$$

$$\therefore 16X^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2} \quad \text{............. (6)}$$

હવે $(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$

$$= (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)\,(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$$
$$= [(c+d)^2 - (a-b)^2]\,[(a+b)^2 - (c-d)^2]$$
$$= (c + d + a - b)\,(c + d - a + b)\,(a + b + c - d)\,(a + b - c + d)$$

$a + b + c + d = 2s$ લઈએ તો,

$c + d + a - b = 2s - 2b = 2\,(s-b)$

$c + d - a + b = 2s - 2a = 2\,(s-a)$

$a + b + c - d = 2s - 2d = 2\,(s-d)$

$a + b - c + d = 2s - 2c = 2\,(s-c)$

$$\therefore (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d) \quad \text{............. (7)}$$

જ્યાં, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$\therefore$ (6) અને (7) પરથી

$$16\, X^2 = 16\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d) - 16\, abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right)$$

$$\therefore X^2 = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right) \quad \text{............. (8)}$$

અહીં X એ ચતુષ્કોણ ABCDનું ક્ષેત્રફળ છે, s એ ચતુષ્કોણની અર્ધપરિમિતિ છે. B અને D ચતુષ્કોણના સામ સામેના ખૂણાના માપ છે. (B અને Dની જગ્યાએ A અને C હોય તો પણ ચાલે. કેમ ?)

આમ, ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓનાં માપ આપ્યા હોય અને સામસામેનાં બે ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો આપ્યો હોય તો સૂત્ર (8) થી ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાય.

આ સૂત્ર 1842માં બે ગણિતજ્ઞોએ સ્વતંત્ર રીતે સાબિત કર્યું હતું. એક હતા બ્રેશનેઇડર્સ (Carl Anton Bretschneiders) અને બીજા હતા વૉન સ્ટાઉડ્ટ (Karl Georg Von Staudt)

હવે ઇ.સ. 1842 થી પાછા જઈએ. ઇ.સ.628 આસપાસના સમયે ભારતીય ગણિતજ્ઞ અને ખગોળવિદ બ્રહ્મગુપ્તએ ચક્રીય ચતુષ્કોમ માટે ક્ષેત્રફળનું સૂત્ર મેળવેલું.

ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 180^0 હોય તેથી B+D = 180 મૂકતાં,

$\frac{B+D}{2} = 90$. તેથી $\cos^2 = \frac{B+D}{2} = \cos^2 90^o = 0$

તેથી $X^2 = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)$

તેથી $X = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$, જ્યાં $2s = a + b + c + d$ .... (8)

આ છે બ્રહ્મગુપ્તનું સૂત્ર.

હવે ઇતિહાસમાં આજથી આશરે 2000 વર્ષ પાછળ જઈએ.

ચતુષ્કોણ ABCD ચક્રીય છે. જો A અને D એકાકાર થઈ જાય તો DA = d = 0 થાય અને ચતુષ્કોણ ABCD એ ΔABC બની જાય (વળી ત્રિકોણ માટે તો પરિવૃત્ત હંમેશાં મળે જ !).

અને $\frac{a+b+c+d}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ (કારણ : $d = 0$)

ત્રિકોણ ABCનાં પ્રચલિત સંકેતો BC = a, CA = b અને AB = c લખીએ. બ્રહ્મગુપ્તના સૂત્રમાંથી હેરોનું સૂત્ર મળે. 'હેરો' નામ અમે અત્યારે શાળામાં ચાલતા ધોરણ નવના પાઠ્યપુસ્તકમાંથી લીધું છે. કદાચ જૂનાં પાઠ્યપુસ્તકોમાં હીરોન કે હીરો પણ મળશે. અંગ્રેજી પાઠ્ય પુસ્તકોમાં (અને જુદી જુદી વેબસાઈટોમાં પણ) આ વ્યક્તિ બે નામે પ્રચલિત છે. (1) Heron of Alexandria (2) Hero of Alexandria.

હેરો ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી હતો. તે ઈજનેર પણ હતો. તેણે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ માટેનું સૂત્ર મેળવ્યું હતું જે શાળા કક્ષાએ આપણે શીખ્યા છીએ અને શીખવ્યું પણ છે. (કદાચ આ ધારણા ખોટી પણ હોય !)

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,   જ્યાં $s = \frac{a+b+c}{2}$

આપણે સૂત્ર (8) પરથી સૂત્ર (9) ની સાબિતી આપી. સૂત્ર 9 બ્રહ્મગુપ્તનું સૂત્ર છે. પણ અહીં જે રીતે આપણે આ સૂત્ર મેળવ્યું તે રીતે બ્રહ્મગુપ્તે સાબિતી નથી આપી. કોઈક સમયે બ્રહ્મગુપ્તતા બીજા પ્રચલિત પ્રમેયો સાથે તેણે આપેલી આ સૂત્રની સાબિતી આપીશું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ત્રણ રસપ્રદ ગણિત-પ્રશ્નો

1. $\sqrt{5} + 2$ નું ઘનમૂળ શોધો.

2. બે ધન અપૂર્ણાંકો એવાં પસંદ કરો જેનો ગુણાકાર 2 હોય. (જેમ કે $\frac{3}{4}$ અને $\frac{8}{3}$) પસંદ કરેલા અપૂર્ણાંકો પૈકી દરેકમાં 2 ઉમેરી સાંદુ રૂપ આપો. (ઉપરના ઉદાહરણમાં $\frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$ અને $\frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$). હવે બન્ને અપૂર્ણાંકોને તેમના છેદ ના લ.સા.અ. વડે ગુણો. ($\frac{11}{4}$ અને $\frac{11}{3}$ ને 12 વડે ગુણો, 33 અને 56 મળશે) મળતાં પૂર્ણાંકો પાયથાગોરીય ત્રિપુટીના બે ઘટકો થશે. આપણે પસંદ કરેલા ઉદાહરણમાં $33^2 + 56^2 = 65^2$. આમ 65 પાયથાગોરીય ત્રિપુટી (33, 56, 65) થશે. વ્યાપક રીતે પરિણામ સાબિત કરો.

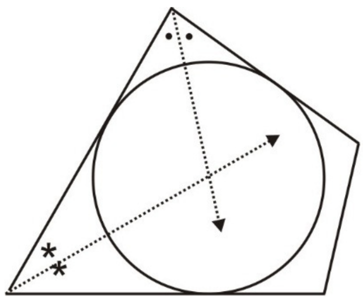
3. જો $x^2 - x + 1 = 0$ હોય તો $x^{2025} + \frac{1}{x^{2025}}$ ની કિંમત શોધો.

જાણીતાનું અજાણ્યું–8 : ચતુષ્કોણો સાથે સંકળાયેલાં વર્તુળો

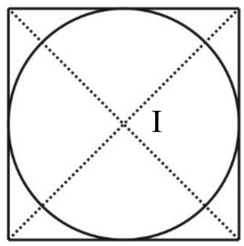
હેમાબેન વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર (M) 9409157840

ત્રિકોણો સાથે સંકળાયેલાં કેટલાંક વર્તુળો જોયાં. સ્વાભાવિક છે કે ચતુષ્કોણો સાથે સંકળાયેલાં વર્તુળોનો પણ વિચાર આવે. આમ તો ચતુષ્કોણમાં ત્રિકોણ કરતાં એક બાજુ અને એક શિરોબિંદુ વધારે. એટલે કદાચ તે કંઈક વધુ મેળવે પણ ખરું, કે કંઈક ગુમાવે પણ ખરું. ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 360^o, જે ત્રિકોણ કરતાં વધુ થયો; તેમજ તેને બે વિકર્ણો છે, જ્યારે ત્રિકોણને એકેય નથી. અંતઃવર્તુળ અને પરિવર્તુળ વિશે ચતુષ્કોણ માટે તરત કહી શકાય નહીં, જ્યારે ત્રિકોણમાં બંને મળે જ.

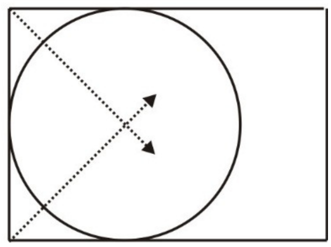
હવે અંતઃવર્તુળનું કેન્દ્ર, અંતઃકેન્દ્ર, બધી જ બાજુઓથી સરખા અંતરે હોવું જોઈએ, તેથી તે ચતુષ્કોણના દરેક ખૂણાના દ્વિભાજક પર એટલે કે તેમના છેદનબિંદુ પર હોવું જોઈએ, જે ન પણ બને ! (જુઓ આકૃતિ-1).



આકૃતિ-1



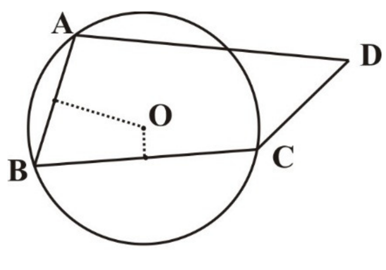
આકૃતિ-2



આકૃતિ-3

કેમ કે બે કોણદ્વિભાજકો, તો છેદે, એટલે ત્રણ બાજુઓને સ્પર્શતું વર્તુળ મળે. પરંતુ ચોથી બાજુને પણ સ્પર્શવા માટે ત્રીજો એક કોણદ્વિભાજક પણ આ જ છેદનબિંદુમાંથી પસાર થવો જોઈએ, અને તો તે બિંદુ અંતઃકેન્દ્ર થાય, અને અંતઃવર્તુળ મળે. આમ ન બને તો અંતઃવર્તુળ મળે નહીં. સ્પષ્ટ છે કે ત્રણ કોણદ્વિભાજકો સંગામી હોય, તો ચોથો પણ તે સંગમનબિંદુમાંથી પસાર થાય.

આમ ચતુષ્કોણના ત્રણ ખૂણાના દ્વિભાજક સંગામી થાય, તો અને તો જ અંતઃવર્તુળ મળે. આમ ત્રિકોણમાં બે કોણદ્વિભાજક લેવાથી અંતઃકેન્દ્ર મળી જાય, ત્રણની જરૂર નહીં. ચતુષ્કોણમાં ત્રણ લેવા પડે, ચારેયની જરૂર નહીં.



આકૃતિ-4

પરિવર્તુળમાં પણ શું આવું જ થાય? મળે, કે ન પણ મળે? પરિવર્તુળ માટે બધી બાજુઓના લંબદ્વિભાજક સંગામી હોય, તો જ આ સંગમનબિંદુ પરિકેન્દ્ર થાય અને પરિવર્તુળ મળે. આવું હંમેશા બને ? ત્રિકોણમાં તો બને જ, કારણ કે ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ અનન્ય વર્તુળ નિશ્ચિત કરે. ચાર હોય તો ? ન પણ મળે તે જોવું સહેલું છે. ચતુષ્કોણ ABCDનાં (આકૃતિ-4) શિરોબિંદુઓ A,B,C માંથી અનન્ય વર્તુળ પસાર થાય. હવે D તેની ઉપર ન હોય તો ? અલબત્ત, એવો પણ વિચાર આવે કે તો પછી ΔBCDનું પરિવર્તુળ લો.

તે કદાચAમાંથી પસાર થાય પણ ! જો તેમ થાય તો તે આપણે પહેલાં મેળવ્યું હતું તે જ વર્તુળ થાય, કારણ કે A,B,C તેની પર છે, અને તેવું વર્તુળ તો અનન્ય છે. તો શું ચતુષ્કોણને પરિવર્તુળ હોય જ નહીં ? હોય પણ. ચોરસ અને લંબચોરસ જોઈ જુઓ !

જો ચતુષ્કોણનાં ચારેય શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ મળે (પરિવર્તુળ), તો તે ચતુષ્કોણને ચક્રીય ચતુષ્કોણ કહેવાય છે. દેખીતું છે કે તેની ત્રણ બાજુઓના લંબદ્વિભાજકો સંગામી હોવા જોઈએ (ચોથો આપોઆપ સંગામી થશે).

ચક્રીય ચતુષ્કોણોનું અનેરું મહત્ત્વ છે. એક તો ચારેય શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર હોવાથી તેને વર્તુળના ગુણધર્મોનો લાભ મળે છે. બીજું, કે તેના પોતાના પણ વિશિષ્ટ ગુણધર્મો છે. ઉપરાંત, તેના ઘણા ઉપયોગો પણ છે.

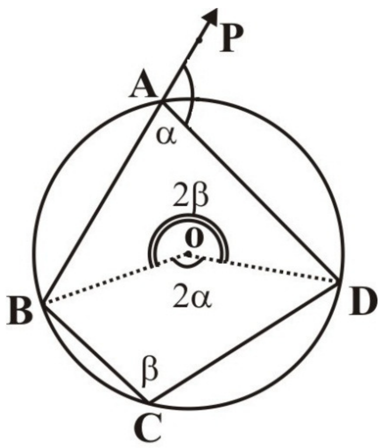
I. વર્તુળ આધારિત ગુણધર્મો :

1. ચતુષ્કોણની કોઈ પણ બાજુ બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓ આગળ સરખા (એકરૂપ) ખૂણાઓ બનાવે, તો અને તો જ, તે ચક્રીય છે.
2. ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના છેદબિંદુ આગળ પડતા ખંડોનો ગુણાકાર સરખો હોય, તો અને તો જ, તે ચક્રીય છે.
3. ચતુષ્કોણના ચારેય બાજુઓના લંબદ્વિભાજકો સંગામી હોય, તો અને તો જ, તે ચક્રીય છે.

II. ચક્રીય ચતુષ્કોણના પોતાના ગુણધર્મો :

1. સામસામેના ખૂણાઓ પૂરક હોય છે.

સાબિતી : ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDના પરિકેન્દ્રને O વડે તથા $\angle BAD$ અને $\angle BCD$ ના માપને α અને β વડે અનુક્રમે દર્શાવીએ (આકૃતિ-5)



આકૃતિ-5

$\Rightarrow$ $\angle BOD$ (Aની સામેના વૃત્તખંડમાં)= 2α અને $\angle BOD$ (Cની સામેના વૃત્તખંડમાં)= 2β .... (1)

$\Rightarrow$ $\angle A + \angle C = \alpha + \beta = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{2}(360^o)$ (1 પરથી)

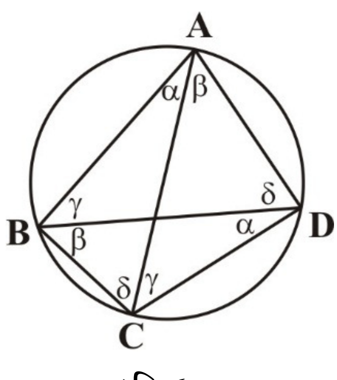
$\Rightarrow$ $\angle A$ અને $\angle C$ પૂરક છે. તેમજ

$\angle B + \angle D = (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) - (\angle A + \angle C) = 360^o - 180^o = 180^o$

$\Rightarrow$ $\angle B$ અને $\angle D$ પણ પૂરક છે.

