RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

વર્ષ : 62 ઈ-આવૃત્તિ-8 સળંગ અંક : 313 એપ્રિલ-2024

For Private Circulation Only

મુખપૃષ્ટ પરનો ગણિતજ્ઞ

હ્યુગો ડુમિનીલ-કોપિન (Hugo Duminil-Copin)

Date of Birth : 26th August, 1985

email : suganitam2018@gmail.com

આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

સંવર્ધક તંત્રી
ડૉ. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

અનુક્રમણિકા

સળંક અંક : 313 ઈ-આવૃત્તિ-8 એપ્રિલ-2024

સંપાદકીય

આ સાથે સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 313 આપના હાથમાં મૂકતાં આનંદ અનુભવીએ છીએ. આ અંકમાં અંગ્રેજીમાં લખાયેલ લેખોનું પ્રમાણ વધુ જોવા મળશે, જે લેખકો તથા વાચકોની બદલાઈ રહેલ અભિરુચિ દર્શાવે છે.

તા.19-20 ફેબ્રુઆરી, 2024 દરમિયાન IITE, ગાંધીનગર તથા ગુજરાત ગણિત મંડળના સંયુક્ત ઉપક્રમે ‘5th Prof. P. C. Vaidya National Conference on Mathematical Sciences’નું સફળ આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું, જેનો સંક્ષિપ્ત અહેવાલ આ અંકમાં સામેલ છે. આ અધિવેશનના સુંદર આયોજન માટે યજમાન સંસ્થાને અભિનંદન.

સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થતા લેખોના લેખકોએ લેખ લખવા માટે કરેલ પ્રયત્નને બિરદાવવા માટે અને તેમણે કરેલ ખર્ચને આંશિક રીતે ભરપાઈ કરવા માટે લેખકોને પુરસ્કાર આપવામાં આવે છે, જેની વિગત અંક 311માં જાહેર કરવામાં આવેલ છે. આ વિગત આ અંકમાં પણ પુનઃપ્રકાશિત કરેલ છે.

આ અંકને તૈયાર કરવા માટે હરહંમેશની જેમ જહેમત ઉઠાવનાર પ્રા. પ્રહલાદભાઈ વ્યાસનો સંપાદક મંડળ ખાસ આભાર માને છે.

સુગણિતમ્‌ને સમૃદ્ધ બનાવવા માટેનાં આપનાં સૂચનો અને પ્રગટ થયેલા અંકો વિશે આપના અભિપ્રાયો આવકાર્ય છે.

અત્યાર સુધી જે ઉમળકાભર્યો આવકાર સુગણિતમ્‌ને મળેલ છે તે આગળ પણ ચાલુ રહેશે એવી આશા.

- સંપાદકો

અવસાન નોંધ

ડો. એન.એલ. કળથિયા

ગુજરાત ગણિત મંડળના સ્થાપક સભ્યોમાંના એક, સન્નિષ્ઠ પ્રાધ્યાપક અને સંશોધક એવા ડૉ. એન.એલ. કળથિયા સાહેબનું 13 ફેબ્રુઆરી, 2024ના રોજ દુઃખદ નિધન થયું છે. સુગણિતમ્ પરિવાર, ગુજરાત ગણિત મંડળ, પ્રા.એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન તથા પ્રા.એ.એમ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન તેમને હાર્દિક શ્રધ્ધાંજલિ આપે છે. પ્રભુ તેમના આત્માને શાંતિ આપે.

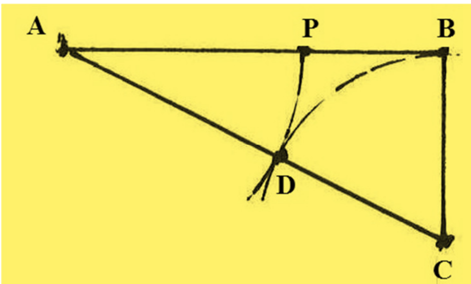
સો અંક પહેલાં

[સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 213 જાન્યુઆરી-ફેબ્રુઆરી 2005નો હતો. આ અંકની ગણિતનોંધપોથીમાંથી શ્રી રણછોડભાઈ એમ. પટેલે લખેલ લેખ - સુવર્ણ ગુણોત્તરની ભૌમિતિક રચના અને તે દ્વારા નિયમિત પંચકોણની રચના અત્રે પુનર્પ્રકાશિત કરેલ છે - પ્રધાન સંપાદક]

સુવર્ણ ગુણોત્તરની ભૌમિતિક રચના અને તે દ્વારા નિયમિત પંચકોણની રચના :

અંક 209માં પ્રા. રમેશભાઈ દેસાઈ સાહેબે સુવર્ણ વિભાજનની વ્યાખ્યા આપી છે. રેખાખંડ AB પર P બિંદુ એવું હોય કે જેથી $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$ થાય, તો P બિંદુ રેખાખંડ ABનું **સુવર્ણ વિભાજન** કરે છે તેમ કહેવાય અને ગુણોત્તર $\frac{AP}{PB}$ (અથવા $\frac{AB}{AP}$)ને **સુવર્ણ ગુણોત્તર** કહેવાય.

(1) સુવર્ણ વિભાજનની ભૌમિતિક રચના :



આકૃતિ-1

AB આપેલ રેખાખંડ છે. ABને લંબ હોય તેવો રેખાખંડ BC રચો કે જેની લંબાઈ $\frac{1}{2}$ AB થાય. રેખાખંડ AC પર D બિંદુ એવું રચો કે જેથી CD = BC થાય. A કેન્દ્ર લઈ, AD જેટલી ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ ABને જ્યાં છેદે ત્યાં બિંદુ P લો. બિંદુ P એ રેખાખંડ ABનું સુવર્ણ વિભાજન કરે છે.

સાબિતી : ΔABCમાં

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$

$\therefore (AD+DC)^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2$

$\therefore (AP+\frac{1}{2}AB)^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2$

(કારણ : AD = AP, DC = BC = $\frac{1}{2}AB$)

$\therefore AP^2 + AP \cdot AB = AB^2$

$\therefore AP^2 = AB^2 - AP \cdot AB = AB\,(AB-AP)$

A–P–N હોવાથી AB–AP = PB

$\therefore AP^2 = AB \cdot PB$ એટલે કે $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$ .... (1)

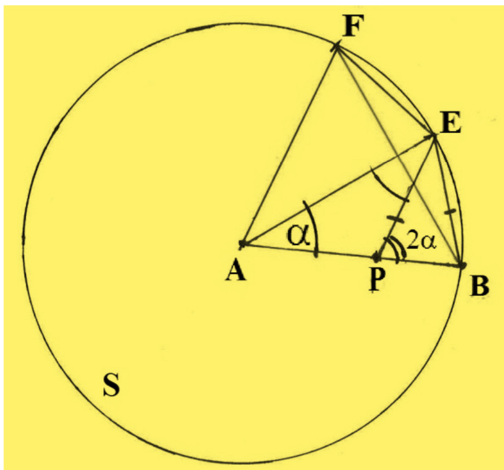
આમ, P બિંદુ ABનું સુવર્ણ વિભાજન કરે છે.

(2) **આપેલા વર્તુળમાં અંતર્ગત સમદશકોણ અને સમપંચકોણની રચના :**

સ્પષ્ટ છે કે વર્તુળની કોઈ જીવા વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે 36° માપનો ખૂણો રચે તો તે જીવા તે વર્તુળમાં અંતર્ગત નિયમિત દશકોણની એક બાજુ છે. કારણ : $\left(\frac{360}{10} = 36\right)$

રચના : ધારો કે આપેલ વર્તુળ Sનું કેન્દ્ર A છે અને તેની એક ત્રિજ્યા AB છે. આગળ કરી ગયા તે રચના (1) મુજબ ABનું સુવર્ણ વિભાજન કરતું બિંદુ P મેળવો (એટલે કે AP : PB = AB : AP થાય અથવા $AP^2 = AB \cdot PB$ થાય તેવું બિંદુ P રેખાખંડ AB પર મેળવો.)

આકૃતિ-2 માં દર્શાવ્યા મુજબ, વર્તુળ S પર, બિંદુઓ E અને F મેળવો કે જેથી BE = EF = AP થાય.



આકૃતિ-2

આપણે સાબિત કરીશું કે BE (=AP) એ વર્તુળ Sની જીવા છે જે વર્તુળના કેન્દ્ર A આગળ 36° માપનો ખૂણો બનાવે છે.

સાબિતી :

ΔABE સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. AB=AE= વર્તુળ S ની ત્રિજ્યા

$\therefore \angle ABE \equiv \angle AEB$

$\therefore \angle PBE \equiv \angle AEB$ .... (1)

બિંદુ P રેખાખંડ ABનું સુવર્ણ વિભાજન કરે છે.

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$

$\therefore \frac{BE}{BP} = \frac{AE}{BE}$

કારણ : AP = BE અને AB = AE

$\therefore \Delta PBE \sim \Delta EBA$ ($PBE \leftrightarrow EBA$ સમરૂપતા છે)

$\therefore \angle PEB \equiv \angle EAB$

અને $\angle BPE \equiv \angle BEA \equiv \angle EBA = \angle EBP$

$\therefore \Delta PBE$ સમદ્વિબાજુ છે જેમાં EP = EB (=AP)

$\therefore \Delta APE$ સમદ્વિબાજુ છે જેમાં AP = PE

$\therefore \angle EAP = \alpha$ લઈએ તો $\therefore \angle AEP = \alpha$

$\therefore \angle EPB = \angle EBP = 2\alpha$

$\therefore \angle PEB = \alpha$

ΔPEB ના ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો $= 180^\circ$

$\therefore 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$

$\therefore 5\alpha = 180^\circ \quad \therefore \alpha = 36^\circ$

$\therefore \angle EAB = 36^\circ$

આમ, આપેલા વર્તુળની જીવા BE વર્તુળના કેન્દ્ર A પાસે 36° માપનો ખૂણો રચે છે. તેથી BE એ આપેલ વર્તુળમાં અંતર્ગત નિયમિત દશકોણની એક બાજુ છે.

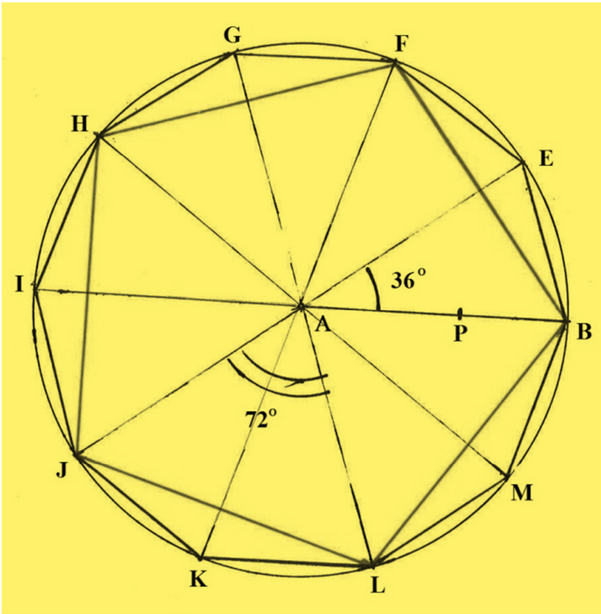
હવે, BE = EF (રચના)

$\therefore \angle EAF = \angle BAE = 36^\circ$

$\therefore \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = 72^\circ = \frac{1}{5}(360^\circ)$

$\therefore$ જીવા BF એ વર્તુળ Sમાં અંતર્ગત નિયમિત પંચકોણની એક બાજુ છે.

વર્તુળ Sમાં અંતર્ગત નિયમિત પંચકોણ અને દશકોણ નીચેની આકૃતિ-3માં દર્શાવ્યા છે.



આકૃતિ-3

B E F G H I J K L M નિયમિત દશકોણ છે.