જોવાની ખૂબી ત્યાં છે કે આવા સરળ પરિણામની સાબિતી પણ એટલી જ સરળ છે અને તે પણ એકથી વધુ અને તેટલી જ સરળ. તે પણ જોઈએ :

સાબિતી 2 : ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો AC અને BD ચારેય શિરોબિંદુઓ આગળના ખૂણાઓના બબ્બે ભાગ પાડશે. (આકૃતિ 6).



આકૃતિ-6

જો $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle ABD$ અને $\angle ADB$ નાં માપ અનુક્રમે α, β, λ અને δ હોય, તો $\angle CDB = \angle BAC = \alpha$

$\angle CBD = \angle CAD = \beta$

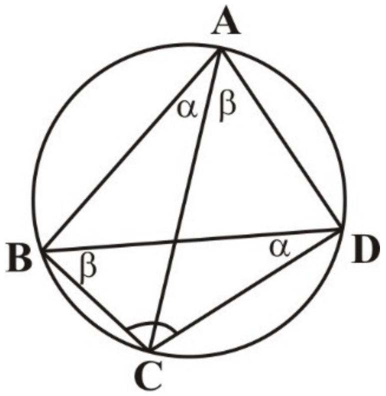
$\angle ACD = \angle ABD = \gamma$ અને

$\angle ACB = \angle ADB = \delta$ .... (2)

(કારણ : એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)

હવે, $\angle A + \angle C = (\alpha + \beta) + (\lambda + \delta) = \frac{1}{2}\ (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180^o$ અને તેથી $\angle B + \angle D = 180^o$

સાબિતી 3 : આગળ પ્રમાણે $\angle BAC = \alpha$ અને $\angle CAD = \beta$ કહીએ, તો $\angle BDC = \alpha$ અને $\angle CBD = \beta$ થશે (આકૃતિ-7 જૂઓ)



આકૃતિ-7

અહીં $\angle A + \angle C = (\alpha + \beta) + \angle C$

$= \angle BDC + \angle CBD + \angle C = 180^o$

(ΔBDC ના ખૂણાઓનો સરવાળો)

તેથી $\angle B + \angle D = 180^o$

નોંધી શકીએ કે આ બધી સાબિતીઓ આમ તો સરખી જ છે, જરાક આમ તેમ કરેલ છે અને બીજું આપણે જોયું કે ચોરસ અને લંબચોરસ ચક્રીય છે. હવે તે તરત જ દેખાય. એટલું જ નહીં, પણ સમદ્વિભૂજ સમલંબ ચતુષ્કોણ () પણ ચક્રીય છે !

2. ચક્રીય ચતુષ્કોણનો બહિષ્કોણ અંદરના સામેના ખૂણા જેટલો થાય.

સાબિતી : બાજુ BAને લંબાવીને, તેની ઉપર બિંદુ P લેતાં, ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDનો એક બહિષ્કોણ $\angle DAP$ મળશે. (આકૃતિ-5)

$\therefore$ બહિષ્કોણ $\angle DAP = 180 - \alpha$ (પૂરક ખૂણાઓ)

$= \beta$ (કારણ : $\alpha + \beta = 180^o$)

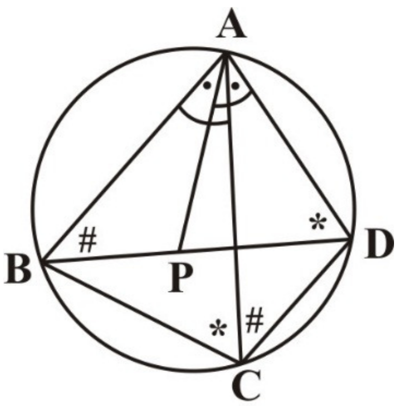
$= \angle BCD$

= અંદરનો સામેનો ખૂણો.

3. **ટોલેમીનું (Ptolemy's) પ્રમેય –** ચક્રીય ચતુષ્કોણનો આ એક ખૂબ અગત્યનો ગુણધર્મ છે.

પ્રમેય : ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓના ગુણાકારનો સરવાળો તેના વિકર્ણોના ગુણાકાર જેટલો થાય.

સાબિતી : ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. વિકર્ણ AC $\angle A$ ના બે ભાગ પાડશે. તેમાંથી નાનો ખૂણો (અહીં $\angle CAD$) લો. (આકૃતિ 8)



આકૃતિ-8

$P \in \overline{BD}$ લો જેથી $\angle BAP = \angle CAD$

$\therefore \Delta ABP \sim \Delta ACD$ (AAA વડે : અનુરૂપ ખૂણાઓ રચના વડે, તેમજ બાજુઓ વડે પરિવર્તુળ પર આંતરેલા ખૂણાઓ હોવાથી એકરૂપ છે.)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD} = \left(\frac{AP}{AD}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

તે જ પ્રમાણે, $\Delta ABC \sim \Delta APD \Rightarrow \left(\frac{AB}{AP}\right) = \frac{BC}{PD} = \frac{AC}{AD}$ .... (2)

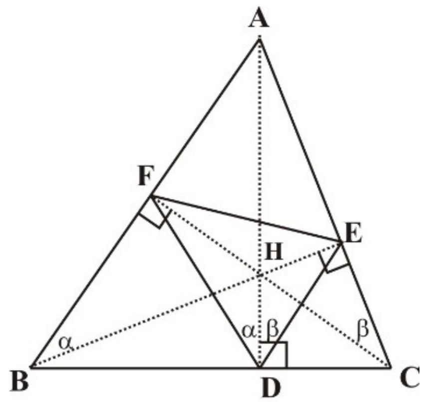
$\therefore$ (1) અને (2) પરથી,

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BP + AC \cdot PD = AC\,(BP + PD)$$
$$= AC \cdot BD$$

III. ચક્રીય ચતુષ્કોણના ઉપયોગો :

ઘણીવાર સાબિતીમાં ચક્રીય ચતુષ્કોણ, એ ખૂબ સરળ અને ઉપયોગી સાધન બની રહે છે. એક-બે ઉપયોગ જોઈએ.

1. **પરિણામ :** કોઈપણ ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર તેના પદિક ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર છે.



આકૃતિ-9

પક્ષ : ΔABC માં AD, BE, CF વેધ છે, તથા H લંબકેન્દ્ર છે.

સાધ્ય : H એ ΔDEFનું અંતઃકેન્દ્ર છે.

સાબિતી : BDHF માં $\angle D + \angle F = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ BDHF ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

$\Rightarrow \angle FBH = \angle FDH = \alpha$ ધારો .... (i)

તે જ પ્રમાણે CEHD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

$\Rightarrow \angle HDE = \angle HCE = \beta$ ધારો.

પરંતુ, $\alpha = \angle EBA = 90^\circ - \angle A$ (ΔABE માંથી)

$= \angle FCE$ (ΔACF માંથી)

$= \beta$ .... (ii)

$\Rightarrow \angle FDH = \angle HDE$ ((i), (ii) પરથી)

$\Rightarrow$ AD એ $\angle FDE$ ને દુભાગે છે.

એ જ પ્રમાણે, BE, CF એ ΔDEF ના બીજા બે ખૂણાને દુભાગશે.

$\Rightarrow$ H, એ ΔDEF નું અંતઃકેન્દ્ર છે.

2. પરિણામ : કોઈપણ ત્રિકોણના પરિવર્તુળ પરના કોઈપણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણની બાજુઓ પર દોરેલા લંબના લંબપાદ સમરેખ થાય.

આ પરિણામને સિમ્સનનું પ્રમેય કહે છે. આપણે આ લેખમાળાની સાતમી કડીમાં તેની વિગતવાર સાબિતી જોઈ છે, એટલે તેનું અહીં પુનરાવર્તન નહીં કરીએ. પણ તેમાં કરેલી નોંધનું, પુનરાવર્તન થાય તો પણ, નોંધીએ કે આ પ્રમેયની સાબિતીમાં માત્ર ચક્રીય ચતુષ્કોણો અને તેના બે ગુણધર્મો જ વાપર્યા છે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ગાણિતિક રમતો :
'પૂરક'ની કરામત

પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784, vyaspk123@gmail.com

સમાજવિદ્યાના શિક્ષક આજે ગેરહાજર છે. તેમની અવેજીમાં ગણિત શિક્ષક ઉમેશભાઈ ધોરણ 10ના વર્ગમાં દાખલ થયા. જ્યારે જ્યારે ઉમેશભાઈ કોઈ અન્ય શિક્ષકની અવેજીમાં આવે ત્યારે વિદ્યાર્થીઓ ખુશ થઈ જાય છે. તેઓ ગણિતનો અભ્યાસક્રમ આગળ ચલાવતા જ નથી. તેમનું પહેલું વાક્ય, "ચાલો, ચોપડી બંધ કરી દો, નોટબુક અને પેન તૈયાર રાખો. આજે એક રમત રમવાની છે." આજે તેમને આ સૂચના આપવાની જરૂર જ ન પડી. વિદ્યાર્થીઓ તૈયાર જ હતા.

તેમણે ખિસ્સામાંથી એક પાસો કાઢ્યો. એક વિદ્યાર્થીને પાસો આપી પૂછ્યું, 'આ શું છે ?' વિદ્યાર્થી જવાબ આપે તે પહેલાં તો વર્ગના ઘણા વિદ્યાર્થીઓ બોલી ઊઠ્યા, "સર, આ તો 'સરપ સીડી'નો પાસો છે." ઉમેશભાઈએ કહ્યું, 'હા, આ પાસો જ છે. આપણે 'સરપ સીડી' નથી રમવાનું, પણ પાસાની રમત રમવાની છે. તમે બધા 'સરપ સીડી' રમ્યા છો, એટલે જાણો જ છો કે પાસાનાં છ પડખાંઓ પર છ પૂર્ણાંકો 1, 2, 3, 4, 5, 6 દર્શાવતાં ટપકાંઓ કરેલાં હોય છે." આમ કહી તેમણે પોતાના ખિસ્સામાંથી બીજો એક પાસો કાઢ્યો. 'જૂઓ, આ પાસાનાં સામસામેનાં પડખાંઓની ત્રણ જોડ છે. આમાંની કોઈ પણ જોડ પરનાં બે પડખાં પર અંકિત કરેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.' આમ કહી પોતાના ખિસ્સામાંથી ઉમેશભાઈએ ત્રીજો પાસો કાઢી એક વિદ્યાર્થીને આપ્યો અને પોતાના હાથમાંનો પાસો ત્રીજા વિદ્યાર્થીનો આપ્યો, "તમે ત્રણે જણા કહો કે આ સરવાળો કેટલો આવે છે." વર્ગના ઘણાં વિદ્યાર્થીઓ – જેમની પાસે પાસો નહોતો તેવાં પણ – બોલી ઊઠ્યાં, "સર, સરવાળો સાત આવશે." પેલા ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ, જેમના હાથમાં પાસો હતો તે પણ બોલ્યા, 'હા સર, પાસાનાં સામસામેનાં પડખાંની ત્રણ જોડ પૈકી દરેક જોડનાં પડખાંઓ પર લખેલાં ટપકાંઓનો સરવાળો સાત છે.'

'આવો પાસો - 'પ્રમાણિત પાસો' - કહેવાય છે. પ્રમાણિત પાસા પર લખેલા અંકોનો એક ગુણધર્મ તમે જોયો – પાસાના સામસામેના પડખાં પર લખેલા અંકોનો સરવાળો 7 થાય. પાસો પ્રમાણિત બનાવવા માટે અંકો કેવી રીતે લખવા તે પછી ક્યારેક જોઈશું. પ્રમાણિત પાસાઓની બીજી પણ રમતો છે, પણ આજે તે વિશે વાત નથી કરવી.'

'હવે આપણે રમત શરૂ કરીએ.' ઉમેશભાઈએ પેલા ત્રણ વિદ્યાર્થીઓને પોતપોતાના પાસા પરનો એક અંક પસંદ કરવાનું કહ્યું. એક વિદ્યાર્થીએ પસંદ કરેલો અંક 2 હતો. બીજાએ પસંદ કરેલો અંક 1 હતો, ત્રીજાએ પસંદ કરેલો અંક 6 હતો. આ અંકો ઉમેશભાઈએ બોર્ડ પર લખ્યા : 1, 2, 6.

'આપણી રમત હવે શરૂ થાય છે.' પસંદ કરેલા ત્રણ અંકોનો ઉપયોગ કરી ઉમેશભાઈએ ત્રણ અંકોની છ સંખ્યાઓ બોર્ડ પર લખી : 126, 162, 216, 261, 612, 621.

'તમે બધાં આવી કોઈ એક ત્રણ અંકની સંખ્યા તમારી નોટબુકમાં લખો. જરૂરી નથી કે તમારે 1, 2 અને 6 જ પસંદ કરવાં. એવું પણ જરૂરી નથી કે તમારે ત્રણે ત્રણ અંક જુદા જુદા પસંદ કરવાં. તમે પસંદ કરેલા ત્રણે અંકો સમાન હોય અથવા ત્રણમાંથી બે અંકો સમાન હોય તો પણ ચાલે. યાદ રાખો કે તમે પસંદ કરેલા અંકો પાસા પરના અંકો છે. તેથી 1 થી 6 સુધીના અંકોમાંથી જ ત્રણ અંક પસંદ કરીને ત્રણ અંકોની સંખ્યા લખવાની છે.'

'લખી લીધી ?', ઉમેશભાઈએ પૂછ્યું. સામુહિક જવાબ મળ્યો, 'હા, સર.'

'હવે, તમારી લખેલી ત્રણ અંકની સંખ્યાની જમણીબાજુએ બીજા ત્રણ અંકો લખી તમારે છ અંકોની સંખ્યા લખવાની છે. કયા ત્રણ અંક લખવાના છે તે માટેની રીત હું તમને એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજાવું છું. તમે નોટબુક-પેન બંધ કરી બોર્ડ પર ધ્યાન આપો.'

સાહેબે ઉપર 1, 2 અને 6નો ઉપયોગ કરી બનાવેલી ત્રણ અંકોની એક સંખ્યા : 126 લખી.

હવે એક વિદ્યાર્થીને ઉભો કરી તેને પૂછ્યું, 'પાસા પર જે પડખાં પર 1 લખ્યો છે, તેની સામેના પડખાં પર કયો અંક હશે?'

વિદ્યાર્થીએ જવાબ આપ્યો : 6

તે જ વિદ્યાર્થીને પૂછ્યું, 'જ્યાં 2 લખેલ છે તેની સામે કયો અંક હશે ?' વિદ્યાર્થીએ તરત જ જવાબ આપ્યો : 5

છેલ્લો પ્રશ્ન, '6 ની સામે કયો અંક હશે?"

"સર, એ તો સહેલું છે જેમ 1 ની સામે 6 તેમ 6 ની સામે 1" – વિદ્યાર્થીએ ઉત્તર આપ્યો.

"સરસ, હવે જૂઓ, આ ત્રણ નવા અંકો મેળવ્યા એ તે જ ક્રમમાં આપણી ધારેલ સંખ્યાની જમણી બાજુએ લખી આપણે છ અંકની સંખ્યા લખીએ."

ઉમેશભાઇએ સંખ્યા લખી – 126651.

'ચાલો, ઉપરની રીતે ફટાફટ લખી તમે તમારી ધારેલી ત્રણ અંકની સંખ્યા પરથી છ અંકની સંખ્યા બનાવો.' – આમ કહી ઉમેશભાઇ વર્ગમાં પહેલી બેંચથી છેલ્લી બેંચ સુધી લટાર મારવા નીકળી પડ્યા. દસ મિનિટ પછી પાછા આવી બોલ્યા –

'બધાંએ છ અંકની સંખ્યા લખી નાખી ?' – જવાબ મળ્યો, 'હા, સર.'

'હવે આપણો તાસ દસ મિનિટમાં પૂરો થાય છે. માટે જરા ઝડપ કરો. તમારામાંથી સૌથી વધુ ઝડપે ભાગાકાર કોણ કરી શકશે?' ચાર-પાંચ વિદ્યાર્થીઓએ આંગળી ઊંચી કરી. તેમાંના એક વિદ્યાર્થીને તેમણે પૂછ્યું (આ વિદ્યાર્થી ગણિતમાં સૌથી વધુ ગુણ મેળવતો હતો) – 'તેં લખેલી સંખ્યા 3 વડે નિશેષ ભાગી શકાય છે ?' 30 સેકંડમાં વિદ્યાર્થીએ જવાબ આપ્યો,

'હા, સર, બધાં છ અંકોનો સરવાળો 21 થાય છે.'

"તારી સંખ્યાને 37 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય?"

આ પ્રશ્ન સાંભળી વિદ્યાર્થી ગભરાયો. ઉમેશભાઇ એની મૂંઝવણ સમજી ગયા. બોલ્યા, 'ચાલ, 37 ને મૂક પડતી. તારી સંખ્યાને 111 વડે ભાગી નાખ. 111 વડે ભાગાકાર કરવો સહેલો છે, $111 \times 1 = 111$, $111 \times 2 = 222$, … $111 \times 5 = 555$… વગેરે.'

વિદ્યાર્થીએ બે મિનિટમાં જવાબ આપ્યો, "સર, ભાગાકાર થઈ ગયો."

'ચાલ, મને ભાગફળ લખાવ, શેષ કેટલી વધી ?'

'સર, શેષ વધી શૂન્ય અને ભાગાકાર મળ્યો : 2086'

ઉમેશભાઈ તમામ વિદ્યાર્થીઓને સંબોધીને બોલ્યા, 'તમે તમારી પોતાની, છ અંકોની સંખ્યાને 111 વડે ભાગી જૂઓ. શેષ શૂન્ય મળે છે? પણ હાલ નહિ, હું વર્ગમાંથી બહાર નીકળું પછી.' પેલા વિદ્યાર્થી તરફ ફરીને કહ્યું, 'તારા ભાગફળ 2086માંથી 7 બાદ કર'

'સર, 2079'

'હવે 2079નો 9 વડે ભાગાકાર કર'

ભાગાકાર સહેલો હતો. વિદ્યાર્થીને છેવટે 231 મળ્યા હતા.

હવે ઉમેશભાઇ ઉતાવળમાં હતા. તાસનો સમય પૂરો થવા આવ્યો હતો. છેલ્લું એક વાક્ય બોલ્યા,

'તેં ત્રણ અંકની જે સંખ્યા લઇ ગણતરીની શરૂઆત કરી તે સંખ્યા તારી નોટમાં લખી છે તે જો,' આ સંખ્યા 231 જ હતી.

"સર, સર, સર, પેલા 37નું શું થયું, 37, પડતાં મૂકી સીધા કેમ 111 પર ગયા ?" – પેલો હોશિયાર વિદ્યાર્થી પૂછ્યા વગર ન રહી શક્યો.

‘3 અને 37નો ગુણાકાર કર, તને ઉત્તર મળી જશે.’

‘આવતી કાલે ગણિતનો તાસ આવશે અને ત્યાર પછીનો તાસ પણ મારે જ લેવાનો છે. તે વખતે આપણે આ રમતનું રહસ્ય શું છે તે સમજીશું.’ – આટલું કહી ઉમેશભાઈ વર્ગ છોડી જતા રહ્યા.

પણ આપણે ઉમેશભાઈની રાહ નથી જોવી.

આપણે આ રમતનું વિશ્લેષણ આજે જ કરવું છે.

હેલન એ. મેરીલ (Helen Abbot Merril) લિખિત પુસ્તિકા ‘Mathematical Excursions’ અમારી પાસે છે. શાળા કક્ષાના અભ્યાસક્રમોમાં ન હોય તેમ છતાં પ્રાથમિક, માધ્યમિક કે ઉચ્ચતર માધ્યમિક કક્ષાના વિદ્યાર્થીઓ પણ સમજી શકે તેવી સરળ અને રસિક શૈલીમાં ઘણા બધા ગાણિતિક મુદ્દાઓની ચર્ચા આ પુસ્તિકામાં છે. આ પુસ્તિકાનાં એક પાનાનાં અર્ધા ભાગમાં આપેલી ગાણિતિક રમત અમે અહીં રજુ કરી છે. સાબિતી કે અન્ય કોઈ વિશ્લેષણ પુસ્તિકામાં નથી.

હવે રમત પર પાછા આવીએ. શરૂઆતમાં આપણે 1 થી 6 સુધીના પૂર્ણાંકોમાંથી ત્રણ પસંદ કરી ત્રણ અંકની એક સંખ્યા લખીએ છીએ. ધારો કે આ સંખ્યા $(abc) = 100a + 10b + c$ છે.

હવે એક વ્યાખ્યા લઈએ : **જે બે ધનપૂર્ણાંકોનો સરવાળો 7 હોય તે ધનપૂર્ણાંકો 7ના સંદર્ભમાં એકબીજાના ‘પૂરક’ કહેવાય.**

1 અને 6, 2 અને 5, 3 અને 4 એ 7ના સંદર્ભમાં એક બીજાની **પૂરક** સંખ્યાઓ છે.

હવે સંખ્યા $abc = 100a + 10b + c$ પર આવીએ. આપણે abcની જમણી બાજુએ અનુક્રમે ત્રણ અંકો d,e,f લખીને છ અંકોની સંખ્યા બનાવવી છે, જ્યાં d,e,f એ અનુક્રમે a,b,c ની 7ના સંદર્ભમાં પૂરક સંખ્યાઓ છે.

આમ છ અંકની સંખ્યા $abcdef$ થશે,

જ્યાં, $a + d = b + e = c + f = 7$ એટલે કે $d = 7 - a,\ e = 7 - b,\ f = 7 - c.$

$$abcdef = (abc) \times 10^3 + def$$
$$= abc\ (10^3 - 1) + abc + def$$

યાદ રહે કે $abc = 100a + 10b + c$ અને

$def = 100d + 10e + f$ છે.

આમ, $abcdef = (abc) \times 999 + 100a + 10b + c + 100d + 10e + f$

$$\therefore\ abcdef = (abc) \times 999 + 100\ (a+d) + 10\ (b+e) + (c+f)$$
$$= (abc) \times 999 + 700 + 70 + 7 \qquad (\text{કારણ} : a + d = b + e = c + f = 7)$$
$$= (abc) \times 999 + 777$$

આમ, $abcdef = 111\ [\ (abc) \cdot 9 + 7]$

આમ છ અંકની સંખ્યા $abcdef$ એ 111 વડે નિશેષ ભાજ્ય છે તે સાબિત થયું.

$111 = 37 \times 3$, તેથી $abcdef$ 3 વડે અને 37 વડે નિશેષ ભાજ્ય છે.

હવે, $abcdef$ ને 111 વડે ભાગતાં શેષ શૂન્ય મળી અને ભાગફળ : $(abc) \cdot 9 + 7$ મળ્યું. આ ભાગફળમાંથી 7 બાદ કરતાં $(abc) \cdot 9$ મળશે, જે 9 વડે નિશેષ ભાજ્ય છે. છેલ્લે $[\ (abc) \cdot 9] \div 9 = abc$ મળશે. આમ ત્રણ અંકોની જે સંખ્યાથી રમતની શરૂઆત કરી તે જ સંખ્યા પાછી મળી ગઈ !

અહીં કેટલાક પ્રશ્નો ઊભા થાય છે, અમે એ પ્રશ્નો સાથે તેના ઉત્તરો પણ અમારી આપ્યા છે.

(1) અહીં પ્રમાણિત પાસાનું શું મહત્વ ?

અમારી દૃષ્ટિએ સાવ નજીવું – માત્ર એટલું જ કે પ્રમાણિત પાસાના સામસામેના ફલકો પરના અંકોનો સરવાળો 7 થાય છે તે ગુણધર્મનો ઉપયોગ થયો છે. પાસાને વચ્ચે લાવ્યા વિના પણ પ્રશ્ન રજુ કરી શકાયો હોત.

(2) 7નું શું મહત્વ ?

આ રમત વાંચ્યા પછી, તેની સાબિતી આપ્યા પછી, અમારા ધ્યાન પર આવ્યું કે અહીં ત્રણ અંકોની સંખ્યા ધાર્યા પછી સંખ્યાના અંકોની 7ના સંદર્ભમાં પૂરક સંખ્યાઓ લીધી છે. આમ ન કરતાં બીજી કોઈ, 10 કે તેથી નાની, સંખ્યાના સંદર્ભમાં પૂરક સંખ્યાઓ લઈ રમત બનાવી શકાય. નીચે ઉદાહરણ આપ્યું છે.

'427' ના અંકો 4, 2 અને 7ની 10ના સંદર્ભમાં પૂરક સંખ્યાઓ અનુક્રમે 6, 8 અને 3 છે. આ અંકોને તેજ ક્રમમાં 427 ની જમણી બાજુએ લખીએ તો છ અંકની સંખ્યા : 427683 મળે. આ સંખ્યા 3 અને 37 વડે વિભાજ્ય છે. $3 \times 37 = 111$ વડે 427683 ને ભાગતાં ભાગફળ 3853 મળે છે.

હવે, અગાઉની રમતમાં આપણે ભાગફળમાંથી 7 બાદ કરતા હતા કારણ કે આપણે 7ના સંદર્ભમાં પૂરક સંખ્યાઓ લખતા હતા. આ ઉદાહરણમાં આપણે 10ના સંદર્ભમાં 'પૂરકો' લીધાં છે. તેથી આપણે મેળવેલા ભાગફળ 3853માંથી 10 બાદ કરવાના છે. ત્યારબાદ મળતી સંખ્યા $3853-10 = 3843$ મળે છે. સ્પષ્ટ છે કે 3843 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.

$3843 \div 9 = 427$ મળે છે. આપણે આ જ સંખ્યાથી રમતની શરૂઆત કરી હતી.

વ્યાપક સ્વરૂપે, ધારો કે abc એ ત્રણ અંકોની સંખ્યા છે.

ધારો કે ધનપૂર્ણાંકો d, e, f માટે, $a + d = b + e = c + f = p \le 10$, તો d, e, f એ p ના સંદર્ભમાં અનુક્રમે a,b,c ની પૂરક સંખ્યાઓ છે.

છ અંકોની સંખ્યા $abcdef$ માટે નીચેના પરિણામો સાબિત કરી શકાય.

(i) $abcdef$ એ 3 અને 37 વડે વિભાજ્ય છે.

(ii) $[(abcdef \div 111) - p] \div 9 = abc$

ચાલો સાબિત કરીએ,

$$\begin{aligned}
abcdef &= (abc) \times 10^3 + def \\
&= (abc)\,(10^3-1) + abc + def \\
&= abc \times 999 + 100\,(a+d) + 10\,(b+e) + (c+f) \\
&= 999 \times abc + 100p + 10p + p \qquad (\text{કારણ : } a + d = b + e = c + f = p) \\
&= 999 \times abc + 111p = 111\,(9 \times abc + p)
\end{aligned}$$

આમ (i) $abcdef$ એ 111 વડે વિભાજ્ય છે. પણ $111 = 3 \times 37$. તેથી $abcdef$ એ 3 અને 37 વડે વિભાજ્ય છે.

(ii) $abcdef$ ને 111 વડે ભાગતાં મળતું ભાગફળ : $9 \times abc + p$ છે. એમાંથી p બાદ કરતાં મળતી સંખ્યા $9 \times abc$ છે. તેને 9 વડે ભાગતાં આપણને abc મળે છે,

$[(abcdef \div 111) - p] \div 9 = abc$

આમ, ત્રણ અંકની જે સંખ્યાથી શરૂઆત કરી હતી તે જ સંખ્યા પાછી મળી ગઈ.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ :

ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા - લાર્સ એહ્‌લફોર્સ (Lars Ahlfors)

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, VNSGU, સુરત. (M) 99742 30088

'મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ' લેખશ્રેણી હેઠળ આપણે છેલ્લા કેટલાક 'સુગણિતમ્'ના અંકોમાં એવા ગણિતજ્ઞોનાં જીવન અને કાર્યો વિશે માહિતી મેળવી જેઓને તેમનાં ઉત્કૃષ્ટ ગાણિતિક સંશોધનો માટે ફિલ્ડ્સ મેડલ અથવા આબેલ પ્રાઈઝથી સન્માનિત કરવામાં આવ્યા હોય. આ વખતે આપણે આ લેખશ્રેણી હેઠળ ફિલ્ડ્સ મેડલના પ્રથમ પ્રાપ્તકર્તાઓમાંના એક એવા લાર્સ એહ્‌લફોર્સ (Lars Ahlfors)નાં જીવન અને કાર્યોને વિસ્તારથી જાણીશું.