B F H J L નિયમિત પંચકોણ છે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

કળથિયા સાહેબને શ્રધ્ધાંજલિ રૂપે લખાયેલા કેટલાક લેખ અમને મળ્યા છે તે આવતા અંકમાં પ્રગટ થશે. સુગણિતમ્નો હવે પછીનો, જુલાઈ 2024નો અંક સ્વ.ડૉ. એન.એલ.કળથિયા સાહેબને સમર્પિત કરવામાં આવનાર છે. આપનાં પ્રા. કળથિયા સાહેબ સાથેનાં સંસ્મરણો રજૂ કરવા માટે આપને આમંત્રણ છે. આપની પાસે સ્વ. કળથિયા સાહેબના કોઈ ફોટોગ્રાફ્સ હોય તો તે પણ મોકલવા વિનંતી છે. આપના લેખ અને ફોટોગ્રાફ્સ 15 મે, 2024 સુધીમાં મોકલી આપશો.

ઉઘાડી રાખજો બારી

એમ. એચ. વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9824669364

5મી માર્ચ, 2024ના રોજ રાજકોટના શ્રી ઓ.વી. શેઠ લોકવિજ્ઞાન કેન્દ્ર અને પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશનના સંયુક્ત ઉપક્રમે રાજકોટમાં ધોરણ-9 અને 10ના ગણિત શિક્ષકો માટે એક દિવસીય કાર્યશિબિર યોજવામાં આવ્યો હતો. આ શિબિરના કાર્યક્રમનો વિગતવાર અહેવાલ સુગણિતમ્‌ના આ જ અંકમાં અન્યત્ર જોવા મળશે. એટલે તેની વિગત અહીં નહીં આપું. માત્ર શિબિરના ઉદ્દેશોની વાત કરીશ. શિક્ષકો માટેના શિબિરમાં સામાન્ય રીતે અભ્યાસક્રમ કે અભ્યાસક્રમનાં વિષયાંગ કે ગાણિતિક પ્રશ્નોના ઉકેલોની ચર્ચા થાય છે. પ્રસ્તુત શિબિરનો હેતુ ગણિતના વર્ગ શિક્ષણ અંગે ચર્ચા કરવાનો હતો. શાળામાં ભણાવાતા ગણિત અંગે એક છાપ એવી છે કે એ અઘરું છે, કંટાળાજનક છે અને નિરૂપયોગી છે. વર્ગશિક્ષણમાં બદલાવ લાવીને ગણિત માટેની આવી છાપમાં બદલાવ લાવી શકાય કે કેમ એ બાબતની ચર્ચા કરવાનો શિબિરનો હેતુ હતો. આ હેતુ ધ્યાનમાં રાખીને શિબિરના શૈક્ષણિક કાર્યક્રમને કેટલાક ભાગોમાં વહેંચવામાં આવ્યો હતો.

(1) મૂળભૂત ખ્યાલોની ચર્ચા

(2) વર્ગશિક્ષણ રસપ્રદ કેવી રીતે બનાવી શકાય?

(3) ગણિતની ઉપયોગિતા

(4) રોજબરોજના જીવનમાં ગણિત

(5) અસરકારક વર્ગશિક્ષણ

આપણું વર્ગશિક્ષણ ઘણું ખરું અભ્યાસક્રમ, પાઠ્યપુસ્તક અને પરીક્ષાના ચોકઠામાં સીમિત રહે છે. શિક્ષણમાં તાજગી અને નાવિન્ય લાવવા માટે આ ચોકઠાની બહાર જવું અને જોવું જરૂરી છે. જેમ ઘરમાં ગમે તેટલી સગવડો હોય તો પણ તાજી હવા અને સૂર્યપ્રકાશ માટે બારીઓ ખુલ્લી રાખવી જરૂરી છે, જેમ ટ્રેઇનના પ્રવાસમાં ડબ્બામાં ગમે તેટલી સુવિધાઓ હોય છતાં બહારનાં દૃશ્યો માણવા માટે બારી બહાર જોવું જરૂરી છે, તેમ વર્ગ શિક્ષણમાં પણ અભ્યાસક્રમ અને પાઠ્યપુસ્તકની બહાર જોવું જરૂરી છે. બારી બહાર શું જોઈ શકાય અને વર્ગ શિક્ષણ સાથે એ કઈ રીતે સાંકળી શકાય એ બાબતની ચર્ચા શિબિરનો મુખ્ય હેતુ હતો.

ભાવનગરના એક સમયના દીવાન સર પ્રભાશંકર પટ્ટણીની 'ઉઘાડી રાખજો બારી' એ શીર્ષકની એક કવિતા છે. એ કવિતાની શરૂની બે કડીઓ નીચે પ્રમાણે છે :

દુઃખી કે દર્દી કે કોઈ ભૂલેલા માર્ગવાળાને
વિસામો આપવા ઘરની ઉઘાડી રાખજો બારી

ગરીબની દાદ સાંભળવા, અવરનાં દુઃખને દળવા,
તમારાં કર્ણનેત્રોની ઉઘાડી રાખજો બારી

આ કવિતાનો આધાર લઈને મેં શિબિરના અંતભાગમાં શિક્ષક મિત્રોને નીચેની કવિતા સંભળાવી હતી.

ગણિતની શુષ્કતા હરવા, ગણિતમાં રૂચિ કેળવવા,
પીરસવા જ્ઞાનને ગમ્મત, ગણિતનાં અચરજો કહેવા,
તમારા વર્ગશિક્ષણની ઉઘાડી રાખજો બારી.

કહેવા વાત યુક્લિડની, કદી ન્યૂટન લીબ્નીટ્ઝની
અને ભાસ્કર-માધવની, ભારતના સપૂતોની
તમારા વાંચનાલયની ઉઘાડી રાખજો બારી

પાયથાગોરસ ત્રિપૂટીઓ, ને વળી સંપૂર્ણ સંખ્યાઓ
જાદુઈ ચોરસ તણી કહાની, ફિબોનાચીની મિજબાની
કહેવા આ રસિક વાતો, ઉઘાડી રાખજો બારી.

પ્લેટોના ઘનાકારો, શહેરી સાત સેતુઓ,
પ્રમેય પાપસ, પાસ્કલનાં, કથા પાઈ તણી કહેવા
પાઠ્યપુસ્તકની બહાર જોવા, ઉઘાડી રાખજો બારી.

કહેવા વાત ઈતિહાસની, ગણિતીઓના જીવનની
પ્રેરક કે હાસ્ય પ્રસંગોની, મજા લૂંટવા કોયડાની
તમારા દિલને દિમાગની, ઉઘાડી રાખજો બારી

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

કાચબા-સસલાની વાર્તા

પ્રા. કૌશિક ઠાકર
ગણિત વિભાગ, ગુજરાત યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ
(M) 98258 67429

સમાજમાં સામાન્ય રીતે એવી માન્યતા પ્રવર્તે છે કે ગણિત ખૂબ જ શુષ્ક, અઘરો અને બોજારૂપ વિષય છે. સમાજની આ માન્યતા સાથે હું સહમત નથી. સંગીત અને સાહિત્યની જેમ ગણિત વિષય પણ રસમય છે. ગણિત સપ્તરંગી છે. ગણિતમાં પણ ગઝલો અને વાર્તાઓ રહેલી છે. ગણિતમાં રહેલાં સંગીત-સાહિત્ય અનુભવવા માટે સહેજ યત્ન કરવાની જરૂર છે.

कौन सी जा है जहाँ जल्वा-ए-माशूक़ नहीं
शौक़-ए-दीदार अगर है तो नज़र पैदा कर

- अमीर मीनाई (जा=जगह, अवसर)

બાળપણથી આપણે કાચબા અને સસલાની વાર્તાથી પરિચિત છીએ. કાચબા અને સસલા વચ્ચે દોડવાની સ્પર્ધાનું આયોજન થાય છે. સસલો અભિમાની છે, કાચબો નમ્ર છે. સસલો તેજ છે જ્યારે કાચબો ધીમી છતાં અવિરત ચાલ ચાલે છે. સ્પર્ધાની શરૂઆતના તબક્કામાં સસલો પોતાની તેજ દોડથી કાચબાથી ખૂબ આગળ નીકળી જાય છે. કાચબો મંદ છતાં મક્કમ ચાલે છે. અંતે, કાચબો જીતી જાય છે. Slow and steady wins the race. (આ જ વાર્તાને કેન્દ્રમાં રાખીને વર્ષ 1982માં ફિલ્મ નિર્દેશક સાઇ પરાંજપેએ પ્રણયકથા ધરાવતી એક સુંદર ફિલ્મ 'કથા'નું નિર્માણ કર્યું હતું)કાચબા અને સસલાની આ વાર્તા ગણિતમાં પણ મોજૂદ છે!

એક ઉદાહરણ દ્વારા આ વાત સમજવા પ્રયત્ન કરીએ.

બે વિધેયો $K(x)=e^x$ અને $S(x)=x^{100}$ લઈએ. માની લો કે આ બંને વિધેયોનો પ્રદેશગણ $(2, \infty)$ છે. (K એટલે કાચબો, S એટલે સસલો)

$x=2$ માટે $K(2)=e^2$ અને $S(2)=2^{100}$ થશે. આમ $x=2$ માટે $K(x)$ની કિંમત e^2 એટલે કે 9 થી ઓછી થાય જ્યારે $S(x)$ ની કિંમત 2^{100}, 31 આંકડાથી બનેલી કોઈક વિશાળ સંખ્યા છે ! આમ $x=2$ બિંદુએ ($x=2$ સમયે) સસલો કાચબાથી ખૂબ આગળ છે.

$x=3$ માટે $K(3)=e^3$ અને $S(3)=3^{100}$ થશે. આમ $x=3$ માટે $K(x)$ની કિંમત 27 થી ઓછી થાય જ્યારે $S(x)$ ની કિંમત ખૂબ જ મોટી, 48 આંકડાંથી બનેલી કોઈક વિશાળ સંખ્યા છે! એટલે કે $x=3$ સમયે સસલો કાચબાથી ઘણો વધારે આગળ નીકળી ગયો છે.

$x=4, 5, 6, ...500$ માટે પણ જોઈ શકાય છે કે $S(x)$ ની કિંમત $K(x)$ની કિંમતથી મોટી છે. એટલે $x=4, 5, 6, ..., 500$ સમયે પણ સસલો મોખરે છે. અત્યાર સુધી ભલે સસલોરાણો આગળ દોડી રહ્યો હોય અને કાચબાભાઈ પાછળ હોય પણ છેવટે xની એક એવી કિંમત મળશે (એક સમય એવો આવશે) જ્યારે કાચબાભાઈ સસ્સારાણાથી આગળ નીકળી જશે. કાચબો સસલાને અતિક્રમી જશે અને એ પછી કાચબાભાઈ હંમેશા આગળ જ રહેશે.

અંતે કાચબાભાઈ વિજયી થશે.

આ વાર્તાને ગણિતની ભાષામાં કહેવી હોય તો આમ કહેવાય :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$$

xની કિંમત ઓછામાં ઓછી કઇ લેવી જોઈએ કે જેથી $x^{100} < e^x$ થાય? વાચકો આ પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવે.