લાર્સ વેલેરીયલ એહ્‌લફોર્સનો જન્મ 18 એપ્રિલ 1907ના રોજ ફિનલેન્ડના હેલ્સિંકી શહેરમાં થયો હતો. તેમની માતા સિવે હેલેન્ડર, તેમના જન્મ સમયે મૃત્યુ પામી હતી. તેમના પિતા, કાર્લ એક્સેલ મોરિટ્ઝ એહ્‌લફોર્સ પોલિટેકનિક ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં મિકેનિકલ એન્જિનિયરિંગના પ્રોફેસર હતા. લાર્સને બે મોટી બહેનો હતી, ઔને અને ઇસા. લાર્સના જીવનનાં પ્રથમ ત્રણ વર્ષ સુધી તેમની દેખરેખ એલેન્ડ ટાપુઓ પર તેમની બે આંટીઓ દ્વારા કરવામાં આવી હતી.

લાર્સના મતે તેઓ ગણિત વિષયમાં કોઈપણ રીતે પ્રતિભાવાન બાળક 'Child Prodigy' ન હતા. તે ગણિત વિષય શું છે તે સમજ્યા વગર તેના પ્રત્યે આકર્ષિત થયા હતા. તેમના ઉચ્ચતર ભણતરમાં ગણિતનો સમાવેશ હતો, પરંતુ તેમાં Calculus શીખવવામાં આવતું નહોતું. તેમ છતાં તેમના પિતાની ઇજનેરી લાઇબ્રેરીની ગુપ્ત મુલાકાતોને કારણે પ્રથમ ગણિત અને ત્યારબાદ ખાસ કરીને Calculus તેઓ જાતે જ શીખવામાં સફળ રહ્યા.

લાર્સને નાનપણથી જ રમતગમતમાં રસ ન હતો. તેથી તેઓ શાળાના દિવસોમાં ખુશ રહેતા અને રવિવાર તથા વેકેશનને નફરત કરતા. શાળાના ભણતરમાં પણ તેમને ઇતિહાસ વિષય પસંદ ન હતો. તેમને થતું કે વિવિધ ઘટનાઓ અને તેની સાથે સંકળાયેલ વર્ષોને યાદ રાખવાનો શું મતલબ છે? એના કરતા તો વ્યક્તિ તે શક્તિ ટેલિફોન નંબર યાદ રાખવામાં વાપરી શકે. આ જ કારણે તેમના ઇતિહાસના શિક્ષક તેમને પસંદ નહોતા.

શરૂઆતમાં લાર્સના પિતા તેમને ઇજનેર બનાવવા ઇચ્છતા હતા, પરંતુ લાર્સનો ગણિત પ્રત્યેનો શોખ અને યંત્રો સાથે કાર્ય કરવાની અસમર્થતાને કારણે તેમના પિતાએ તેમને ગણિતના પ્રોફેસર બનવા જણાવ્યું. લાર્સએ 17 વર્ષની ઉંમરે 1924માં University of Helsinkiમાં પ્રવેશ મેળવ્યો, જ્યાં તેઓ અર્ન્સ્ટ લિન્ડેલોફ અને રોલ્ફ નેવનલિન્ના જેવા મહાન ગણિતશાસ્ત્રીઓ પાસે ભણ્યા તથા 1928માં Candidate's degree સાથે સ્નાતક થયા.

1928માં લાર્સ નેવનલિન્ના સાથે ઝ્યુરિચ ગયા જ્યાં નેવનલિન્નાને તેમણે સંશોધન સ્તર પર ગણિતની વાત કરતા સાંભળ્યા. લાર્સના મતે આ ગણિત સાથે તેમની ખરી મુલાકાત હતી. નેવનલિન્નાએ ત્યાં Denjoy's Conjecture વિશે વાત કરી, જે 21 વર્ષ જૂનું અનુમાન હતું. લાર્સે આ અનુમાનનો ઉકેલ શોધી કાઢ્યો, જેના કારણે તેમને આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તર પર ગણિત જગતમાં નામના મળી.

ઝ્યુરિચ પછી લાર્સ ત્રણ મહિના માટે નેવનલિન્ના સાથે પેરિસ ગયા, જ્યાં તેમનો મેળાપ આર્નોડ ડેન્જોય સાથે થયો, જેમણે Denjoy's Conjecture આપ્યું હતું. આર્નોડએ લાર્સને જણાવ્યું કે '21' હવે તેમનો પ્રિય નંબર બની ગયો છે, કારણ કે તેમનું Conjecture તેમણે બનાવ્યાના 21 વર્ષ પછી એક 21 વર્ષના ગણિતશાસ્ત્રી દ્વારા ઉકેલવામાં આવ્યું હતું. 1930માં લાર્સે Denjoy's Conjecture નો ઉકેલ આપી પોતાની ડોક્ટરલ થીસીસ રજૂ કરી.

1930 થી 1932માં લાર્સે રોકફેલર ફાઉન્ડેશન અને અન્ય યુરોપીયન કેન્દ્રોની ફેલોશિપ દ્વારા સમર્પિત પેરિસની ઘણી મુલાકાતો લીધી. 1933માં તેમણે University of Helsinkiમાં સહાયક પ્રોફેસરનું પદ સંભાળ્યું. આ જ વર્ષે તેમણે એર્ના માર્યા

લિઝબેથ લેહનર્ટ સાથે લગ્ન કર્યા.

1935માં ત્રણ વર્ષ માટે Harvard Universityમાં કામ કર્યા બાદ 1938માં તેઓ University of Helsinkiમાં પ્રોફેસર તરીકે જોડાયા.

1936માં તેઓ ઓસ્લોની ઈન્ટરનેશનલ કોંગ્રેસમાં ફિલ્ડ્સ મેડલ મેળવનારા પ્રથમ બેમાંથી એક પ્રાપ્તકર્તા હતા. લાર્સનું સંશોધન પત્ર, Zur Theorie der Überlarger-Ungsflächen, તેમને ફિલ્ડ્સ મેડલ જીતાડવા માટેનું મુખ્ય કારણ હતું, કહેવાય છે કે આ પત્રના કારણે Metric Topologyનો ઉદય થયો અને આ જ પત્રમાં 'quasiconformal mapping' શબ્દ પ્રથમ વખત ઉલ્લેખાયો. ફિલ્ડ્સ મેડલની અધિકૃત વેબસાઈટ મુજબ : "Lars Valerian Ahlfors was awarded medal for research on convering surfaces related to Riemann surfaces of inverse functions of entire and meromorphic functions opened up a new field of analysis."

1944માં તેમને Swiss Federal Institute of Technologyમાં હોદ્દાની ઓફર કરવામાં આવી હતી, જે તેમણે માર્ચ 1945માં સ્વીકારી. પરંતુ સ્વિટ્ઝર્લેન્ડમાં સમય પસાર કરવું તેમને પસંદ પડ્યું નહિ, તેથી 1945માં તેઓ Harvard પાછા ફર્યા જ્યાં તેઓ 1977માં તેમની નિવૃત્તિ સુધી રહ્યા. Harvardમાં નિમણૂક લીધાના બે વર્ષ પછી તેઓ ત્યાં ગણિત વિભાગના અધ્યક્ષ તરીકે ચૂંટાયા. 1964માં તેઓ William Casper Graustain Professor of Mathematics તરીકે નિયુક્ત થયા.

ગણિતમાં તેમના ઉત્કૃષ્ટ યોગદાન માટે લાર્સને ઘણા સન્માન મળ્યા છે. 1968માં લાર્સને Wihuri International Prize એનાયત કરવામાં આવ્યું. અહીં નોંધ લેવાઈ કે આ ઇનામના પ્રથમ પ્રાપ્તકર્તા લાર્સના માર્ગદર્શક રોલ્ફ નેવનલિન્ના હતા. 1981માં લાર્સને Wolf Prizeથી સન્માનિત કરવામાં આવ્યા. તેમને 1953માં Boston University, 1970માં Abc Adadeni, 1977માં University of Zurich અને 1978માં University of Londonમાંથી honorary degree આપવામાં આવી.

લાર્સે ઘણા નોંધપાત્ર પુસ્તકો લખ્યાં છે. તેમનું પુસ્તક 'Complex Analysis' (1953) એ આ વિષય પરનું ઉત્તમ લખાણ માનવામાં આવે છે અને આજે પણ વિદ્વાનો દ્વારા તેનો સંદર્ભ લેવામાં આવે છે.

1996માં પિટ્સફિલ્ડ, મેસેચ્યુસેટ્સમાં વિલોવુડ નર્સિંગ હોમમાં ન્યુમોનિયાની બિમારીથી 11 ઓક્ટોબરે લાર્સ એહલફોર્સે અંતિમ શ્વાસ લીધા. લાર્સનું ગણિતમાં કાર્ય આજે પણ આપણને પ્રેરણા આપી રહ્યું છે. Wolf Prizeના પ્રશસ્તિપત્રને અહીં સમાવવું જરૂરી બને છે, જે તેમની સિદ્ધિઓની સુંદર અને સંક્ષિપ્ત ઝાંખી આપે છે : For over half a century the theory of functions of a complex variable was guided by the thought and work of professor Lars Ahlfors. His achievements include the proof of the Denjoy Conjecture, the geometric derivation of the Nevanlinna theory, an important generalization of the Schwarz lemma, the development of the method of extremal length, and numerous decisive results in the theory of Reimann surfaces, quasi-conformal mappings and Teichmuller spaces. Ahlfors celebrated finiteness theorem for Kleinian groups and his work on the limit set, revitalized an important area of research. He is now doing pioneering work on quasicconformal deformations in higher dimensions.

Ahlfors influence was pervasive and beneficial. His methods combine deep geometric inside with subtle analytic skill; he presents them with utter clearity and simplicity. Time and again he attacked and solved the central problem in a discipline. Time and again other mathematicians were inspired by work he did many years earlier.

સંદર્ભ :

1. en.wikipedia.org/wiki/Lars_Ahlfors
2. wolffund.org.il/lars-v-ahlfors/
3. mathunion.org/imu-awards/fields-medals
4. mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

દૈર્ઘ્ય સંકોચન, કાલવૃદ્ધિ તથા દ્વિવેગ-યોગસૂત્ર-1

Babubhai B. Kayasth
Surat. (M) 9265028417

આ લેખમાં આઇન્સ્ટાઈનીય યંત્રવિદ્યાના ઉપર દર્શાવેલા શીર્ષકમાં ત્રણ વિષયોનો શક્ય સરળ પરિચય આપવાનો નમ્ર પ્રયાસ કરવામાં આવ્યો છે.

પ્રારંભમાં વિષયોની ચર્ચામાં ઉપયોગમાં લેવાયેલાં, પ્રાયોજિત ગણિતમાંનાં, પ્રાવિધિક પદોની સ્પષ્ટતા કરવામાં આવી છે.

A. ગતિ અને સ્થિર :

કોઈ નિશ્ચિત વસ્તુ કે વસ્તુઓના સંદર્ભમાં એક પદાર્થની સ્થિતિનું પરિવર્તન થાય કે ન થાય તે પદાર્થને અનુક્રમે ગતિમાં કે સ્થિર કહેવાય છે.

નિસર્ગમાં નિરપેક્ષ સ્થિર તેમજ નિરપેક્ષ ગતિ બંને સત્વો અજ્ઞાત છે કારણ કે બ્રહ્માંડમાં નિરપેક્ષ સત્વ વિશે કોઈ માહિતી ઉપલબ્ધ નથી જેના સંદર્ભમાં પદાર્થો સ્થિર કે ગતિમાં માની શકાય, તેથી પદાર્થો સાપેક્ષ ગતિ કે સાપેક્ષ સ્થિર જ સ્વીકાર્ય છે.

B. બળ :

જે કારક પદાર્થની સ્થિર સ્થિતિમાંથી કોઇ ગતિ સ્થિતિમાં પરિવર્તન કરી શકે અથવા એક સમાન રૈખિક ગતિનું અન્ય કોઇ ગતિમાં પરિવર્તન કરી શકે તેને બળ કહેવાય છે.

બળ આમ ગતિનું સર્જન કરે છે અથવા સમાન ગતિનું એક રેખામાં સર્જન કરે છે, પણ એક પદાર્થ સ્થિર હોય કે એક સમાન ગતિમાં હોય તેના પર બળ અજમાવી શકાય છે, પરંતુ તેથી કોઇ ગતિ કે ગતિના પરિવર્તનની વળતી ક્રિયા સર્જાતી નથી. એટલે કે તેમાંથી બળનું સર્જન થઇ શકતું નથી કારણ કે તે બળની અસર અન્ય બળો દ્વારા પ્રતિસંતુલિત થઇ શકતી હોય છે. આ પરિસ્થિતિમાં અન્ય બળોની અનુપસ્થિતિ હોય તો જ પ્રત્યેક બળ ગતિનું સર્જન કે ગતિના પરિવર્તનને અનુલક્ષે છે અથવા ગતિનું એક સમાન રૈખિક ગતિના સર્જનને અનુલક્ષે છે.

C. બળના પ્રકારો :

(1) જે બળ દ્વારા એક પદાર્થના વિવિધ અંગો અથવા પદાર્થોની એક વ્યવસ્થા પરસ્પર કાર્યાન્વિત થાય તો તે બળને પદાર્થ પર લાગતું આંતરિકબળ કહેવાય છે.

દાખલા તરીકે જો એક હાથની આંગળી બીજા હાથ વડે ખેંચવામાં આવે તો તે આંગળી પર લગાવાયેલ (ખેંચાણ) બળ સમગ્ર શરીર પર લગાવાયેલું આંતરિક બળ છે.

(2) એક પદાર્થ પર લગાવાયેલું બળ બીજા પદાર્થ પર લાગે તો તે પદાર્થ પર લાગેલું **બાહ્યબળ** કહેવાય છે.

દાખલા તરીકે કોઈ પદાર્થનું વજન તે પદાર્થના દ્રવ્યમાન પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે છે, તેથી પદાર્થનું વજન તેના પર લાગેલું બાહ્ય બળ છે.

D. નિર્દેશ તંત્ર :

ભૌતિક પ્રયોગ કે પ્રયોગશાળાને વર્ણવતા સમન્વય સ્થાનાંકો તથા સમયાંકોની માહિતીના સમૂહ તે પ્રયોગ કે પ્રયોગશાળાનું નિર્દેશતંત્ર કહેવાય છે.

E. જડત્વીય નિર્દેશ તંત્ર :

બાહ્યબળોની અનુપસ્થિતિમાં જે નિર્દેશતંત્ર સંગત પ્રયોગ કે પ્રયોગશાળામાંની વસ્તુઓ સ્થિર રહે અથવા સમાન વેગથી રૈખિક ગતિ કરે તે જડત્વીય નિર્દેશતંત્ર કહેવાય.

F. ન્યૂટોનીય યંત્રવિદ્યા :

ગેલીલિયો ગેલીલી (1564-1642) તથા તે પૂર્વેના તથા સમકાલીન ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ સ્થાનાંતર તથા તેના પર આધારિત યંત્રવિદ્યા સમૃધ્ધ બનાવવા નાના મોટા પ્રાયોગિક પ્રદાનો કરતા રહ્યા હતા. વર્ષ 1590માં ગેલીલિયો ગેલીલીએ ગતિના બે નિયમો શોધી કાઢ્યા હતા તથા ગતિનો ત્રીજો નિયમ હુક, હાયગેન, વાલિસ તથા રે એ એક યા બીજા પ્રકારે શોધેલો મનાય છે.

મહાન ગણિતજ્ઞ તથા ભૌતિકશાસ્ત્રી સર આઇઝેક ન્યૂટને (1642-1727) વર્ષ 1687માં તેના પોતાના ગ્રંથ પ્રિન્સીપીયા મેથેમેટિકામાં ગતિના ઉપરોક્ત ત્રણ નિયમો વ્યવસ્થિત ભાષામાં પ્રસિધ્ધ કર્યા હતા જે નિમ્ન વર્ણિત છે.

(1) પ્રત્યેક પદાર્થ તેના પર પ્રયુક્ત બાહ્યબળ ન લાગે ત્યાં સુધી સ્થિર સ્થિતિમાં કે એક સમાન ગતિમાં રહે છે.

(2) વેગમાનના ફેરફારનો દર પ્રયુક્ત બળના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

(3) ક્રિયા અને પ્રતિક્રિયા સમાન તથા પરસ્પર વિરુધ્ધ દિશામાં હોય છે.

આ ત્રણેય ગતિનિયમોની કોઇ ગાણિતિક સાબિતી નથી પણ તેમની ખરાઇ પ્રાયોગિક રીતે ચકાસી શકાય છે. આ ત્રણેય નિયમો ન્યૂટનના ત્રણ મૂળભૂત ગતિનિયમો કહેવાય છે અને તેમના પર આધારિત યંત્રવિદ્યા ન્યૂટોનીય યંત્રવિદ્યા કહેવાય છે. તે પરંપરાગત કે ચિરસંમત યંત્રવિદ્યા પણ કહેવાય છે.

નોંધ : ઉપરોક્ત ગતિનિયમો (પ્રકાશતુલ્ય) પ્રચંડવેગો કે પ્રચંડ અંતરોને અનુરૂપ હોતા નથી. ન્યૂટોનીય યંત્રવિદ્યાની આ ઉણપનું નિવારણ એક નૂતન યંત્રવિદ્યાના આવિષ્કારથી વીસમી સદીમાં થયું હતું. તેના પ્રણેતા આલ્બર્ટ આઇન્સ્ટાઇન હતા. તેથી આ નૂતન યંત્રવિદ્યા આઇન્સ્ટાઇનીય યંત્રવિદ્યા કહેવાય છે.

G. આઇન્સ્ટાઇનીય યંત્રવિદ્યા :

યુરોપખંડ સ્થિત જર્મની દેશની નજીક ઑસ્ટ્રિયા નામના દેશમાં ઉલ્મ મુકામે 14 માર્ચ 1919માં હરમન આઇન્સ્ટાઇન નામના વ્યક્તિના યહુદી પરિવારમાં તેમના પ્રથમ સંતાનનું અવતરણ થયું હતું અને તેને આલ્બર્ટ નામ આપવામાં આવ્યું.

આર્બર્ટ તેમના શૈશવ દરમિયાન મંદબુદ્ધિના બાળક જણાતા હતા, તેઓ સામાન્ય કરતાં વધુ વર્ષો બાદ પણ સ્પષ્ટ બોલી શકતા ન હતા, વારંવાર વિવિધ બીમારીઓથી ગ્રસ્ત રહેતા હતા, છતાં વધતી ઉંમરે ચિંતન કરતા હોય એવું લાગતું હતું. વહેતા સમય સાથે શાળા-કોલેજ અભ્યાસ પૂર્ણ થતાં નબળું સ્વાસ્થ્ય ધરાવતા આલ્બર્ટ માટે નિયતિને કંઇ વિશેષ મંજૂર હશે. કદાચ તેમનું મસ્તિષ્ક તંદુરસ્ત રહેતું હોવાથી વર્ષ 1905માં છવ્વીસ વર્ષની યુવાન વયે તેમણે એક અદ્‌ભુત સંશોધનપત્ર રજૂ કર્યો જેમાં તેમણે તદ્દન નવા આશ્ચર્યકારક ખ્યાલ રજૂ કર્યા જેને કારણે વિજ્ઞાનમાં ખાસ કરીને ભૌતિકીમાં આમૂલ ક્રાંતિ થઇ હતી. ત્યારબાદ પણ સંશોધન કાર્યનો દોર વણથંભ્યો ચાલતો રહ્યો હતો, તેથી કાલક્રમે તેઓ વીસમી સદીના મહાનતમ્ વિજ્ઞાનીનું બિરુદ પ્રાપ્ત કરી શક્યા હતા.

હવે, અત્રે તો તેમના સંશોધનોનો અલ્પ રસાસ્વાદ કરાવવા તેમના શીર્ષકમાંના ત્રણ વિષયોની ચર્ચા પર પ્રયાણ કરીએ.

આલ્બર્ટ આઇન્સ્ટાઇને અગાઉ ચર્ચિત ન્યૂટોનીય યંત્રવિદ્યાની ઊણપો નિવારવા અતિ પ્રચંડ (પ્રકાશવેગ તુલ્ય) વેગો તથા પ્રચંડ અંતરોના ખ્યાલોની તદ્દન નવી જ યંત્રવિદ્યાની વ્યવસ્થાની (માનસિક) રચના કરી હતી. તેઓ ન્યૂટનને પોતાના માનસગુરુ માનતા હતા, તેથી આ નવી વિદ્યા જે ન્યૂટોનીય યંત્રવિદ્યા આધારિત હોવાથી તેમણે તે યંત્રવિદ્યાના ખ્યાલને વિશિષ્ટ સાપેક્ષતા નામ આપ્યું હશે, એવું માની શકાય. તેની માહિતી નિન્મ વર્ણિત છે.

H. વિશિષ્ટ સાપેક્ષતા :

ગુરુત્વાકર્ષણની અનુપસ્થિતિમાં અતિ પ્રચંડ (પ્રકાશવેગ તુલ્ય) વેગથી ગતિમાન યંત્રવિદ્યાની વ્યવસ્થા વિશિષ્ટ સાપેક્ષતા કહેવાય છે. આઈન્સ્ટાઈને આ યંત્રવિદ્યાને ન્યૂટોનીય યંત્રવિદ્યાના વ્યાપકરૂપે સૂત્રબદ્ધ કરી હતી. તેના મૂળભૂત સિદ્ધાંતો નિમ્ન વર્ણિત છે.

(1) અવલોકનકારની ગમે તે ગતિ હોય તેની પ્રકાશના વેગ (c=3,00,000 કિ.મી./સેકંડ) પર કોઈ જ અસર પડતી નથી.

(2) સર્વે જડત્વીય નિર્દેશતંત્રોમાં ભૌતિકીના નિયમો સમાન રહે છે તથા બધાં જ નિર્દેશતંત્રો સમાન છે.

(3) ઉપરોક્ત વિગતોના આધારે બ્રહ્માંડમાંના કોઈપણ સત્વનો વેગ cથી વધુ હોતો નથી, એટલે કે તે બ્રહ્માંડના વેગોનું સીમાંત મૂલ્ય છે.

(4) એક અવલોકનકાર સાપેક્ષ જે બે ઘટનાઓ સમકાલીક હોય તે અન્ય અવલોકનકારો માટે એવું ન પણ હોઈ શકે.

(5) સમગ્ર બ્રહ્માંડમાં પ્રકાશવેગ c એક માત્ર નિરપેક્ષ સત્વ છે.

(6) બે અવલોકનકારો પ્રકાશવેગ માપવાના અલગ પ્રયત્નો કરે તો પણ તેમનાં પરિણામો સમાન જ રહે છે.

વિશિષ્ટ સાપેક્ષતા પર આલ્બર્ટ આઈન્સ્ટાઈને નિમ્ન વર્ણિત આગાહીઓ કરી હતી.

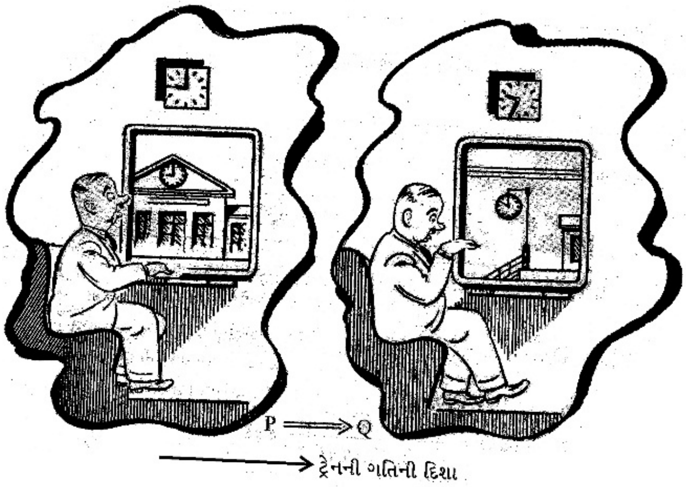
(a) વિશિષ્ટ સાપેક્ષતામાં ગતિમાન વસ્તુઓની દિશામાં વસ્તુઓની લંબાઈમાં ઘટાડો એટલે દૈર્ઘ્ય સંકોચન થાય છે.

(b) વિશિષ્ટ સાપેક્ષતામાં અવલોકનકારને સાપેક્ષ સમયમાં વધારો એટલે કાલવૃદ્ધિ થાય છે, તથા

(c) તેમાંના પદાર્થોના દ્રવ્યમાનમાં વૃદ્ધિ થતી હોય છે.

ઉપરોક્ત (c) આગાહીમાં જે ઉલ્લેખ છે તેનો નાભિકીય વિજ્ઞાનમાં જ્યારે ધાતુતત્વોના પરમાણુઓ વીજભારયુક્ત કરવામાં આવે ત્યારે જ પ્રાયોગિક ચકાસણી થઈ શકે છે પણ તેમાં પરમાણુની ગતિ દૃશ્યમાન હોતી નથી કારણ કે તે પ્રકાશતુલ્ય વેગ હોય છે.

નાભિકીય વિજ્ઞાન જટીલ વિષય છે. સામાન્ય જનસમુદાયને તે સમજવામાં મુશ્કેલી પડે છે, તેથી વિશિષ્ટ સાપેક્ષતામાં અતિપ્રચંડ (પ્રકાશવેગતુલ્ય) વેગો તથા અંતરોને અનુરૂપ સામાન્ય જનસમુદાયને સમજાય તેવા પ્રત્યક્ષરૂપ કે પ્રતિરૂપ આજ પર્યંત રચી શકાયાં નથી, પણ તેની સરળ સમજ માટે કલ્પનાવિહાર એક માત્ર ઉપાય છે.



આકૃતિ-1

વિશિષ્ટ સાપેક્ષતાની (કાલ્પનિક) રચના નિમ્ન વર્ણિત છે.

(1) બે રેલ્વે સ્ટેશનો P અને Q વચ્ચેનું પ્રચંડ અંતર PQ = s = 86,40,00,000 કિલોમીટર છે.

(2) E-ટ્રેન (આઈન્સ્ટાઈન ટ્રેન)ની પ્રચંડ લંબાઈ S જેટલી છે, તેનો પ્રચંડ વેગ u = 2,40,000 કિ.મી./સેકંડ છે.

(3) E-ટ્રેનના એન્જીન તથા બધા જ પ્રવાસી કોચની ઉંચાઈ એટલે કે તેના તળીયેથી છત વચ્ચેનું પ્રચંડ અંતર H = 9,00,000 કિ.મી. છે.

(4) E-ટ્રેનનો રેલ્વે પથ રૈખિક તથા અફાટ છે.

(5) E-ટ્રેનના એક ખાસ કોચની અંદરના તથા બહારના નિર્દેશતંત્રો F_1 તથા F_2 વડે દર્શાવેલા છે. F_1ની સળંગ છત પર વિશાળ સપાટ-દર્પણ જડવામાં આવેલું છે, આ કોચમાં એક પ્રવાસી અવલોકનકાર બિરાજમાન છે, તેના આસન સામે કોચની દિવાલ છે, તેની પાસે કોચના તળીયા પર A બિંદુ પર ફ્લેશ લાઈટ ઉર્ધ્વલંબ દિશામાં જડેલી છે.

(**સંપાદકીય નોંધ :** અમને મળેલી પ્રતમાં, આકૃતિ-1માં F_1, F_2, A જેવા કોઈ નિર્દેશકો નથી.)

(6) પ્રવાસી અવલોકનકારે સમય જાણવા માટે અતિચોક્સાઈયુક્ત કાંડાઘડિયાળ (રીસ્ટવૉચ) હાથના કાંડા પર ધારણ કરેલ છે.

(7) P અને Q બંને સ્ટેશનો પર ક્લૉક ટાવર ગોઠવવામાં આવેલ છે.

જ્યારે E-ટ્રેન P સ્ટેશન પરથી પસાર થાય ત્યારે ત્યાંના ક્લૉક ટાવરમાંનો સમય 9 કલાક-00 મિનિટ જણાય છે, જેને તે પ્રવાસી અવલોકનકાર પોતાના કાંડાઘડિયાળમાં ગોઠવી દે છે.