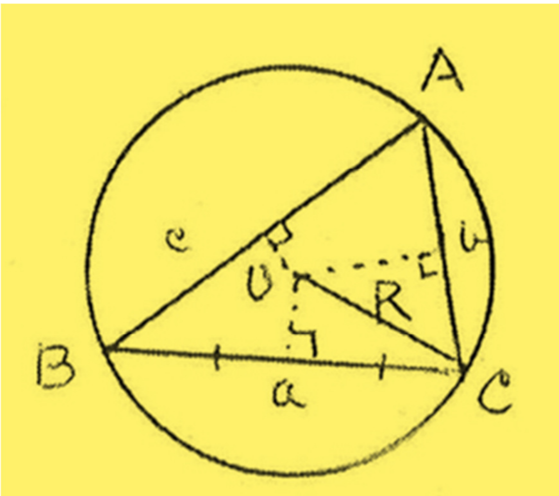
✦ ✦ ✦ ✦ ✦

જાણીતાનું અજાણ્યું – 7 : ત્રિકોણો સાથે સંકળાયેલાં વર્તુળો

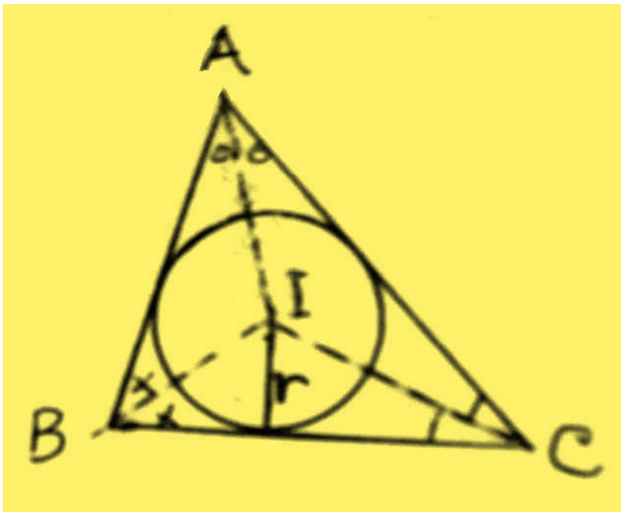
હેમા વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9409157840

ત્રિકોણો સાથે કેટલાંક વર્તુળો ખૂબ સાહજીકતાથી સંકળાયેલાં છે. આપણે સૌ તેમાંનાં બેથી સારી રીતે પરિચિત છીએ – પરિવૃત્ત (કે પરિવર્તુળ) અને અંતઃવૃત્ત (કે અંતઃવર્તુળ).

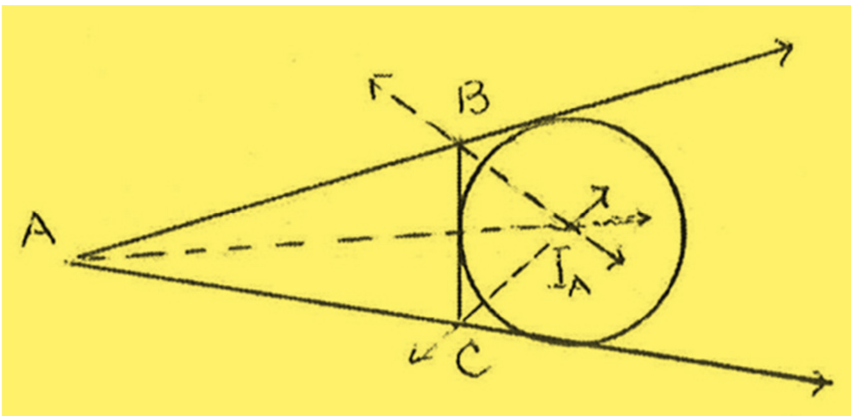
પરિવર્તુળ આપેલા ત્રિકોણના ત્રણેય શિરોબિન્દુમાંથી પસાર થવું વર્તુળ છે. તેનું કેન્દ્ર એ આપેલા ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદ્વિભાજકોનું સંગમબિંદુ છે. (આકૃતિ 1). અંતવર્તુળ આપેલા ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શતું વર્તુળ છે. તેનું કેન્દ્ર, અંતઃકેન્દ્ર, ત્રિકોણના કોણદ્વિભાજકોનું સંગમબિન્દુ છે (આકૃતિ-2). અહીં જો એક ખૂણાનો અંતઃદ્વિભાજક અને બીજા બેના બહિર્દ્ભાજકો લઈએ તો પણ તે સંગામી થશે અને પહેલાંની માફક જ ત્રણે બાજુઓને, અલબત્ત બહારથી, સ્પર્શતું વર્તુળ, બહિર્વર્તુળ મળશે, જેનું તે કેન્દ્ર થશે (આકૃતિ-3). આમ, પરિવર્તુળ (ત્રિકોણના શિરોબિન્દુઓ વડે નિશ્ચિત થતું) અનન્ય છે. જ્યારે અંતઃવર્તુળને ત્રણ બહિવર્તુળરૂપી સાથીદારો છે. પરિવર્તુળ અને અંતઃવર્તુળની ત્રિજ્યાને અનુક્રમે R અને r વડે દર્શાવાય છે.



આકૃતિ-1



આકૃતિ-2



આકૃતિ-3

સ્વાભાવિક છે કે, $R > r$.

આ બંને વર્તુળો વચ્ચે એક ધ્યાન ખેંચે તેવો નોંધપાત્ર સંબંધ છે – તેઓ એકબીજાનાં દ્વન્દ્વ છે. પહેલાં ભૂમિતિમાં દ્વન્દ્વ એટલે શું, તે સમજી લઈએ. કોઈ એક પરિણામમાં જ્યાં જ્યાં 'બિન્દુ' કે 'રેખા' આવતાં હોય તેની, તેમજ જ્યાં જ્યાં 'છેદવું' (અથવા 'પસાર થવું') કે 'સ્પર્શવું' આવતાં હોય તેની અદલાબદલી કરવાથી મળતાં નવા પરિણામને મૂળ પરિણામનું દ્વન્દ્વ કહે છે. દાખલા તરીકે આપેલા વર્તુળ માટે –

"કોઈપણ રેખા વર્તુળને બે, એક કે શૂન્ય બિંદુમાં છેદે." તેનું દ્વન્દ્વ "કોઈપણ બિન્દુમાંથી વર્તુળને બે, એક કે શૂન્ય રેખાઓ સ્પર્શે" થશે. હવે અહીં જોઈએ. જોવું હોય તો આમ જોઈ શકાય : કોઈ પણ ત્રિકોણમાં –

"પરિવર્તુળ ત્રણે શિરોબિન્દુઓ (બિન્દુઓ)માંથી પસાર થાય છે"

$\leftrightarrow$ "અંતઃવર્તુળ ત્રણે બાજુઓ (રેખાઓ)ને સ્પર્શે છે."

એટલું જ નહીં, પણ

"પરિવર્તુળનું કેન્દ્ર બાજુઓ (રેખાઓ)ના લંબદ્વિભાજકોનું સંગમબિંદુ છે"

$\leftrightarrow$ "અંતઃવર્તુળનું કેન્દ્ર ખૂણાઓ (બિંદુઓ)ના દ્વિભાજકોનું સંગમબિંદુ છે."

ત્રિકોણના પરિવર્તુળનો એક નવાઈ લાગે તેવો ગુણધર્મ છે, જે સ્કૉટલેન્ડ, UKના ગણિતશાસ્ત્રી સિમ્સને (1687-1768) બતાવીને સાબિત કર્યો છે. તેથી તેને સિમ્સનનું પ્રમેય કહે છે. તે આ પ્રમાણે છે :

પ્રમેય : કોઈપણ ત્રિકોણના પરિવર્તુળ પરના કોઈપણ બિન્દુમાંથી ત્રિકોણની બાજુઓ પર દોરેલા લંબના લંબપાદ સમરેખ થાય.

એટલે કે, ΔABCના પરિવર્તુળ પર કોઈપણ બિન્દુ P હોય, અને PL, PM અને PN એ બાજુઓ AB, BC, CA પર અનુક્રમે લંબ હોય, તો L, M અને N સમરેખ થાય, (આકૃતિ-4)

L, M અને N ને સમાવતી આ રેખાને P ની સાપેક્ષે સીમ્સન રેખા કહે છે.

સાબિતી :

PBML ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

(કારણ : $\angle BMP = \angle BLP = 90^o$)

$\Rightarrow \angle BPM = \angle BLM = \alpha$, માનો

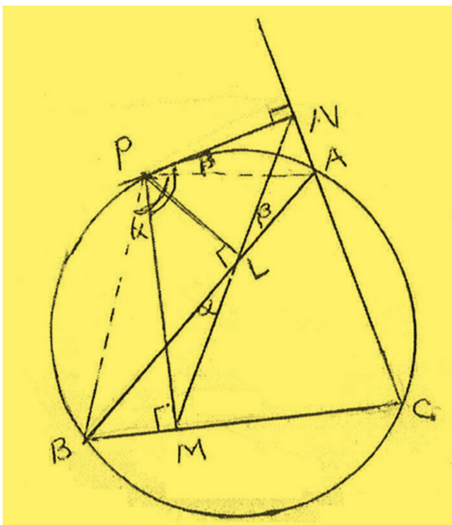
(એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ) .... (1)

તેમજ PLAN ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

(કારણઃ $\angle PLA + \angle PNA = 90^o + 90^o = 180^o$)

$\Rightarrow \angle NPA = \angle NLA = \beta$, માનો

(એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ) .... (2)



આકૃતિ-4

હવે $\angle BPA = 180^\circ - \angle C$ (કારણ : PBCA ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.)

એટલે કે, $\alpha + \angle MPA = 180^\circ - \angle C$ .... (3)

તેમજ $\angle MPN = 180^\circ - \angle C$

(કારણ : PMCN માં $\angle M + \angle N = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $\therefore$ PMCN ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.)

એટલે કે, $\beta + \angle MPA = 180^\circ - \angle C = \alpha + \angle MPA$ .... ((3) ઉપરથી)

$\Rightarrow \alpha = \beta$

$\Rightarrow \angle BLM = \angle ALN$ .... ((1) અને (2) પરથી)

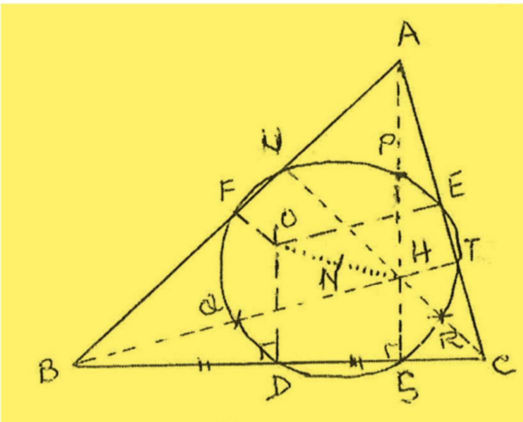
પરંતુ B-L-A સમરેખ છે અને LM તથા LN એ AB રેખાથી બનતા અર્ધતલોમાં વિરુદ્ધ અર્ધતલોમાં છે.

$\Rightarrow$ ML અને LN એક જ રેખા છે. અથવા, L, M અને N સમરેખ છે.

અહીં ધ્યાન ખેંચે તેવી બે બાબતો છે –

એક તો એ કે, આ સાબિતીમાં માત્ર ચક્રીય ચતુષ્કોણો અને તેના બે ગુણધર્મો જ વાપર્યા છે.

બીજું કે, કોઈપણ ત્રિકોણ લો, તેના પરિવર્તુળ પર કોઈપણ બિન્દુ લો, અને હંમેશા ઉપરોક્ત બિન્દુઓ સમરેખ જ થાય, એટલે કે તેની સાપેક્ષે સીમ્સન રેખા મળે જ – આ વાત બહુ આશ્ચર્યજનક, માની ન શકાય તેવી, અને એટલે જ, ખૂબ સુંદર નથી લાગતી?



આકૃતિ-5

આવું જ એક, તરત માનવામાં ન આવે તેવું, ગણિતની અજાયબી સમું એક વર્તુળ ત્રિકોણ સાથે સંકળાયેલું છે. કોઈપણ ત્રણ બિન્દુઓ તો એક અનન્ય વર્તુળ નિશ્ચિત કરે. પણ ચાર બિન્દુઓ હોય તો... ને પાંચ હોય તો..... ? બધાં એક જ વર્તુળ પર ન પણ હોય. પરંતુ આ એક એવું વર્તુળ છે, જે કોઈપણ ત્રિકોણમાં, નિશ્ચિત રીતે આપેલાં, નવ બિન્દુઓમાંથી અચૂક પસાર થાય. આથી તેને ત્રિકોણનું નવ બિન્દુ વર્તુળ કહે છે. આ નવ બિન્દુઓ આ રીતનાં છે – ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓનાં મધ્યબિન્દુઓ, ત્રણે વેધના લંબપાદ અને દરેક શિરોબિન્દુને લંબકેન્દ્ર સાથે જોડતા રેખાખંડોનાં મધ્યબિન્દુઓ. જેમકે આકૃતિ-5માં આ બિન્દુ-ત્રિપુટિઓ (1) D,E,F (2) S, T, U અને (3) P, Q, R છે. સ્પષ્ટ છે કે આ વર્તુળ અનન્ય થાય. જોઈને એમ લાગે કે આ વર્તુળ દોરવામાં બહુ અઘરૂં હશે. (નવ બિન્દુઓમાંથી પસાર કરવાનું ને!) પરન્તુ તેવું નથી – આમાનાં કોઈપણ ત્રણ બિન્દુઓ લઈને દોરી શકાય ને ?

આ વર્તુળને આપેલા ત્રિકોણ સાથે બીજા પણ કેટલાક સંબંધો છે :

1. નવબિન્દુવર્તુળની ત્રિજ્યા $= \frac{1}{2}R$
2. નવબિન્દુવર્તુળનું કેન્દ્ર N, એ O અને H સાથે સમરેખ છે, તથા OH રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ છે.

આપણે આની સાબિતી અહીં ન આપતાં, **मधुरेण समापयेत्** કરીએ

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

Hunt for the solutions of Pell's equation

Dr. Devbhadra V. Shah
Department of Mathematics, VNSGU, Surat. (M): 9898057891

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક ક્રમાંક 312 માં શ્રી પી.કે. વ્યાસ સાહેબ દ્વારા લિખિત લેખ 'રાજેશકુમાર મેરના કોયડાનો ઉકેલ'માં તેઓએ એક પ્રશ્નના ઉકેલની વિસ્તૃત ચર્ચા કરી હતી. આ ચર્ચામાં તેમણે 'પેલના સમીકરણ'ના ખ્યાલનો ઉપયોગ કર્યો હતો. આ લેખ જોઈને મને પેલના સમીકરણના ઈતિહાસ અને તેને ઉકેલવા માટેની જરૂરી પદ્ધતિઓ વિશે વિગતવાર માહિતી આપવાની ઈચ્છા થઈ હતી. તેના ફળસ્વરૂપે મેં આ લેખ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કર્યો છે. આશા છે કે વાચકોને આ અખતરો પસંદ પડશે. આ લેખને સમજવા માટે સામાન્ય બીજગણિતનો ખ્યાલ જરૂરી છે. જો સંખ્યા ગણિતનો પાયાનો ખ્યાલ 'theory of congruences'ની પ્રાથમિક જાણકારી હશે તો આ લેખ પૂર્ણપણે સમજવામાં સુગમતા રહેશે.

Introduction:

In number theory, Pell's equation falls in the category of Diophantine equations named after the Greek mathematician *Diophantus.* Diophantine equations are equations for which integer solutions are desired. Such an equation may have no solution, a finite number of solutions or an infinite number of solutions. The famous Pythagorean equation $x^2 + y^2 = z^2$ is also a Diophantine equation.

In 1909, mathematician *Thue* proved the following important theorem:

Theorem: Let $F(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_1 xy^{n-1} + a_0 y^n; n \geq 3$. Then for an integer $m \neq 0$, the equation $F(x,y) = m$ has either no solution or only a finite number of solutions in integers.

This result is in contrast to the situation in which $n = 2$. In this case, if we consider $F(x,y) = x^2 - Dy^2$, then for $N \neq 0$, the equation $x^2 - Dy^2 = N$ may have infinitely many integral solutions! Specifically, the misnamed *Pell's equation* is used to refer any Diophantine equation of the form $x^2 - Dy^2 = N$; where D and N are fixed integers and we are looking for integers x and y that satisfy the equation.

If D is a perfect square, say $D = q^2$, then equation $x^2 - Dy^2 = N$ becomes $x^2 - (qy)^2 = N$. This factors as $(x - qy)(x + qy) = N$. Since x, y and q are all integers, the left-hand side of this equation must be product of two factors of N. Thus $x^2 - Dy^2 = N$ has only finite number of solutions. It could also happen that the equation has no solution.

In the equation $x^2 - Dy^2 = N$, if $D < 0$, say $D = -d$, then the equation becomes $x^2 + dy^2 = N$. This can be written in the form $\frac{x^2}{(\sqrt{N})^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{N}{d}}\right)^2} = 1$, which has the form of an ellipse (a closed curve). But any ellipse can have only finite number of integer points (x, y) on the circumference. Thus, $x^2 - Dy^2 = N$ (where $D < 0$) has only finite number of integer solutions. We thus assume that $D > 0$.

Again, it can be easily observed that $x^2 - Dy^2 = N$ can be written as $\frac{x^2}{(\sqrt{N})^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{N}{D}}\right)^2} = 1$, which is a Hyperbola. Thus, the integer solutions occur whenever the curve passes through a point whose x and y coordinates are both integers.

Thus, we consider N to be any nonzero integer and the integer D to be positive and non-square only. This condition is helpful because it leaves open the possibility of infinitely many solutions in positive integers x and y.

We now give formal definition of Pell's equation.

Definition: A *Pell's equation* is an equation of the form $x^2 - Dy^2 = N$, where D is a positive non-square integer and N is a nonzero integer, for which we attempt to find integer solutions x and y.

Some natural questions which arise at this stage are…

(a) Is there any algorithm or fixed procedure which can decide whether a given Pell's equation has a solution?

(b) Is there any algorithm for solving explicitly any given Pell's equation?

Our goal here in this article is not to describe the present status regarding these questions. It suffices to say that a complete answer to question (a) is not yet available. There is no complete procedure to decide whether any Pell's equation has a solution or not. Also, question (b) is unanswered.

Historical encounters:

Pell's equations have been of interest to mathematicians for centuries. There is perhaps no other equation that has influenced the development of number theory as much as Pell's equation. Pell's equation has a long and interesting history.

This very simple Diophantine equation has attracted mathematicians throughout the ages. There is historical evidence that methods for solving the equation were known to the Greeks some 400 years before the beginning of the Christian era. We find the reference of Pell's equation in a problem given by Archimedes in 200 BC. Indeed, there is very strong evidence that it was known to Archimedes, as the *Cattle Problem*. In *Arithmetica*, *Diophantus* asked for rational solutions to equations of the type $x^2 - Dy^2 = 1$. For the case $D = m^2 + 1$, he gave the integral solutions $x = 2m^2 + 1,\ y = 2m$.

The equations $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ have been studied by several Indian mathematicians also. In 8th century BC. *Baudhayana* noted that $x = 577,\ y = 408$ is a solution of $x^2 - 2y^2 = 1$ and he used the fraction $\frac{x}{y} = \frac{577}{408}$ to approximate the value of $\sqrt{2}$.

The equation $x^2 - Dy^2 = 1$ attracted attention of early mathematicians. Such equations and assertive rules, without any proof for calculating their solutions, spread to India more than a thousand years before they appeared in Europe, starting with *Brahmagupta* (598 – 668). He developed the *chakravala method* in 628 AD to solve Pell's equation in his *Brahma Sphuta Siddhanta* in 628, about a thousand years before Pell's time. This method could generate infinitely many solutions from an initial solution. Brahmagupta also solved quadratic indeterminate equations of the form $ax^2 + c = y^2$ and $ax^2 - c = y^2$. For example, he solved $8x^2 + 1 = y^2$ and obtained the solutions

$$(x, y) = (1,3), (6,17), (35,99), (204,577), (1189,3363), \ldots .$$

Later, *Bhāskara* (1114 – 1185) described the complete solution of Pell's equation and developed a cyclic algorithm to produce a solution of equation $x^2 - Dy^2 = 1$. Bhāskara worked extensively with the more general equation $x^2 - Dy^2 = N$, and even solved the equation $Dx^2 + 1 = y^2$ for $D = 8, 11, 32, 61$ and 67. When $D = 61$ he found $x = 226153980$, $y = 1776319049$. When $D = 67$ he found $x = 5967$, $y = 48842$.

Some applications of Bhāskara's equation include generation of the Pell sequence (with $D = 2, N = 1$), arithmetic triangles (with $D = 3$), and generation of the Fibonacci sequence (with $D = 5, N = 1$). It is known that all solutions of the equations $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ are given by $y = \pm F_{2n+1}$, $x = \pm L_{2n+1}$; $y = \pm F_{2n}$, $x = \pm L_{2n}$ respectively, where F_n and L_n are respectively n$^{\text{th}}$ Fibonacci number and Lucas number. *Narayana Pandit* (1340 – 1400) also found general solutions to Pell's equation and other quadratic indeterminate equations.

The topic interested the European mathematicians after a challenge given in 1657 by renowned mathematician *Pierre de Fermat* (1601 – 1665). He inspired some of his contemporaries to do the same. *John Wallis*, *Frénicle*, *William Brouncker*, *Leonhard Euler*, *Joseph Louis Lagrange* and others also contributed in the development of the theory of Pell's equations.

John Pell (1611 – 1685) was an English mathematician and an algebraist, but he hardly did any work with the equation $x^2 - Dy^2 = N$ that bears his name. In fact, *Leonhard Euler* credited the equation to Pell in a letter to Goldbach in 1730, and the name stuck. *Lagrange* in 1768 used the technique of Continued fraction to find the good approximations of $\sqrt{D}$ for the case $N = 1$.

Even today, research involving this equation continues to be very active and hundreds of articles dealing with this equation in various contexts have appeared in last some years. One of the main reasons for this interest is that the equation has a habit of popping up at an unexpected place. It is also of great importance in solving the general second-degree Diophantine equation in two unknowns: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Furthermore, the problem of solving this equation is connected to that of determining the *regulator*, an important quantity of a real quadratic number field, and to solving the discrete logarithm problem in such structures. Today, this second problem is of interest to cryptographers.

Necessities for solving the Pell's equations:

We once again consider the Pell's equation

$$x^2 - Dy^2 = N. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Suppose that (1) is solvable, and let $x = u, y = v$ be the integers satisfying (1). Then we call $u + v\sqrt{D}$ to be the *solution* of (1). We also denote this solution by (u, v). It will be called positive solution if both $u > 0$ and $v > 0$. We call a solution (u, v) of (1) to be *trivial* if $uv = 0$. Every nontrivial solution can be made into a positive solution by changing the sign of x or y.

Note: Here we note that by this we do not mean that $u + v\sqrt{D}$ is an integer. It is just another way of representing the solution (u, v) of (1).

If $x + y\sqrt{D}$ is the smallest positive solution of Pell's equation

$$x^2 - Dy^2 = 1, \text{ ....} \quad (2)$$

then we call it as *basic solution* of (2). This equation is always satisfied trivially by $x = \pm 1, y = 0$. We thus call $(x, y) = (\pm 1, 0)$ to be trivial solutions.

Solving Pell's equation $x^2 - Dy^2 = 1$:

To find a nontrivial solution of $x^2 - Dy^2 = 1$ by elementary methods, rewrite the equation as $x^2 = Dy^2 + 1$ and then set $y = 1,2,3, \ldots$ until you reach a value where $Dy^2 + 1$ is a perfect square. Call that value x^2 and then we have a solution (x, y).