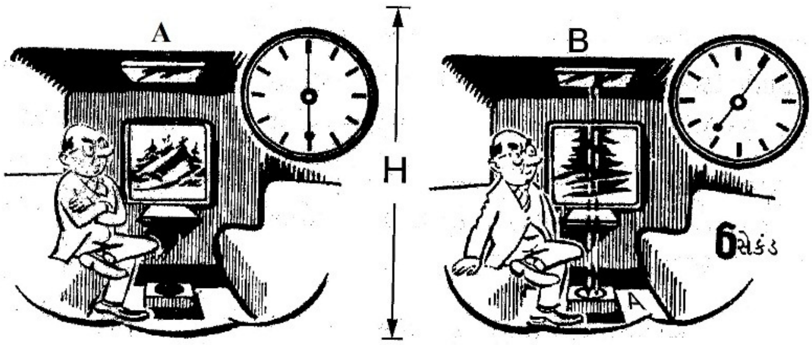
ત્યારબાદ E-ટ્રેન આગળ વધી Q સ્ટેશને પહોંચે છે ત્યારે અવલોકનકારને ત્યાંના ક્લૉક ટાવરમાં જણાતો સમય 10 કલાક જણાય છે, તરત જ તે પોતાના કાંડાઘડિયાળમાં જુએ છે ત્યારે તેમાં જણાતો સમય 9 કલાક 36 મિનિટ છે (જે આકૃતિ-1માં બતાવેલ છે) તેથી તે આશ્ચર્યમાં પડી જાય છે કે શા માટે તેનું કાંડાઘડિયાળ [(10 કલાક-00 મિનિટ – 9 કલાક-36 મિનિટ)= 24 મિનિટ] ધીમું પડી ગયું !

P થી Q સ્ટેશન પર પહોંચવાનો સમય :

$$T = \frac{P \text{ અને } Q \text{ સ્ટેશનો વચ્ચેનું અંતર}}{E-\text{ ટ્રેનનો પ્રચંડ વેગ}} = \frac{s}{u} = \frac{86{,}40{,}000 \text{ કિલોમીટર}}{2{,}40{,}000 \text{ કિલોમીટર}} = 3600 \text{ સેકંડ}$$

એટલે T=1 કલાક છે, તેથી Q સ્ટેશન પાસેના ક્લૉક ટાવરમાં જણાતો સમય 10 કલાક-00 મિનિટ બરાબર છે, તો પછી અતિચોક્સાઈવાળું કાંડાઘડિયાળ શા માટે 24 મિનિટ ધીમું પડી ગયું ? તેનું કારણ જાણવા માટે આકૃતિ-2માં નજર રાખી ગણતરીનું વિશ્લેષણ ધ્યાનથી વાંચો.

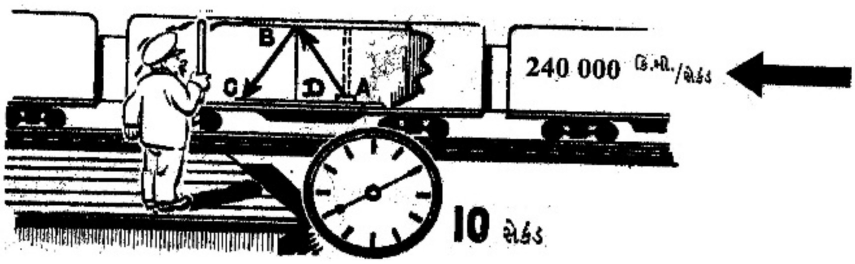
આકૃતિ-2માં F_1 નિર્દેશતંત્રમાં પ્રવાસી અવલોકનકાર A-બિંદુ પરની ફ્લેશ લાઈટની સ્વિચ ઓન થતાં તેમાંથી પ્રગટેલ એક પ્રકાશકિરણ આપાતકિરણ તરીકે ઉર્ધ્વલંબદિશામાં છત પરના સપાટદર્પણ પર B બિંદુમાં આપાત થઈ ત્યાંથી તે પરાવર્તિત તરીકે પાછું અધોલંબદિશામાં A બિંદુમાં આપાત થાય છે તે ક્રિયાનું નિરીક્ષણ કરે છે.



આકૃતિ-2

આકૃતિ-2માં બતાવ્યા પ્રમાણે AB = BA = H = 9,00,000 કિં.મી. છે, તેથી પ્રવાસી અવલોકનકારને આ આપાત-પરાવર્તન ક્રિયા જોવા માટેનો કુલ સમય $t_2 = \frac{2H}{\text{પ્રકાશવેગ}} = \frac{2 \times 9{,}00{,}000}{3{,}00{,}000} = 6$ સેકંડ છે.

હવે ઉપરોક્ત આપાત-પરાવર્તન ક્રિયા F_2 નિર્દેશતંત્રમાંના બીજા અવલોકનકારને જોતા કેટલો સમય લાગશે તે જાણવા માટે આકૃતિ-3 માં જુઓ અને તેમાંની વિગતો ધીરજપૂર્વક વાંચો.



આકૃતિ-3

F_1 નિર્દેશતંત્રમાં પ્રવાસી અવલોકનકારને ફ્લેશની સ્વીચ ઓન થતાં તેમાંથી પ્રગટેલાં પ્રકાશકિરણ, આપાતકિરણ તથા પરાવર્તિતકિરણ તરીકે ઊર્ધ્વલંબ દિશામાં $\overrightarrow{AB}$ હતું તથા અધોલંબ દિશામાં $\overrightarrow{BA}$ હતું, તે બંને પ્રકાશની નિરપેક્ષ ગતિ તથા E- ટ્રેનની $\overrightarrow{PQ}$ દિશામાં રૈખિક પ્રચંડ ગતિના કારણે F_2 નિર્દેશનતંત્રમાંના અવલોકનકારને આકૃતિ-3 પ્રમાણે આપાતકિરણ $\overrightarrow{AB}$ તથા પરાવર્તિતકિરણના નિયમ પ્રમાણે આકૃતિ-3માં સમદ્વિભુજ ΔABC જેવું જણાશે, તેમાં BD = h = 9,00,000 કિ.મી. છે. (**સંપાદકીય નોંધ :** અહીં પણ આકૃતિમાં F_1, F_2 નું નિર્દેશન નથી.)

F_2 નિર્દેશતંત્રમાંના અવલોકનકારને આપાતકિરણ $\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{BC}$ બંનેના નિરીક્ષણ માટેનો કુલ સમય t_1 સેકંડ લો. તો આકૃતિ-3માં આપાતકિરણ $\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{BC}$ બંને માટે નિરીક્ષણ માટેનો સમય $t_1/2$ થશે; હવે

સમદ્વિભુજ ΔABC માં

$AC = t_1$ સેકંડમાં $\overrightarrow{AC}$ તરફ E-ટ્રેને કાપેલું અંતર $= t_1 \times 2{,}40{,}000$ કિ.મી. $= 2{,}40{,}000\ t_1$ કિ.મી.

તેથી $CD = \frac{t_1}{2} \times AC$ કિ.મી. $= \frac{t_1}{2} \times 2{,}40{,}000 = 1{,}20{,}000\ t_1$ કિ.મી.

તથા $BC = \frac{t_1}{2} \times$ પ્રકાશવેગ $= \frac{t_1}{2} \times 3{,}00{,}000$ કિ.મી.$= 1{,}50{,}000\ t_1$ કિ.મી.

તેથી કાટકોણ ΔBCD માં પાયથાગોરસના પ્રમેય પ્રમાણે

$BC^2 = CD^2 + BD^2$ તેથી

$(1{,}50{,}000t_1)^2 = (1{,}20{,}000t_1)^2 + (9{,}00{,}000)^2$

આ t_1 માં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ,

$t_1 = 10$ સેકંડ છે, તેથી

$t_1 - t_2 = (10 - 6)$ સેકંડ $= 4$ સેકંડ

તેથી F_1 નિર્દેશતંત્રમાં પ્રવાસી અવલોકનકારનું કાંડાઘડિયાળ 4 સેકંડ ધીમું પડી ગયું.

એટલે કે F_1 નિર્દેશતંત્રમાં દર સેકંડે F_1 નિર્દેશતંત્રમાંના પ્રવાસી અવલોકનકારનું કાંડાઘડિયાળ 4 સેકંડ ધીમું પડી જાય છે. તેથી P અને Q સ્ટેશનના 1 કલાક = 3600 સેકંડ સુધીના પ્રવાસ દરમિયાન તે ઘડિયાળ

$\frac{4 \times 3600}{10 \times 60} = 24$ મિનિટ ધીમું ધીમું પડી ગયું છે.

જે E-ટ્રેનના પ્રચંડ વેગ પ્રકાશના નિરપેક્ષ વેગને કારણે છે.

તેથી F_1 માંના પ્રવાસી અવલોકનકારના કાંડાઘડિયાળમાં જણાતો સમય

[(10 કલાક-00 મિનિટ) – (00 કલાક-24 મિનિટ) = (9 કલાક-36 મિનિટ)] છે.

વિશિષ્ટ સાપેક્ષતાની ચર્ચામાં દૈર્ઘ્ય સંતોચન, કાલવૃદ્ધિ તથા દ્રવ્યમાન વૃદ્ધિની આગાહીઓની વિગતો છે, તેમાંની પ્રથમ બે આગાહીઓ ને સ્પષ્ટ સમજવા માટે દ્રષ્ટાંતોની મદદ લઈશું. ત્રીજી આગાહી પ્રમાણમાં જટીલ છે તેથી તેની ચર્ચાને સ્થળ સંકોચના કારણે સ્થાન ન આપવાનું યોગ્ય લાગ્યું છે. હવે પછીનાં લેખમાં સાપેક્ષતા સાથે સંબંધિત અન્ય ખ્યોલોનો પરિચય મેળવીશું.

ક્રમશઃ

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

શ્રેણિકોનો એક અદ્ભુત ગુણાકાર

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 42 \\ 84 & 79 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 7 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 9 \\ 8\cdot 7 + 7\cdot 4 & 8\cdot 2 + 7\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 42 \\ 84 & 79 \end{pmatrix}$$

(M) 9712346664

નિલેશ માંડલિયા

અમદાવાદ.

➲ બે પરિણામો

આ અંકમાં (અંક 315) 'ઉઘાડી રાખજો બારી-2'ના લેખમાં આપણે નીચેનાં પરિણામોનો ઉપયોગ કર્યો છે.

(1) દરેક વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંકને એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય જ.

(2) જો n વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંક હોય તો, nને, $\sqrt{n}$ થી મોટો નહિ તેવો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય જ.

આપણે આ પરિણામોની સાબિતી જોઈએ. જો અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ તો (1)ની સાબિતી સરળ છે. આ પ્રમેય પ્રમાણે આપેલા વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંકને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય. આ ગુણાકારમાં આવતી દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા ધનપૂર્ણાંકનો અવયવ હશે. પરંતુ અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યા વિના, માત્ર ધનપૂર્ણાંકની વિભાજ્યતા વાપરીને પણ સાબિતી આપી શકાય. આ માટે ધારો કે આપેલો વિભાજ્ય ધનપૂર્ણાંક n છે. n વિભાજ્ય હોવાથી ધનપૂર્ણાંક a અને b મળે. જેથી,

$n = ab,\ 1 < a < n$ અને $1 < b < n$.

A = {ધનપૂર્ણાંક $m | 1 < m < n, m|n$} લો. a અને b A ના સભ્યો છે. તેથી $A \neq \phi$. વળી $1 \notin A$. Aની નાનામાં નાની સંખ્યા p લો. p Aમાં હોવાથી $1 < p < n$ અને $p|n$. ધારો કે p વિભાજ્ય છે. તો એવી સંખ્યા q મળશે, જેથી $1 < q < p$ અને $q|p$. હવે $q|p$ અને $p|n$ તેથી $q|n$. ઉપરાંત $1 < q < p$ અને $p<n$. તેથી $1 < q < n$ પણ તો $q \in A$. જે શક્ય નથી, કારણ કે p A ની નાનામાં નાની સંખ્યા છે. તેથી p વિભાજ્ય નથી. આમ n નો અવિભાજ્ય અવયવ p મળ્યો.

(2) ની સાબિતી : n વિભાજ્ય હોવાથી $n= ab$, જ્યાં $1 < a < n,\ 1 < b < n$. ધારો કે $a > \sqrt{n},\ b > \sqrt{n}$ તો $ab > \sqrt{n} \times \sqrt{n}$ એટલે કે $n > n$, જે વિરોધાભાસ છે. આથી $a \leq \sqrt{n}$ અથવા $b \leq \sqrt{n}$ ધારો કે $a \leq \sqrt{n}$. જો a અવિભાજ્ય હોય તો $\sqrt{n}$ કરતાં મોટો નહિ એવો nનો અવિભાજ્ય અવયવ મળી ગયો. જો a વિભાજ્ય હોય તો પરિણામ (1) પ્રમાણે અવિભાજ્ય p મળે, જે a નો અવયવ હોય. પણ તો p એ nનો પણ અવયવ થાય. વળી $p<a$ અને $a \leq \sqrt{n}$. તેથી $p < \sqrt{n}$. આમ nનો જરૂરી અવિભાજ્ય અવયવ મળી ગયો.

➲ સુગણિતમ્ અંક 314 ની પ્રા.પ્ર.ચુ.વૈદ્ય પ્રશ્ન સ્પર્ધાનો એક પ્રશ્ન

પ્રશ્ન નીચે પ્રમાણે છે :

ધારો કે $a_1 =1,\ a_2 =3+5,\ a_3 =7+9+11,\ a_4 =13+15+17+19$.

સાબિત કરો કે a_n એ ધનપૂર્ણાંકનો ઘન છે.