Example 1: Two positive solutions of $x^2 - 2y^2 = 1$ are $(3,2)$ and $(17,12)$, since $2y^2 + 1$ is a square when y = 2 and 12, where it has values $9 = 3^2$ and $289 = 7^2$. See below:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$2y^2+1$	3	9	19	33	51	73	99	129	163	201	243	289	339	393	451
Square?	X	✓	X	X	X	X	X	X	X	X	X	✓	X	X	X

Example 2: Three positive solutions of $x^2 - 3y^2 = 1$ are $(2,1), (7,4)$ and $(26,15)$, as shown by the table below.

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$3y^2+1$	4	13	28	49	76	109	148	193	244	301	364	433	508	589	676
Square?	✓	X	X	✓	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	✓

The following table gives the list of basic solutions (x, y) of the equation $x^2 - Dy^2 = 1$ for the non-square values of D for $2 \le D \le 24$.

D	**2**	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**11**	**12**
x	3	2	9	5	8	3	19	10	7
y	2	1	4	2	3	1	6	3	2

D	**13**	**14**	**15**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
x	649	15	4	33	17	170	9	55	197	24	5
y	180	4	1	8	4	39	2	12	42	5	1

The following theorem by *Lagrange* states that the Pell's equation $x^2 - Dy^2 = N$ always has solution if $N = 1$. It also gives the explicit formula for all the positive solutions.

Theorem 1: The Pell's equation

$$x^2 - Dy^2 = 1 \text{ ....} \quad (2)$$

always has infinitely many positive solutions. If (x_1, y_1) is the basic solution (least positive solution) of (2) then all the positive solutions of (2) are given by (x_n, y_n), where x_n and y_n are the integers determined from

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n; n = 1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Remark: Here (x_n, y_n) can be calculated algebraically from $x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$ expanding the left side, equating coefficients of $\sqrt{D}$ on both sides, and equating the other terms on both sides.

This theorem now guarantees that when we tabulate $Dy^2 + 1$, it will always have a square value at some instance. We are guaranteed this search will eventually terminate, but we are not assured how long it will take. In fact, the smallest positive solution of $x^2 - Dy^2 = 1$ can be unusually large compared to the size of D. The table above illustrates this if we compare the smallest positive solutions when $D = 12, 13$, and 14. As more extreme examples, see in the table below the smallest positive solutions to $x^2 - Dy^2 = 1$ when $D = 61$ and 109 compared with nearby values of D.

D	**60**	**61**	**62**		**108**	**109**	**110**
x	31	1766319049	63		1351	158070671986249	21
y	4	226153980	8		130	15140424455100	2

While Lagrange was the first person to give a proof of Theorem 1, in 1768, a century earlier Fermat claimed to have a proof and challenged other mathematicians in Europe to prove it too. In a letter in 1657 he wrote that one should try to find a positive solution to $x^2 - 61y^2 = 1$ and $x^2 - 109y^2 = 1$. Fermat had no idea that a nontrivial solution to $x^2 - 61y^2 = 1$ had been found in India (by Bhaskara II) 500 years before him.

About the solutions of Pell's equation $x^2 - Dy^2 = N$:

Consider $u + v\sqrt{D}$ to be any solution of (1) and let $x + y\sqrt{D}$ is the basic solution of (2). Then it is easy to observe that

$$\left(u + v\sqrt{D}\right) \times \left(x + y\sqrt{D}\right)^{\pm 1} = (ux \pm Dvy) + (uy \pm vx)\sqrt{D}.$$

Also, $(ux \pm Dvy)^2 - D(uy \pm vx)^2 = u^2x^2 + D^2v^2y^2 - Du^2y^2 - Dv^2x^2$

$$= u^2(x^2 - Dy^2) - Dv^2(x^2 - Dy^2)$$

$$= (u^2 - Dv^2)(x^2 - Dy^2) = N$$

Thus, the product $\left(u + v\sqrt{D}\right) \times \left(x + y\sqrt{D}\right)^{\pm 1}$ is also a solution of (1). Suppose this new solution is $u' + v'\sqrt{D} = \left(u + v\sqrt{D}\right) \times \left(x + y\sqrt{D}\right)^{\pm 1}$. This means that any solution of (1) when multiplied or divided by $x + y\sqrt{D}$ again gives the solution of (1). We call this new solution $u' + v'\sqrt{D}$ to be *associated* with the earlier solution $u + v\sqrt{D}$. The following gives the exact definition of this associativity.

Definition: Two positive solutions $u_\alpha + v_\alpha\sqrt{D}$ and $u_\beta + v_\beta\sqrt{D}$ are said to be *associated* if there exists an integer t such that

$$u_\beta + v_\beta\sqrt{D} = \left(u_\alpha + v_\alpha\sqrt{D}\right)\left(x + y\sqrt{D}\right)^t; t = 0, \pm 1, 2 \text{ .... } (3)$$

If $u_\alpha + v_\alpha\sqrt{D}$ is any fixed solution of (1), then all the positive solutions given by (3) are said to be *associated with each other*. In this case, the set of all solutions associated with other forms a *class of solutions* of (1). For some solutions $u_\alpha + v_\alpha\sqrt{D}$ and $u_\beta + v_\beta\sqrt{D}$ of (1), if there does not exist t satisfying (3), then these two solutions are in different class of solutions of (1).

Fundamental solutions:

There is a quick way to generate other solutions from a single solution of Pell's equation. Before discussing this, we introduce the *fundamental solution* of the equation $x^2 - Dy^2 = N$, from which all other positive integer solutions may be obtained.

Let K be any specific class consisting of all the solutions $u_i + v_i\sqrt{D}; i = 1, 2, 3, \dots$ which are associated with each other. Among all the solutions $u_i + v_i\sqrt{D}$ in a given class K we now choose a solution $u_1 + v_1\sqrt{D}$ in the following way: Let v_1 be the least non-negative value of v which occurs in K. In this case, u_1 is also uniquely determined. The solution $u_1 + v_1\sqrt{D}$ defined in this way is said to be *fundamental solution* of the class.

Thus, for the fundamental solution $u_1 + v_1\sqrt{D} \in K$, the number $|u_1|$ has the least value which is possible for $|u_i|$. In this case v_1 is also the least non-negative value of v_i which occurs in K. In other words, the fundamental solution is the smallest positive solution belonging to that class.

Since the fundamental solution $u_1 + v_1\sqrt{D}$ is the smallest positive solution of the class K, it can be observed that $u_1 + v_1\sqrt{D}$ is a fundamental solution of class K if and only if $u_1 + v_1\sqrt{D} \times (x_1 - y_1\sqrt{D})$ is not a positive solution of (2). Thus if $u_\alpha + v_\alpha\sqrt{D}$ is any fixed fundamental solution then all the positive solutions obtained by (3) are associated with each other and all of them belong to some common class of solutions.

Moreover, we observe that if (1) is solvable, then it has only finite number of classes of solutions (and so finite number of fundamental solutions). We assume that (1) has exactly β classes of solutions. If $u_i + v_i\sqrt{D}\,; 1 \le i \le \beta$ are all the fundamental solutions of (1), then we write this as '$u_i + v_i\sqrt{D}$ runs through all the fundamental solutions of (1)'.

Remark: If $u_1 + v_1\sqrt{D}$ is the smallest of all the fundamental solutions of (2) then for all its fundamental solutions $u_i + v_i\sqrt{D}$, we have

$$u_i + v_i\sqrt{D} \le (u_1 + v_1\sqrt{D}) \times (x_1 + y_1\sqrt{D})\ ;\text{ for all } i.$$

This gives the upper bound for the fundamental solutions of (1).

The following theorem gives the bounds for the values of u, v occurring in the fundamental solutions.

Theorem 2: If $x + y\sqrt{D}$ is the basic solution of (2) and let $u + v\sqrt{D}$ be any fundamental solution of (1), then $0 < |u| \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)|N|}{2}}$ and $0 \le v \le y\sqrt{\frac{|N|}{2(x+1)}}$.

Although the technique used above (and in the examples which will follow in next section) to find the fundamental solutions provides a general method to show that (2) has no solutions. Sometimes the equation has no solution can be proved simply using congruences. For instance, if we consider the Pell's equation $x^2 - 3y^2 = 2$, then it can be observed that this equation is not solvable. This is because from this equation, we have $x^2 \equiv 2\ (mod\ 3)$ which has no solution.

But congruence methods do not always help to prove that any given Pell's equation has no solutions! The equation $x^2 - 37y^2 = 11$ considered in example 8 is one an example. We will prove that it has no solution, but it can be checked that the congruence $x^2 \equiv 11(mod\ 37)$ has a solution $x = 14$!

The following theorem states that (1) always has solution if N is a perfect square.

Theorem 3: For any positive, non-square integers D and any non-zero integer k, the Pell's equation $x^2 - Dy^2 = k^2$ always has a solution in integers.

At present there is no method to predict whether (1) is solvable or not for any given D and N. Although, some algorithms are available in literature which helps in hunt for the solutions of (1) for any given D and N.

Examples of fundamental solutions:

We now present some examples which will help to understand the idea of fundamental solutions more precisely.

Example 3: Consider the Pell's equation $x^2 - 6y^2 = 3$.

The smallest positive solution of this equation is $(u, v) = (3,1)$. Also, the equation $x^2 - 6y^2 = 1$ has basic solution $(x, y) = (5,2)$. Then by theorem 2, any fundamental solution $u + v\sqrt{D}$ has bounds

$$0 < |u| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\times 3}{2}} = 1.5 \text{ and } 0 \leq v \leq 2\sqrt{\frac{3}{2\times 6}} = 1.$$

Thus, the solution (3,1) is the only fundamental solution of $x^2 - 6y^2 = 3$. Here we also observe that any fundamental solution must occur before the number $(3 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6}) = 27 + 11\sqrt{6}$, that is before the solution (27,11). Now $(u + v\sqrt{6})(x - y\sqrt{6}) = (3 + \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 3 - \sqrt{6}$, which gives negative solution $(3, -1)$ of the given equation. Thus $3 + \sqrt{6}$ is the fundamental solution.

Example 4: Consider the Pell's equation $x^2 - 7y^2 = 57$.

The smallest positive solution of this equation is $(u, v) = (8,1)$. Also, the equation $x^2 - 7y^2 = 1$ has basic solution $(x, y) = (8,3)$. Then any fundamental solution $u + v\sqrt{D}$ has bounds $0 < |u| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9\times 57}{2}} \approx 8.01$ and $0 \leq v \leq 3\sqrt{\frac{57}{2\times 9}} = 5.34$. It can be now easily observed that the equation $x^2 - 7y^2 = 57$ are satisfied by only $(u, v) = (8,1), (13,4)$ in the above range. Thus, these are the two fundamental solutions.

We can even verify that $(u + v\sqrt{7})(x - y\sqrt{7}) = (8 + \sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7}) = 43 - 16\sqrt{7}$, which is negative. Also, if we consider $(u, v) = (13,4)$, then

$$(u + v\sqrt{7})(x - y\sqrt{7}) = (13 + 4\sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7}) = 20 - 7\sqrt{7},$$

a negative quantity. This too justifies that (8,1) and (13,4) are the fundamental solutions of $x^2 - 7y^2 = 57$.

All the solutions of Pell's equation $x^2 - Dy^2 = N$:

As discussed above, Pell's equation (2) always has a solution. But the generalized Pell's equation (1) may or may not have solutions in integers. It is proved that if solvable, then (1) also always has infinite number of solutions in integers. The following result gives an explicit formula to find all the solutions of Pell's equation (1).

Theorem 4: If $u_i + v_i\sqrt{D}$ runs through all the fundamental solutions of (1) and if $x + y\sqrt{D}$ is the basic solution of (2), then all the positive solutions of (1) are given by $x_{i,n} + y_{i,n}\sqrt{D} = (u_i + v_i\sqrt{D})(x + y\sqrt{D})^n; = 0, 1, 2, \dots$.

Examples for the solutions of Pell's equation $x^2 - Dy^2 = N$:

Example 5: Consider the Pell's equation $x^2 - 3y^2 = 6$.