પહેલાં આ પ્રશ્નનો ઉકેલ જોઈએ. એ નોંધીએ કે a_1, a_2, a_3, a_4 એ દરેક સમાતંર શ્રેણીનો સરવાળો છે અને આ દરેક સમાંતર શ્રેણીમાં સામાન્ય તફાવત 2 છે. વળી a_1, a_2, a_3, a_4 એ સમાતંર શ્રેણીનાં અનુક્રમે 1, 2, 3, 4 પદોના સરવાળા છે. આ ઉપરથી તારવી શકાય કે a_n એ 2 સામાન્ય તફાવતવાળી સમાંતર શ્રેણીનાં n પદોનો સરવાળો છે. વળી a_1, a_2, a_3, a_4 જે સમાંતર શ્રેણીના સરવાળા છે તેનાં પહેલાં પદ અનુક્રમે 1, 3, 7, 13 છે. થોડા પ્રયત્નને અંતે જોઈ શકાશે કે શ્રેણી 1, 3, 7, 13,... નું n મું પદ $n^2 - n+1$ છે. આથી

$$a_n = \frac{n}{2} [2 (n^2 - n + 1) + (n - 1) \times 2] \qquad \therefore a_n = n^3$$

હવે પ્રશ્ન એ થાય કે એવી શ્રેણી મળે, જેમાં દરેક n માટે n મું પદ જેનો સામાન્ય તફાવત 2 હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનાં n પદોનો સરવાળો હોય અને આ સરવાળો n^4 હોય ? જવાબ 'હા'માં છે. ઉકેલ માટે આપણે ધારીએ કે nમા પદમાં આવતી સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ α_n છે. તો હવે આ સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ α_n છે, સામાન્ય તફાવત 2 છે અને n પદોનો સરવાળો n^4 છે. તેથી,

$$n^4 = \frac{n}{2}\,[2\,\alpha_n + (n-1)\times 2]$$

$$\therefore\ \alpha_n = n^3 - n + 1$$

આથી $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 7, \alpha_3 = 25, \alpha_4 = 61, \ldots$ વગેરે

તેથી જરૂરી શ્રેણી

1, 7+9, 25+27+29, 61+63+65+67, ... થશે.

વ્યાપક રીતે નીચેનો પ્રશ્ન પૂછી શકાય :

એવી શ્રેણી આપો જેનું n મું પદ, d સામાન્ય તફાવતવાળી સમાંતર શ્રેણીનાં પહેલાં n પદોનો સરવાળો હોય અને આ સરવાળો આપેલા ધનપૂર્ણાંક m માટે n^m હોય.

ઉત્તર : nમા પદની સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ પદ તરીકે $n^{m-1} - \frac{1}{2}(n-1)d$ લો. (ઉપરની રીતે આ પદ મેળવો)

ઉદાહરણ તરીકે m=5, d=3 માટેની શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ

$$1, \frac{29}{2} + \frac{35}{2}, 78 + 81 + 84, \frac{503}{2} + \frac{509}{2} + \frac{515}{2} + \frac{521}{2}$$ થશે.

➲ ઉકેલો : (ABAB) × (ACBC) = C C C C C C C C

આ પ્રશ્ન સુગણિતમ્‌ના અંક 314માં 'સો અંક પહેલાં'ના લેખમાં છે. તેનો ઉકેલ પણ એ જ લેખમાં આપેલો છે. એ જ ઉકેલ, થોડો ટૂંકાવીને અહીં આપીએ છીએ.

(ABAB) × (ACBC) = C C C C C C C C

= (11 11 11 11) × C = 11 × 73 × 101 × 137 × C = (73 73) × (1507) × C

આ ઉપરથી અનુમાન કરી શકાય કે ABAB=7373. એટલે કે A=7, B=3. તેથી 7C3C = 1507 × C અને

તેથી $C = \frac{7C3C}{1507}$. હવે 7000 < 7C3C < 8000. તેથી $\frac{7000}{1507} < C < \frac{8000}{1507}$. તેથી $4 < \frac{7000}{1507} < C < \frac{8000}{1507} < 6$

C પૂર્ણાંક હોવાથી C=5.

આ પ્રશ્ન જોઈને મને બાળપણની વાત યાદ આવી. એ વખતે એક ઉખાણું પૂછાતું.

પંદર બાવીસ શૂન ને સાત, કરો મહેતાજી એકડા આઠ.

વાચક મિત્રોએ આ ઉખાણું કદાચ સાંભળ્યું પણ હશે. તેનો અર્થ ઉપરના ઉકેલમાં ક્યાંક છૂપાયેલો છે. મળે તો જણાવશો.

➲ કેટલાં ફૂલ?

સુગણિતમ્‌ના અંક 314માં શ્રી બાબુભાઈ કાયસ્થ સાહેબે પ્રેમાળ દાદાની વહાલાં સંતાનો જોડેની યાદગાર યાત્રાના લેખમાં યાત્રાના વર્ણન સાથે ગાણિતિક કોયડાને સરસ રીતે વણી લીધો છે. સાથે સાથે દ્વાદશ જ્યોતિર્લિંગની પણ માહિતી આપી છે. ગણિતને માહિતીપૂર્ણ વાર્તાસ્વરૂપે રજૂ કરવાનો આ પ્રયાસ પ્રશંસનીય છે. વર્ગમાં શ્રેણી અને વિશેષ કરીને ભૌમિતિક શ્રેણી

શીખવતી વખતે આ વાર્તા કહેવી રસપ્રદ થશે. આ કોયડાને જરા જુદા સ્વાંગમાં – અને જાણીતા સ્વાંગમાં – વ્યાપક સ્વરૂપે નીચે આપેલી રીતે રજૂ કરી શકાય.

એક બેન n મંદિરમાં દર્શન કરવા જાય છે અને દરેક મંદિરમાં ભગવાનને એક સરખી સંખ્યામાં ફૂલ ચડાવે છે. બેન જેવાં કોઈ પણ મંદિરમાંથી બહાર નીકળે છે કે તરત જ તેમની પાસેનાં ફૂલ k ગણાં થઈ જાય છે. nમા મંદિરની બહાર જ્યારે તે નીકળે છે ત્યારે તેમની પાસે એક પણ ફૂલ હોતું નથી. તો આપેલા n અને k માટે બેનની પાસે શરૂઆતમાં ઓછામાં ઓછાં કેટલાં ફૂલ હશે ? દરેક મંદિરમાં તેમણે કેટલાં ફૂલ ચડાવ્યાં હશે ? તમારી જાણ માટે કહું કે બેન જ્યારે પાંચ મંદિરમાં દર્શને ગયા અને જ્યારે ફૂલ ત્રણ ગણાં થતાં હતાં, ત્યારે શરૂઆતમાં તેમની પાસે 121 ફૂલો હતાં.

વલ્લભ વિદ્યાનગર, (M) 9824669364 **એમ. એચ. વસાવડા**

➲ અદ્‌ભુત સંખ્યાઓ

કેટલીક વખત ચોક્કસ રીતે પસંદ કરેલી યથેચ્છ સંખ્યાઓ પર નિશ્ચિત ક્રમમાં અમુક ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ કરવાથી આપણને એક ચોક્કસ સંખ્યા જ મળતી રહે છે. આવી સંખ્યાઓને અદ્‌ભુત સંખ્યાઓ કહી શકાય. શા માટે અમુક શરતોને આધિન પસંદ કરેલી સંખ્યાઓ પર નિર્ધારિત ગાણિતિક પ્રક્રિયા કરવાથી એક ચોક્કસ સંખ્યા મળે તેનું રહસ્ય પણ જાણવું જરૂરી છે.

ચાલો કેટલીક અદ્‌ભુત સંખ્યાઓ અને તે મળવાનું ગાણિતિક કારણ જાણીએ.

1. 37

જેનાં તમામ અંકો સમાન હોય તેવી, ત્રણ અંકોની, સંખ્યાને તેના અંકોના સરવાળા વડે ભાગતાં હંમેશા 37 મળે. આપેલી શરત મુજબ ત્રણ અંકની નવ સંખ્યાઓ મળે જે નીચે આપેલ છે.

111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999

ઉપરની કોઈપણ સંખ્યાને તેના અંકોના સરવાળા વડે ભાગતાં 37 જ મળશે. દાખવા તરીકે

$777 \div (7 + 7 + 7) = 777 \div 21 = 37$ વ્યાપક રીતે $\frac{xxx}{x+x+x} = \frac{x \times 111}{3x} = \frac{111}{3} = 37$

[કારણ : $xxx = 100x + 10x + x = x \times 111$)

(**સંપાદકીય નોંધ :** અહીં $111 = 37 \times 3$ એ જ મહત્વનું કારણ છે.)

37 અવિભાજ્ય છે તે તો વાચકો જાણતા જ હશે.

2. 12345679

જેના બધા જ અંકો સમાન હોય તેવી, નવ અંકોની, કોઈપણ સંખ્યાને તેના તમામ અંકોના સરવાળાથી ભાગતાં હંમેશા 12345679 મળે.

દાખલા તરીકે $\frac{777777777}{7+7+7+7+7+7+7+7+7} = \frac{7 \times (111111111)}{63} = \frac{111111111}{9} = 12345679$

ઉપરના ઉદાહરણમાં જ આવું કેમ થાય છે તેનું કારણ મળી જાય છે. તમામ અંકો સરખાં 'x',

$(x \le 9, x \in \mathrm{N})$ હોય તો, $\dfrac{xxxxxxxxx}{9x} = \dfrac{x \times (111111111)}{9x} = \dfrac{111111111}{9} = 12345679$

12345679 નો એક અવિભાજ્ય અવયવ 37 છે. $12345679 = 37 \times 333667$

અહીં 333667 પણ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

આદર્શ નિવાસી શાળા (કુમાર)
રાજકોટ (M) 9537927040

રાજેશકુમાર મેર

સંપાદકીય નોંધ :

(1) રાજેશભાઈએ 37 અને 12345679 ઉપરાંત સંખ્યાઓ 1089 અને 6174 વિશે પણ લખેલ છે. 1089 વિશે સુગણિતમ્‌માં છેલ્લા ત્રણ અંકોમાં ઘણું વિશેષ લખાણ પ્રગટ થઈ ચૂક્યું છે. (જૂઓ સળંગ અંક 312, 313, 314). 6174 વિશે તો રાજેશભાઈનો જ એક લેખ સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થઈ ગયો છે. (જૂઓ અંક 309, E-4, એપ્રિલ-23) તેથી 1089 અને 6174 વિશેનાં લખાણ અત્રે પ્રગટ કર્યાં નથી.

(2) **12345679 વિશે એક ગણિત ગમ્મત :** વર્ગમાં બોર્ડ પર 12345679 લખી તમામ વિદ્યાર્થીઓને કહો કે આ સંખ્યા નોટબુકમાં લખી તેને 1 થી 8 સુધીના કોઈપણ એક પૂર્ણાંક વડે ગુણો. કઇ સંખ્યા વડે ગુણ્યા તે વિદ્યાર્થીએ જાહેર કરવાનું નથી. વિદ્યાર્થીઓ ઉપરોક્ત ગુણાકાર કરી લે પછી તેમને સૂચના આપો કે તમારા પરિણામને 9 વડે ગુણો. બધાં જ વિદ્યાર્થીઓના પરિણામ $xxxxxxxxx = (x)_9$ પ્રકારના આવશે જ્યાં, x એ વિદ્યાર્થીએ પ્રથમ ગુણાકાર માટે પસંદ કરેલો પૂર્ણાંક હશે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

શ્રેણિકોનો એક અદ્‌ભુત ગુણાકાર

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 32 & 23 \\ 57 & 44 & 31 \\ 98 & 76 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot1+3\cdot7+2\cdot8 & 4\cdot2+3\cdot4+2\cdot6 & 4\cdot3+3\cdot1+2\cdot4 \\ 5\cdot1+4\cdot7+3\cdot8 & 5\cdot2+4\cdot4+3\cdot6 & 5\cdot3+4\cdot1+3\cdot4 \\ 9\cdot1+7\cdot7+5\cdot8 & 9\cdot2+7\cdot4+5\cdot6 & 9\cdot3+7\cdot1+5\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 32 & 23 \\ 57 & 44 & 31 \\ 98 & 76 & 54 \end{pmatrix}$$

(M) 9712346664

પ્રેષક : નિલેશ માંડલિયા
અમદાવાદ.

ડૉ. સચિન ગજ્જર
અમદાવાદ (M) 99253 62754 , E-mail : gjr.sachin@gmail.com

સળંગ અંક-314 (E-Copy-9)ના ઉકેલો

[**જરૂરી સૂચના :** આ વિભાગ શરૂ કરવાનો અમારો મૂળ હેતુ વિદ્યાર્થીઓને ગણિતમાં રસ લેતાં કરવાનો છે. શાળા-કોલેજના શિક્ષકોને નમ્ર વિનંતી કે તેઓ તેમના વિદ્યાર્થીઓને આ વિભાગથી વાકેફ કરે અને તેઓને ભાગ લેવા માટે પ્રોત્સાહન આપે. આ વિભાગના સંપાદક પ્રા. સચીન ગજ્જરનો ફોન નંબર અને Email આપણે દરેક અંકમાં મૂકીશું જ. તેથી તમામ વાચકો સીધા તેમને જ ઉત્તરો મોકલી શકે.]

શ્રી દયારામભાઈ ઠક્કરે પ્રા. પ્ર.ચુ.વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો સળંગ અંક 314 ના ત્રણેય પ્રશ્નો (4), (5) અને (6) ના સાચા ઉકેલ મોકલાવેલ છે. મહારાજા અગ્રસેન વિદ્યાલય, અમદાવાદના ધોરણ 11ના વિદ્યાર્થી હેત મુન્દ્રાએ પણ ત્રણેય પ્રશ્નોના સાચા ઉકેલ મોકલેલ છે. ઉપરાંત એલ.ડી. એન્જીનીયરીંગ કૉલેજ અમદાવાદના મિકેનીકલ સત્ર 4 ના વિદ્યાર્થી મંયક મોહતાએ પ્રશ્ન નં.5, કોમ્પ્યુટર સત્ર 4 ના વિદ્યાર્થી દિવ્ય વડોદરિયાએ પ્રશ્ન નં.6, મિકેનીકલ સત્ર 4 ના વિદ્યાર્થી મિહિર ભોગાયતાએ પ્રશ્ન નં.6 અને આઇ.ટી. સત્ર 4 ની વિદ્યાર્થિની દ્રષ્ટિ મિસ્ત્રીએ પ્રશ્ન નં.4 નો સાચો ઉકેલ મોકલાવેલ છે. તમામને ખૂબ ખૂબ અભિનંદન. મળેલા ઉકેલોનું સંકલન કરી થોડા જરૂરી ફેરફાર સાથે રજુ કર્યા છે.

4. For every positive integer n, let

$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

Prove that $n + h(1) + h(2) + h(3) + ... + h(n-1) = nh(n)$.