The smallest positive solution of this equation is $(u, v) = (3,1)$. Also, clearly the equation $x^2 - 3y^2 = 1$ has basic solution $(x, y) = (2,1)$. Using theorem 2, it can be observed that $x^2 - 3y^2 = 6$ has only one fundamental solution $(3,1)$. Then above theorem states that all the solutions of $x^2 - 3y^2 = 6$ are given by

$$x_{i,n} + y_{i,n}\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n; n = 0, 1, 2, \dots .$$

This now gives the infinite number of solutions of $x^2 - 3y^2 = 6$ as $(3,1), (9,5), (33,19), \dots$.

Example 6: Consider the Pell's equation $x^2 - 19y^2 = 36$.

The smallest positive solution of this equation is $(u, v) = (6,0)$. Also, the equation $x^2 - 19y^2 = 1$ has basic solution $(x, y) = (170,39)$. If $u + v\sqrt{D}$ runs through the fundamental solutions of $x^2 - 19y^2 = 36$, then $0 \le v \le 39\sqrt{\frac{36}{2\times171}} \approx 12.65$. Then it can be verified that $(6,0)$ and $(44,10)$ are the two fundamental solutions.

Thus, all the solutions of $x^2 - 194y^2 = 36$ are given by two classes of solutions

$$x_{i,n} + y_{i,n}\sqrt{19} = 6(170 + 39\sqrt{19})^n \text{ and}$$

$$x_{i,n} + y_{i,n}\sqrt{19} = (44 + 10\sqrt{19})(170 + 39\sqrt{19})^n; n = 0, 1, 2, \dots .$$

Example 7: Consider the equation $x^2 - 194y^2 = -1$.

Smallest solution of $x^2 - 194y^2 = 1$ is $(x, y) = (195,14)$. If $u + v\sqrt{D}$ is any fundamental solution of $x^2 - 194y^2 = -1$, then $0 \le v \le 14\sqrt{\frac{1}{2\times196}} \approx 0.71$. Thus, the only choice for the value of v is $v = 0$. But in that case we have $x^2 = -1$. Clearly this has no real (integer) solution. Hence the equation $x^2 - 194y^2 = -1$ has no integer solution.

Example 8: Consider the equation $x^2 - 37y^2 = 11$.

The basic solution of $x^2 - 37y^2 = 1$ is $(x, y) = (73,12)$. If $u + v\sqrt{D}$ is any fundamental solution of $x^2 - 37y^2 = 11$, then $0 \le v \le 12\sqrt{\frac{11}{2\times74}} \approx 6.58$. In given equation $x^2 - 37y^2 = 11$, by taking the value of $v = y$ from 0 to 6, it can be observed that the equation $x^2 - 37y^2 = 11$ does not have any x satisfying it. Thus, the given equation has no solution.

Negative Pell's equation:

While the Pell's equation (2) always has infinitely many non-trivial solutions, the analogous equation, the *negative Pellian equation* $x^2 - Dy^2 = -1$ is much more mysterious. The interesting point is that there are many non-square values of D for which this equation is not solvable. One well-known limitation is $D \equiv 1, 2 \ (mod\ 4)$ with no $4n + 3$ factors, but this is not sufficient. If $p \mid D$, then reducing modulo p tells that the congruence $x^2 \equiv -1 (mod\ p)$ must be solvable, when $p \equiv 1(mod\ 4)$ or $p = 2$. In this case, by a well-known theorem of Fermat, it can be clearly seen that D must be sum of two squares. However not all such D has the property that $x^2 - Dy^2 = -1$ is solvable: the smallest counterexample is $D = 34$. These has been summarized in the following theorem:

Theorem 5: If $x^2 - Dy^2 = -1$ is solvable, then D is not divisible by 4 and D does not have a prime factor congruent to 3 modulo 4.

I conclude this article by mentioning that any Pell's equation which is solvable, can even be solved by using the technique of continued fractions, which is a matter of some other article.

References:

1. David M. Burton: *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill, 1985.
2. Barbeau, E. J.: *Pell Equation*, Springer, 2003, XII.
3. L. E. Dickson: *History of the theory of numbers. Vol. II*, Chelsea, New York, 1966.
4. Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu: *An Introduction to Diophantine Equations,* Birkhauser, 2010.
5. https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn1.pdf
6. https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn2.pdf

કૃપા કરી આટલું કરશો.

સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત કરવા માટે ઘણાં બધાં – સારા, પ્રકાશિત કરવા જ જોઈએ એવાં - લખાણો મળી રહ્યાં છે. કેટલાંક લખાણો ટાઈપ કરેલાં હોય છે તો કેટલાંક હસ્તલિખિત પણ હોય છે. હસ્તલિખિત લખાણોના ફોટા પાડીને અને ટાઈપ કરેલાં લખાણોની Doc-File અને PDF મળે છે. અમે નમ્રતાપૂર્વક નીચે પ્રમાણે ત્રણ સૂચનો કરીએ છીએ.

1. ટાઈપ કરેલાં લખાણો 14 પોઈન્ટના અક્ષરોમાં ટાઈપ કરવાં. ટાઈપ કરતી વખતે બે લીટી વચ્ચેનું અંતર (Line Spacing) થોડું વધારે રાખવું. પછી તેની Doc-File અને PDF બન્ને મોકલવી.
2. હસ્તલિખિત લેખ તદ્દન કોરા કાગળો પર પાનાંની એક જ બાજુએ લખવો. લીટીવાળા-આંકેલા કાગળોનો ઉપયોગ ન કરવો. લખાણ 0.7 પોઈન્ટની અણી (Nib) વાળી વાદળી અથવા કાળા કલરની Gel Pen વડે લખવું. Ball Pen નો ઉપયોગ ન કરવો.
3. હસ્તલિખિત લખાણના ફોટા પાડતા પહેલાં અને ટાઈપ કરેલ લખાણની PDF બનાવતા પહેલાં, લેખ બરાબર વાંચી જવો.

જો આપ આ સૂચનોનો અમલ કરશો તો ટાઈપ કરનારને અને પ્રુફ વાંચનારને ઘણી સુગમતા થશે.

આભાર...

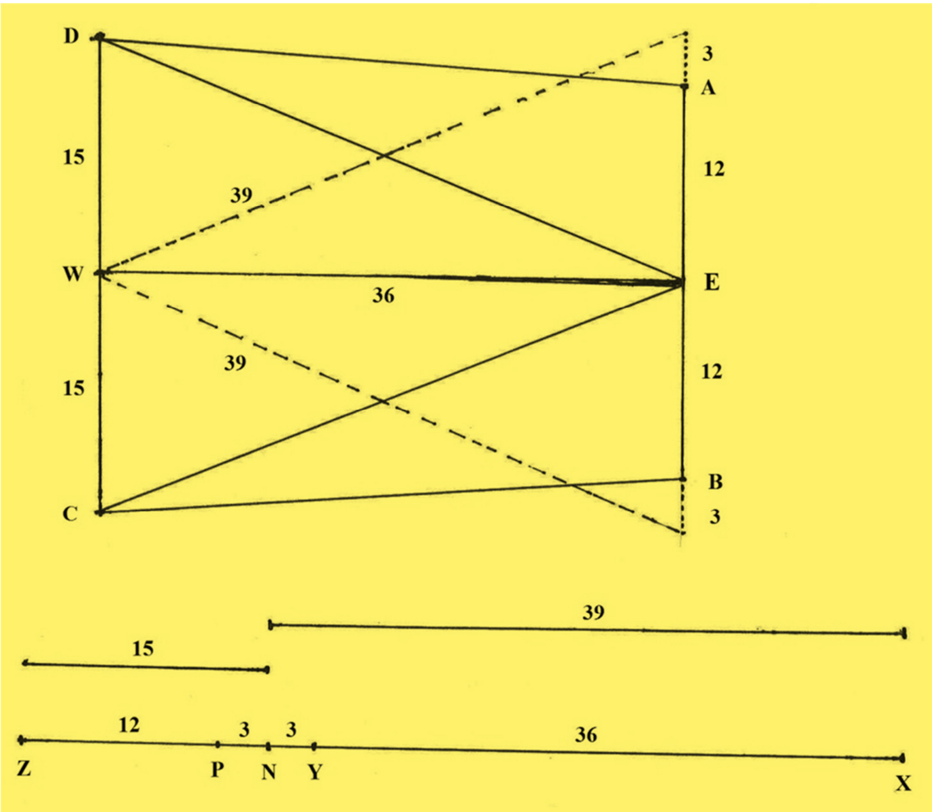
મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ.
(M) 9925837247

આ શ્રેણીના સાતમાં લેખને અંતે જણાવ્યા પ્રમાણે સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારની વેદિની રચનાની અન્ય રીતો આ લેખમાં જોઈશું.

પ્રથમ રચના એક દોરી (રજ્જુ-સૂલ્બ)થી કરવામાં આવે છે. વેદિની રચનાનું વર્ણન કરતો શ્લોક નીચે મુજબ છે.

षट्त्रिंशिकायाम् अष्टादशोसमस्यापरस्मात् अन्तात्
द्यादशु लक्षणम् । पंचदशसु लक्षणम् । पृष्ठयान्तयोरन्तौ
नियम्य पंचदशिकेन दक्षिणापायम्य शंकुं निहन्ति । एवम्
उत्तरतः ते श्रोणी । विपर्यस्तयांसौ । पंचदशिकेमैवापायम्य
द्वाद्यशिके शकुं निहन्ति । एवम् उत्तरतः । तावसौ । तत्
एक रज्जवा विहरणम् ॥ 5.4 – 13 ॥

અર્થઘટન : 36 પ્રક્રમ લંબાઈની રજ્જુ (દોરી) લો અને તેમાં (તેની સાથે) 18 પ્રક્રમ લંબાઈની દોરી જોડો. આમ મળતી 54 લંબાઈની રજ્જુના બંને છેડે ગાળિયા બનાવો. દોરીના પશ્ચિમ છેડેથી 12 અને 15 પ્રક્રમ અંતરે બે નિશાની કરો. 12ની નિશાની પૂર્વ તરફના ખૂણાનાં સ્થાન નિશ્ચિત કરવા માટે છે જ્યારે 15ની નિશાની રજ્જુને ખેંચવા માટે તથા પશ્ચિમ તરફના ખૂણાનાં સ્થાન નિશ્ચિત કરવા માટે વપરાશે. નીચેની આકૃતિના સંદર્ભે તેની નીચે વર્ણવેલી ભૌમિતિક રચના સમજાશે.



આકૃતિ-1

સમજૂતી : દોરી ZXની લંબાઈ 54 છે. Z પશ્ચિમ તરફનો છેડો છે જ્યાંથી 12 અંતરે નિશાની P છે અને 15 અંતરે નિશાની N છે. NY=3 અને YX=36 છે. X પૂર્વ તરફનો છેડો છે.

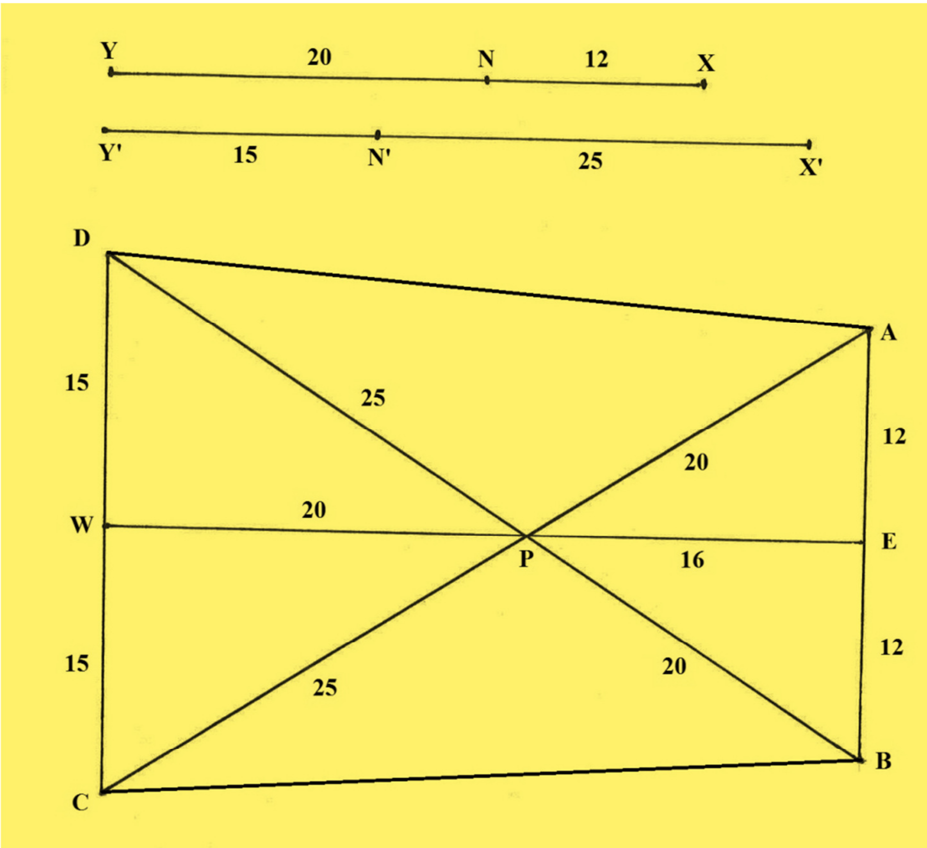
જ્યાં વેદિ બનાવવાની છે તે જગ્યાએ મધ્યરેખા EW લો જેની લંબાઈ 36 પ્રક્રમ છે. E અને W સ્થાને એક એક શંકુ જમીનમાં સ્થિર કરો, 54 પ્રક્રમ લંબાઈની દોરી ZXનો Z આગળનો ગાળિયો W આગળના શંકુમાં અને X આગળનો ગાળિયો E આગળના શંકુમાં સ્થિર કરો (બાંધો). હવે દોરીને N આગળથી દક્ષિણ તરફ ખેંચો અને બિંદુ N જમીનને જે જગ્યાએ અડે ત્યાં શંકુ C મૂકો. આ વેદિનો દક્ષિણ-પશ્ચિમ ખૂણો થશે. તે જ રીતે ઉત્તર તરફ ખેંચીને ઉત્તર-પશ્ચિમ ખૂણો નક્કી કરી ત્યાં શંકુ D મૂકો. હવે XZ ના ગાળિયાની દિશા બદલાવો એટલે કે Z ને E માં અને X ને W માં બાંધો. ફરીથી દોરીને N આગળથી દક્ષિણ તરફ ખેચીંને બિંદુ P જમીનને જ્યાં અડે ત્યાં શંકુ B મૂકો જે વેદિનો દક્ષિણ-પૂર્વ ખૂણો થશે અને એ જ રીતે ઉત્તરમાં ખેંચીને વેદિનો ઉત્તર-પૂર્વ ખૂણો નક્કી કરી ત્યાં શંકુ A મૂકો. આમ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વેદિ ABCD બનશે જેમાં પૂર્વ તરફની બાજુ AB=24 પ્રક્રમ અને પશ્ચિમ તરપથી બાજુ CD=30 પ્રક્રમ થશે.

આકૃતિ પરથી સમજાશે કે અહીં 15-36-39 માપનો કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવ્યો છે જેમાં 15 અને 36ની વચ્ચે કાટખૂણો બને એ હકીકતનો – એટલે કે બીજા શબ્દોમાં પાયથાગોરસ પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેયનો-ઉપયોગ કરેલ છે !

બીજી રચના બે દોરીની મદદથી કરવામાં આવે છે.

શ્લોક : त्रिकचतुष्टकयोः पंचिकाक्ष्णयारज्जुः ।   ताभिस्त्रिमिरभ्यस्ताभिरसौ । चतुरभ्यस्ताभिरश्रोणी ॥ 5.14-16 ॥

અર્થ : કાટકોણ ત્રિકોણનો કર્ણ 5 એકમ થાય જો તેનો લંબ (તિર્યંગમાન) અને પાયો (પાર્શ્વમાન) અનુક્રમે 3 અને 4 એકમ હોય. આના ચાર ગણા માપ- (12, 16, 20) – લેવાથી વેદિના પૂર્વ દિશાના ખૂણાઓ અને પાંચગણા માપ – (15, 20, 25) - લેવાથી વેદિના પશ્ચિમ દિશાના ખૂણાઓ નિશ્ચિત કરી શકાય.



આકૃતિ-2

સમજૂતી : નીચેની આકૃતિ-2ના સંદર્ભે તેની નીચે વર્ણવેલી રચના સમજાશે.

(1) EW વેદિની મધ્યરેખા છે જ્યાં EW=36. તેના પર શંકુ P એવી રીતે મૂકો કે જેથી WP=20 અને EP=16 પ્રક્રમ થાય.

(2) XY = 32 પ્રક્રમ લંબાઇની દોરી લો જેના પર YN = 20 અને NX=12 પ્રક્રમ થાય તે રીતે નિશાની N કરો.

(3) X′Y′ = 40 પ્રક્રમ લંબાઈની દોરી લો જેના પર Y′N′ = 15 અને N′X′ = 25 પ્રક્રમ થાય એ રીતે નિશાની N કરો.

(4) હવે XY દોરીનો X આગળનો ગાળીયો E આગળ અને Y આગળનો ગાળીયો P આગળના શંકુમાં સ્થિર કરો (બાંધો) દોરીને N આગળથી દક્ષિણ તરફ ખેંચી જમીન પર જે જગ્યાએ N આવે ત્યાં શંકુ B મૂકો. આ વેદિનો દક્ષિણ-પૂર્વ ખૂણો થશે. તે જ રીતે ઉત્તર તરફ ખેંચીને ઉત્તર-પૂર્વનો ખૂણો A નિશ્ચિત કરો.

(5) હવે X′Y′ દોરીનો X′ આગળનો ગાળિયો P આગળ અને Y′ આગળનો ગાળીયો W આગળ બાંધો અને દોરીને N′ આગળથી દક્ષિણ તરફ ખેંચીને N′ જ્યાં આવે ત્યાં શંકુ C મૂકો જે વેદિનો દક્ષિણ-પશ્ચિમ ખૂણો થશે. એ જ રીતે ઉત્તર-પશ્ચિમ ખૂણો નિશ્ચિત કરો. આમ વેદિ ABCD તૈયાર થશે.

વાચકો સમજી શકશે કે અહીં બે દોરીની મદદથી બે ભિન્ન પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓનો ઉપયોગ કર્યો છે અને ફરીથી પ્રથમ રીતમાં વર્ણવેલી વેદિ જ મેળવી છે. પરંતુ બંનેમાં ભૌમિતિક રચનાઓની વિધિ ભિન્ન છે.

આઠ હપ્તાની આ શ્રેણીમાં સૂલ્બ સૂત્રોમાં વર્ણવેલી ભૌમિતિક રચનાઓની આધુનિક સંદર્ભમાં સમજૂતી આપવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે. આ સાથે આ શ્રેણી અહીં પૂરી કરું છું. તે સમયે જ્ઞાત અન્ય ભૌમિતિક રચનાઓ અને તથ્યો વિશેની માહિતી થોડા વિરામ બાદ નવી શ્રેણીમાં આપવાનો પ્રયત્ન કરીશ.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

લોકગીત – ગણિત રસિયા

ઓ ગણિત રસિયા ક્યાં શીખી આવ્યા ગણિત જો,
આંખલડી રાતી ને ઉજાગરો ક્યાં રે કીધો.
આજ અમે ગ્યાતા બિજગણિત ને હાટ જો,
સમીકરણ ઉકેલતાં વહાણલાં વહી ગયાં .... (1)
ઓ ગણિત રસિયા....
આજ અમે ગ્યાતા ભૂમિતિ ને હાટ જો,
પ્રમેયો ને સમજતાં વહાણલાં વહી ગયાં .... (2)
ઓ ગણિત રસિયા....
આજ અમે ગ્યાતા ત્રિકોણમિતિ ને હાટ જો,
અંતર ને ઊંચાઇ સમજતાં વહાણલાં વહી ગયાં .... (3)
ઓ ગણિત રસિયા....
આજ અમે ગ્યાતા અંકગણિત ને હાટ જો,
ક્ષેત્રફળ ગણવામાં વહાણલાં વહી ગયાં .... (4)
ઓ ગણિત રસિયા....
આજ અમે ગ્યાતા સંભાવના ને હાટ જો,
સિક્કાઓ ઉછાળતાં વહાણલાં વહી ગયાં .... (5)
ઓ ગણિત રસિયા....

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

(M) 9376690008 **રમેશ મલણિયા**
rameshmalania@gmail.com **અમરેલી**

પુનશ્ચ “1089”-2

પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784, vyaspk123@gmail.com

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 212 (E-Copy-7)માં આપણે ત્રણ અંકની સંખ્યા પર એક પ્રક્રિયા વ્યાખ્યાયિત કરી હતી. આ પ્રક્રિયા અને તે અંગે મળતાં પરિણામોનું થોડું પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

પ્રક્રિયા :

(1) જેનો પહેલો અને છેલ્લો અંક સમાન ન હોય તેવી, ત્રણ અંકોની, એક સંખ્યા ધારો.

(2) (1)માં ધારેલી સંખ્યાના અંકોને ઉલટા ક્રમમાં લખી બીજી સંખ્યા મેળવો.

(3) ઉપરનાં પગથિયાં (1) અને (2)માં મળેલી સંખ્યાઓનો ધન તફાવત લઈ ત્રણ અંકોની ત્રીજી સંખ્યા લખો (જો આ ધન તફાવત બે આંકડાની સંખ્યા 99 મળે તો તેને 099 લખી ત્રણ અંકની સંખ્યા ગણવી)

(4) (3) માં મેળવેલી સંખ્યાના અંકોને ઉલટા ક્રમમાં લખી બીજી સંખ્યા લખો.

(5) પગથિયાં (3) અને (4)માં મળેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

ઉપરની પ્રક્રિયાનાં (5) પગથિયાં પૂરાં કર્યા પછી મળતી સંખ્યા અચળ છે. એટલે કે આ સંખ્યા (1)માં ધારેલી સંખ્યા પર આધારિત નથી. આપણી દશાંકી સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં આ અચળ સંખ્યા 1089 છે. જેને આપણે પ્રક્રિયાના અચળાંક તરીકે ઓળખાવી છે.

એ લેખમાં આપણે એ પણ જોઈ ગયા છીએ કે પ્રક્રિયાનો અચળાંક સંખ્યાલેખન પધ્ધતિ પર આધારિત છે. જુદી જુદી સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં આ અચળાંક જુદા જુદા આવે છે. નીચે કોષ્ટક 1માં આ અચળાંકો ફરી રજૂ કર્યા છે.