Solution :

Here, we have $h(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k}$, $k \in N$

$\therefore h(k) - h(k-1) = \frac{1}{k}$

$\therefore kh(k) - kh(k-1) = 1$

$\therefore kh(k) - (k-1)\, h(k-1) = 1 + h(k-1)$

$\therefore \sum_{k=2}^{n}[kh(k) - (k-1)h(k-1)] = \sum_{k=2}^{n}[1 + h(k-1)]$

$\therefore 2h(2) - h(1) + 3h(3) - 2h(2) + ... + nh(n) - (n-1)\, h(n-1)$

$= (n-1) + h(1) + h(2) + h(3) + ... + h(n-1)$

$\therefore nh(n) - h(1) = n-1 + h(1) + h(2) + h(3) + ... + h(n-1)$

$\therefore nh(n) = n + h(1) + h(2) + h(3) + ... + h(n-1)$ (કારણ : $h(1) = 1$)

5. Let $a_1=1$, $a_2=3+5$, $a_3=7+9+11$, $a_4=13+15+17+19$, ...

Prove that a_n is a perfect cube of positive integer.

Solution :

Here, it can be easily seen that

$a_n = [n(n-1)+1] + [n(n-1)+3] + [n(n-1)+5] + ...+ [n(n-1)+2n-1]$ for all $n \in \mathbb{N}$.

$\therefore\ a_n = n \cdot n(n-1) + 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$

$= n^2 (n-1) + n^2$

$= n^3$

6. If there exist unique positive integers x and y that satisfy the equation $x^2 + 84x + 2008 = y^2$, then find the value of $4x-y$.

Solution:

We have $x^2 + 84x + 2008 = y^2$

$\therefore\ 2008 = y^2 - x^2 - 84x$

$\therefore\ 2008 - 42^2 = y^2 - (x^2 + 84x + 42^2)$

$\therefore\ 244 = y^2 - (x + 42)^2$

$\therefore\ 244 = (y + x + 42)(y - x - 42)$

Now $y + x + 42$ and $y - x - 42$ are positive intergers and their product (244) is even. So at least one of them must be even. But if one of them is even, then both are even. (why ?)

$\therefore (y + x + 42)(y - x - 42) = 122 \times 2$

$\therefore\ y + x + 42 = 122$ and $y - x - 42 = 2$

$\therefore\ y + x = 80$ and $y - x = 44$

$\therefore\ y = 62$ and $x = 18$

$\therefore\ 4x-y = 72 - 62 = 10$

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો : અંક-315

(7) Let a and b are real numbers such that $ab \neq 1$. If $a^2 + 12a + 3 = 0$ and $3b^2 + 12b+1 = 0$, then find $\frac{ab+a+1}{b}$.

ધારો કે a અને b એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે જેથી $ab \neq 1$. જો $a^2 + 12a + 3 = 0$ અને $3b^2 + 12b+1 = 0$ હોય તો, $\frac{ab+a+1}{b}$ શોધો.

(8) If $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+ a_nx^n$ then prove that $(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + ...)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + ...)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$.

જો $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+ a_nx^n$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + ...)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + ...)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$.

(9) Prove that $\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = 2^{n-2}\, n(n+1)$.

સાબિત કરો કે $\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = 2^{n-2}\, n(n+1)$.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ગણિત સમાચાર

1.

22 જુલાઈ પાઇ એપ્રોક્સીમેશન ડે તરીકે ઉજવવામાં આવે છે. આ સંદર્ભમાં વિવેકાનંદ વિદ્યાલય, વડનગર મુકામે વિવિધ પ્રવૃત્તિઓનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું.

શાળાના આચાર્ય કલ્પેશભાઈ અખાણીએ પાઇ વિશે રસપ્રદ માહિતી આપી હતી. શાળાના વિજ્ઞાન શિક્ષક પુરીબેન ચૌધરી, જાગૃતિબેન રબારી, તેમજ બાબુભાઈ સોલંકી, રાજુભાઈ રાજદેવ અને દિનેશભાઈ ચૌધરીના માર્ગદર્શન હેઠળ વિદ્યાર્થીઓએ પાઇની રંગોળી વિવિધ અનાજ તથા કઠોળનો ઉપયોગ કરી બનાવી હતી. વિદ્યાર્થીઓએ પાઇનું 50 દશાંશ સ્થળ સુધી મૂલ્ય પેપર પર લખી વિદ્યાર્થીઓએએ સાંકળ રચી હતી.

2.

એલ.ડી. ઈજનેરી કૉલેજ, અમદાવાદ દ્વારા તા.21-09-2024ના રોજ રાજ્ય સ્તરની ગણિત સ્પર્ધા Mathematics Challenge 2024નું આયોજન કરવામાં આવ્યું. જેમાં ગુજરાત રાજ્યની ઈજનેરી તથા વિજ્ઞાન પ્રવાહની કોલેજોમાંથી અપેક્ષા બહાર કુલ 100 ટીમોનાં રજીસ્ટ્રેશન થયાં. જે પૈકી કેટલાંક માનકો ધ્યાનમાં રાખી કુલ 16 કૉલેજની 26 ટીમોની પસંદગી કરવામાં આવી. દરેક ટીમમાં ત્રણ વિદ્યાર્થી સામેલ હતા. સ્પર્ધા ત્રણ રાઉન્ડમાં વિભાજિત કરવામાં આવેલ. ભાગ લેનાર ટીમની પ્રોબ્લેમ સોલ્વિંગ એબિલિટી, વિશ્લેષણની સ્કિલ તથા મેન્ટલ એજીલીટીનું મૂલ્યાંકન કરવામાં આવ્યું. વિદ્યાર્થીઓનો ઉત્સાહ ઉલ્લેખનીય હતો. આ સ્પર્ધાનું આયોજન ડૉ. નિલય ભૂપતાની, પ્રિન્સિપાલ, એલ.ડી. ઈજનેરી કૉલેજના માર્ગદર્શન હેઠળ થયું હતું. આ સ્પર્ધાનું સફળ આયોજન ડૉ. સંજય પટેલ, સાયન્સ અને હ્યુમેનિટીસ વિભાગના વડા તથા તેમની ટીમ દ્વારા કરવામાં આવેલ. Mathematics Challenge 2024 નું આયોજન ગુજરાત ગણિત મંડળ, પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન, પ્રા.એ.એમ વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન તથા અમદાવાદ ગણિત મંડળના સહયોગથી થયેલ હતું. આ સ્પર્ધામાં એલ.ડી. ઈજનેરી કૉલેજ,

અમદાવાદની ટીમ વિજેતા રહી જેમાં મયંક મહેતા, મિહિર ભોગાયતા અને મહર્ષિ વ્યાસ વિજેતા રહ્યા અને વી.વી.પી. રાજકોટની વિદ્યાર્થિનીઓ પરમાર ભૂમિ, અક્ષદા શાહ અને રાઠોડ ઋત્વીની ટીમ રનર અપ જાહેર થઇ. આ બંને ટીમ ને ટ્રોફી તથા રોકડ પુરસ્કારથી સંમાનિત કરવામાં આવ્યા હતા. ગુજરાત ગણિત મંડળ દ્વારા આ બંને ટીમને પાંચ વર્ષ માટે સભ્યપદ આપવામાં આવ્યું. ઉપરાંત ભાગ લેનાર દરેક ટીમના સભ્યોને સર્ટિફિકેટ આપી પોત્સાહિત કરવામાં આવ્યા હતા.

આ કાર્યક્રમમાં ગુજરાત ગણિત મંડળ વતી મંત્રી શ્રી કૌશલભાઈ કે. શાહ તથા સહમંત્રી ડૉ. સચીન જે. ગજ્જર, પ્રા. એ.એમ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન વતી ડૉ. ઉદયન એમ. પ્રજાપતિ અને અમદાવાદ ગણિત મંડળ વતી પ્રમુખ શ્રી મોહમ્મદ હુસેન ગેણા સાહેબ હાજર રહ્યા હતા.

Funny ! Isn’t it ?

Husband borrowed Rs 250 from wife.
After a few days he again borrowed Rs 250.
After few days she asked husband to return the money.
When asked how much ?
Wife said that he owes her Rs 4100.
On request, below is the maths given by wife.

1) Rs 2 5 0
2) Rs 2 5 0

Rs 4 10 0

Husband is still finding the school where she learned Maths.
Husband gave her Rs 400 back and asked, ‘how much balance he has to pay back’
She wrote

Rs 4 1 0 0
Rs 4 0 0

0 1 0 0

He gave back Rs 100
Both lived happily ever after.

(M) 9712346664
પ્રેષક : નિલેશ માંડલિયા
અમદાવાદ.

ગુજરાત ગણિત મંડળનું ૬૧ મું વાર્ષિક અધિવેશન

તા. ૧૦ થી ૧૨ નવેમ્બર ૨૦૨૪, સ્થળ : ઓક્સફર્ડ સ્કૂલ ઓફ સાયન્સ અમરેલી,

રજી. તારીખ : ૨૨ ઓક્ટોબર સુધી

ઓક્સફર્ડ સ્કૂલ ઓફ સાયન્સ - અમરેલી

કેરીયારોડ, સંજોગ ન્યૂઝની બાજુમાં અમરેલી,02792 230010/20 મો. 6352929855

આમંત્રણ

ગુજરાત ગણિત મંડળનું ૬૧ મું વાર્ષિક અધિવેશન

આત્મીયશ્રી,

નમસ્કાર

ઓક્સફર્ડ સ્કૂલ ઓફ સાયન્સ – અમરેલી ખાતે તા. 10, 11, 12 નવેમ્બર-2024 દરમ્યાન યોજવામાં આવનાર ગુજરાત ગણિત મંડળના અધિવેશનમાં ભાગ લેવા માટે આમંત્રણ આપતા તથા કાઠીયાવાડની આ ધીંગી ધરા માં આપની મહેમાનગતિનો અમોને લાભ મળવાનો છે તે બદલ અમો હર્ષ અને ધન્યતા અનુભવીએ છીએ.

દર વર્ષની જેમ આ વર્ષે પણ અધિવેશનમાં ખૂલ્લી ચર્ચા, લોકભોગ્ય પ્રવચનો, પ્રશ્ન સંધ્યા, આમંત્રિતોના વ્યાખ્યાનો વગેરેનું આયોજન કરવામાં આવેલ છે.

- અધિવેશનના તમામ કાર્યક્રમો તથા રહેવા-જમવાની સંપૂર્ણ વ્યવસ્થા ઓક્સફર્ડ સ્કૂલ ઓફ સાયન્સ શાળા કેમ્પસમાં જ કરવામાં આવેલ છે.
- અધિવેશનમાં ભાગ લેનાર પ્રતિનિધિઓએ નીચે આપેલ ગૂગલ ફોર્મની લીંક દ્વારા અગાઉથી રજીસ્ટ્રેશન કરાવવું જરૂરી છે જેથી અમો આપ મહેમાનોને ત્રણ દિવસનાં અધિવેશનમાં સારી સુવિધા આપી શકીએ.

લીંક : https://forms.gle/SXEHQF1DPVbsFwSM6

- ઉપર આપેલ લીંક દ્વારા રજીસ્ટ્રેશન સાથે પેમેન્ટ કરવા માટે બારકોડ ની સુવિધા છે.
- ઉદ્દઘાટન સમારંભ તા. 10 – નવેમ્બર, 2024 ને રવિવારે સવારે 10 કલાકે રાખવામાં આવેલ છે.

રજીસ્ટ્રેશન ફી ની વિગત

ગણિત મંડળના સભ્ય માટે = રૂ. 1100

અધિવેશનમાં રસ ધરાવનાર અન્ય સભ્ય માટે = રૂ. 1300

અધિવેશનમાં રસ ધરાવનાર વિદ્યાર્થી માટે = રૂ. 500

લેટ રજીસ્ટ્રેશનનો ચાર્જ રૂ. 200 એક્સ્ટ્રા લેવામાં આવશે.

- અધિવેશનના સમયે સ્થળ પર રૂબરૂ રજીસ્ટ્રેશન માટે : રૂ. 2000

તા. 22 – ઓક્ટોબર સુધીમાં રજીસ્ટ્રેશન કરાવવું.

તા. 23 – ઓક્ટોબર થી તા. 27 – ઓક્ટોબર સુધી લેટ રજીસ્ટ્રેશન ગણાશે.

-: Bank Details :-

BANK NAME : HDFC BANK

AC. NO. : 50200033221010

AC. NAME : OXFORD SCHOOL OF SCIENCE

IFSC CODE : HDFC0000595

રજીસ્ટ્રેશન ફી માટે

અધિવેશન અંગે સંપર્ક

- ગૌતમભાઈ ગજેરા : 90991 00464
- જતીનભાઈ કાબરીયા : 94263 74042
- ઘનશ્યામભાઈ ઠુમર : 82004 07878
- પ્રદિપભાઈ માંગરોળીયા : 89057 51001

સોનેરી તક

- ગુજરાત ગણિત મંડળના સભ્ય ના હોય તેઓ આ અધિવેશનમાં ભાગ લઈ આગામી ત્રણ વર્ષ ૨૦૨૫ – ૨૦૨૭ માટે ગુ.ગ.મં. ના વિનામૂલ્યે સભ્ય બનવાની તક રખેચૂકતા.

અધિવેશનનું સ્થળ અને સરનામું

- ઓકસફર્ડ સ્કૂલ ઓફ સાયન્સ
  કેરીયા રોડ – બાયપાસ, સંજોગ ન્યૂઝની બાજુમાં – અમરેલી
  ફોન નં. (02792) 230010 / 20 , મો. નં. : 6352929855

આયોજક કમિટી

- શ્રી એચ.એલ.પટેલ સાહેબ
- શ્રી એસ.કે.પાઠક
- શ્રી આર.કે.માલનીયા
- શ્રી આર.વી.વિસાવળીયા
- શ્રી પી.બી.રાજ્યગુરૂ
- શ્રી ડી.બી.લલાડીયા
- શ્રી મયુર ગજેરા
- શ્રી નિલેષ ગજેરા
- શ્રી પ્રહલાદ વામજા

તંત્રી મંડળ :

1.	પ્રા. દેવભદ્ર વી. શાહ (મુખ્ય તંત્રી)	(M) 9898057891
2.	પ્રા. વિઠ્ઠલભાઈ એ. પટેલ	(M) 9428019042
3.	પ્રા. સચિન ગજ્જર	(M) 9925362754
4.	શ્રી મેઘરાજ જ. ભટ્ટ	(M) 9925837247
5.	સુ. શ્રી નીતાબેન સંઘવી	(M) 9825625218
6.	પ્રા. કૌશિક ટી. ઠાકર	(M) 9825867429
7.	પ્રા. હેમાબેન વસાવડા	(M) 9409157840
8.	પ્રા. ઉદયન પ્રજાપતિ	(M) 9426383343
9.	પ્રા. રેખાબેન મહેતા	(M) 9879328129