કોષ્ટક 1

સંખ્યા લેખનનો આધાર (પાયો- Base)	અચળાંક	અચળાંકનું દશ અંકી પધ્ધતિમાં મૂલ્ય
2 (દ્વિઅંકી)	$1001 = (11)_2^2$	$9 = 3^2$
3 (ત્રિઅંકી)	1012	32
4 (ચતુષ્‌અંકી)	1023	75
5 (પંચઅંકી)	$1034 = (22)_5^2$	$144 = 12^2$
6 (ષટ્‌અંકી)	1045	245
7 (સપ્તઅંકી)	1056	384
8 (અષ્ટઅંકી)	1067	567
9 (નવઅંકી)	1078	800
10 (દશઅંકી અથવા દશાંશ)	$1089=(33)_{10}^2$	$1089 = 33^2$

કોષ્ટક (1)ને ધ્યાનપૂર્વક જોતાં, કેટલાંક રસપ્રદ ગુણધર્મો પણ દેખાશે. બધી સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં અચળાંક ચાર અંકોનો છે. બધા અચળાંકોના ડાબી બાજુએથી ગણતાં પ્રથમ બે અંકોથી બનતી સંખ્યા 10 છે. છેલ્લા બે અંકોથી બનતી સંખ્યા એક સમાંતર શ્રેણી : 01, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89... રચે છે. બધી જ સંખ્યાલેખન પદ્ધતિમાં અચળાંકનો જમણીબાજુથી પહેલો અંક અને બીજો અંક એ સંખ્યાલેખન પધ્ધતિના આધાર (base) સાથે સંકળાયેલો છે. જમણીબાજુનો પહેલો અંક, સંખ્યાલેખન પધ્ધતિના આધારમાંથી 1 બાદ કરતાં મળે છે અને બીજો અંક આધારમાંથી 2 બાદ કરતાં મળે છે. દશાંક પધ્ધતિમાં મળતો અચળાંક 1089 છે. આ પદ્ધતિનો આધાર 10 છે. જમણી બાજુથી પહેલો અંક 9 એ (10–1) અને જમણીબાજુથી બીજો અંક 8 એ (10–2) છે. વળી કોષ્ટક 1માં લખેલા અચળાંકો પૈકી કેટલાક પૂર્ણવર્ગ છે.

જેમ કે   દ્વિઅંકી પધ્ધતિમાં અચળાંક : $1001 = (11)^2$

પંચઅંકી પદ્ધતિમાં અચળાંક $= 1034 = (22)^2$

દશઅંકી પદ્ધતિમાં અચળાંક $= 1089 = (33)^2$

અહીં $(11)^2$, $(22)^2$, $(33)^2$ .... વગેરે જોતાં એવું લાગે કે જાણે બધા જ અચળાંકો 11 ના ગુણકો હશે. એક પ્રશ્ન એ પણ ઊભો થાય કે કઇ સંખ્યાલેખન પદ્ધતિમાં આ અચળાંક પૂર્ણ વર્ગ થાય?

આવા ઘણા બધા પ્રશ્નોના ઉકેલ કે સમાધાન મેળવવા માટે આપણે સંખ્યાલેખન પદ્ધતિનો આધાર વ્યાપક સ્વરૂપે n, $n>1$, $n \in N$ લઈ, તેમાં ત્રણ અંકોની સંખ્યા $(abc)_n$ લઈ, તેના પર આપણે આગળ વ્યાખ્યાયિત કરેલી પ્રક્રિયા કરવી પડે.

સંખ્યાલેખન પદ્ધતિનો આધાર 'n' છે. તેથી અંકોની સંખ્યા n છે. આ અંકો : 0, 1, 2, 3, ... , $(n-1)$ છે. પણ n માટે કોઈ સંકેત નથી તેથી $(n-1)+1=10$ (અહીં નોંધો કે 1 અને 0 એ ઉપર લખેલાં n અંકો પૈકીના જ બે અંકો છે.) (દશ અંકી પદ્ધતિમાં આધાર દશ છે. તેથી અંકો દશ છે. આ અંકો : 0, 1, 2, 3, ..., 9 છે. પણ દશ માટે કોઈ સંકેત નથી તેથી $9 + 1 = 10$)

જો કોઈ સ્થાનમાંથી વદ્દી લઈએ તો તે સ્થાનમાંથી 1 બાદ થશે અને તેની જમણી બાજુના સ્થાનમાં 'n' ઉમેરાશે.

જો કોઈ સ્થાનમાં બે અંકોનો સરવાળો કરતાં સરવાળાનું મૂલ્ય 'n'થી વધી જાય તો આ સરવાળામાંથી 'n' બાદ કરી વધતી સંખ્યા તે સ્થાનમાં લખાશે અને 1 તે સ્થાનથી ડાબી બાજુના સ્થાનમાં ઉમેરાશે.

હવે, ધારોકે 'n' અંકી પધ્ધતિમાં ત્રણ આંકડા કોઈ સંખ્યા abc છે, જેમાં $a \neq c$ વળી $a > c$ લઈએ તો વ્યાપકતાનો કોઈ ભંગ થતો નથી.

જેમ $(abc)_{10} = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c\cdot 10^0$, તેમ $(abc)_n = a\cdot n^2 + b\cdot n + c\cdot n^0 \cdot (abc)_n$ ના અંકો ઉલટાવતાં મળતી સંખ્યા $(cba)_n$ મળે. આપણે વ્યાખ્યાયિત કરેલી પ્રક્રિયા મુજબ આપણે $(abc)_n$ અને $(cba)_n$ નો ધન તફાવત લેવાનો છે. $a>c$ હોવાથી $(abc)_n > (cba)_n$.

નીચેના કોષ્ટક-2માં $(abc)_n - (cba)_n$ ની પ્રક્રિયા દર્શાવી છે. યાદ રહે કે $0 \leq a, b, c < n$.

કોષ્ટક-2

સ્થાનનો ક્રમ અને સ્થાનકિંમત	(3) n^2	(2) n	(1) n^0
વદ્દી	-1	$+n$ -1	$+n$
મોટી સંખ્યા	a	b	c
(–) નાની સંખ્યા	c	b	a
ધન તફાવત	$-1+a-c$	$n-1$	$c+n-a$

સમજૂતી : પહેલાં સ્થાન (દશાંક પદ્ધતિમાં એકમનું સ્થાન) થી બાદબાકી કરીએ. $c < a$ હોવાથી આપણે બીજા સ્થાનમાંથી વદ્દી લેવી પડશે. તેથી બીજા સ્થાનમાંથી 1 બાદ થશે અને પહેલા સ્થાનમાં $1 \times n = n$ ઉમેરાશે તેથી બાદબાકી કર્યા પછી તે સ્થાનમાં $c+n-a$ મળશે.

દરેક સ્થાનમાં મળતો અંક n થી નાનો હોવો જોઈએ. $c+n-a = n-(a-c) < n$ કારણ કે $a-c>0$

હવે બીજા સ્થાનના અંકોની બાદબાકી કરીએ. મોટી સંખ્યામાં આ સ્થાનમાં b છે. જેમાંથી 1 બાદ કરીને પહેલા સ્થાનમાં લઈ ગયા છીએ. તેથી $b-1$ માંથી b બાદ કરવાના છે. તેથી ત્રીજા સ્થાનમાંથી વદ્દી લેવી પડશે.

આમ કરવાથી બીજા સ્થાનમાં n ઉમેરાશે. તેથી બાદબાકી કર્યા પછી આ સ્થાનમાં $n+(b-1)-b = n-1$ રહેશે. દેખીતી રીતે જ $n-1 < n$. ત્રીજા સ્થાનમાં પહેલી સંખ્યામાં $a-1$ વધશે. અને તેમાંથી બાદ c કરવાના છે.

તેથી ત્રીજા સ્થાનમાં તો બાદબાકી $(-1+a-c)$ થશે તે જોવું સરળ છે. $a-c>0$ હોવાથી $-1+a-c \geq 0$ છે અને $-1+a-c = a-(c+1) < n$ પણ સાબિત કરી શકાય.

આમ $(abc)_n - (cba)_n = ((-1+a-c)\ (n-1)\ (c+n-a))_n$ .... (1)

હવે (1) માં લખેલી ત્રણ અંકોની સંખ્યાના અંકોને ઉલટા ક્રમમાં લખીએ. આમ કરવાથી

ત્રણ અંકોની સંખ્યા : $((c+n-a)\ (n-1)\ (-1+a-c))_n$ મળશે. .... (2)

(1) અને (2) માં મેળવેલી ત્રણ અંકોની સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં જે સંખ્યા મળે તે આપણો n-અંકી સંખ્યાલેખન પદ્ધતિનો અચળાંક ! ચાલો, સરવાળો કરીએ.

કોષ્ટક-3

સ્થાનનો ક્રમ અને સ્થાન કિંમત	(4) n^3	(3) n^2	(2) n	(1) n^0
વદ્દી	$+1$	$+1$		
સંખ્યા (1)		$-1+a-c$	$n-1$	$c+n-a$
(+) સંખ્યા (2)		$c+n-a$	$n-1$	$-1+a-c$
સરવાળો	1	$n \equiv 0$	$2n-2 = n+(n-2)$ $\equiv n-2$	$n-1$

સરવાળો કરવો સરળ છે. માત્ર એટલું ધ્યાન રાખવું જોઈએ કે કોઈપણ સ્થાનમાં રહેલા અંકોનો સરવાળો n કે તેથી વધુ ન થવો જોઈએ. જો સરવાળો n કે તેથી વધુ હોય તો તેમાંથી n બાદ કરી જે વધે તે સંખ્યા તે સ્થાનમાં લખવી જોઈએ અને ડાબી બાજુના સ્થાનમાં 1 ઉમેરવા જોઈએ. જેમ કે દશાંકી સંખ્યામાં 375+627 કરીએ તો એકમના સ્થાનનાં અંકોનો સરવાળો 5+7=12 થાય છે. 12 દસથી વધુ છે. તેથી 12–10=2 એકમના સ્થાને આવશે અને ડાબી બાજુએ રહેલા અંકમાં 1 ઉમેરાશે. તેથી દશકના સ્થાનમાં 1+7+2 થશે. 1+7+2 = દશ. પણ દશ માટે કોઈ સંકેત નથી. તેથી દશમાંથી દશ બાદ કરી મળતી સંખ્યા 0 એ દશકના સ્થાને આવશે અને 1 શતકના સ્થાનમાં ઉમેરાશે. શતકના સ્થાનમાં 1+3+6= દશ તેથી શતકના સ્થાનમાં પણ 0 લખી સહસ્ત્રના સ્થાનમાં 1 ઉમેરવો પડે.

આમ

$$\begin{array}{r} 375 \\ +\ \underline{627} \\ 1002 \end{array}$$

હવે કોષ્ટક-3 ઉપર પાછા આવીએ પહેલાં સ્થાન પરના અંકોનો સરવાળો :

$(c+n-1) + (-1+a-c) = n - 1$ છે. $n \geq 2$ હોવાથી $1 \leq n - 1 < n$.

બીજા સ્થાન પરના અંકોનો સરવાળો : $(n-1) + (n-1) = 2n-2$ અહીં $2n-2 > n$ તેથી $2n-2 = n + (n-2)$ અને $n - 2 \geq 0$ તેથી બીજા સ્થાનમાં $n - 2$ લખી n નો ગુણક 1 ડાબી બાજુના સ્થાન (3)ના અંકોમાં ઉમેરવો પડે.

પણ n અંકી પદ્ધતિમાં અંકો : 0, 1, 2, 3, ... , $(n-1)$ છે. તેથી ત્રીજા સ્થાનમાં $n-n=0$ મૂકી ચોથા સ્થાનમાં 1 ઉમેરવો પડે. સરવાળો ચાર આંકડાની સંખ્યા : 10 $(n-2)$ $(n-1)$ છે.

આમ સંખ્યા લેખન પદ્ધતિનો આધાર $n(\geq 2)$ હોય તો ત્રણ આંકડાની સંખ્યા ઉપર આપણે આગળ વ્યાખ્યાયિત કરેલી પ્રક્રિયા મુજબ અચળાંક નીચે મુજબ મળે.

10 $(n-2)$ $(n-1)$ .... (3)

અહી $n-2$ કે $n-1$ એ બે અંકોની સંખ્યા નથી. તે બન્ને એક આંકડાની સંખ્યા છે. હવે આગળ કોષ્ટક-1 નીચે લખેલા ગુણધર્મો એક પછી એક ચકાસીએ.

(1) સંખ્યા લેખન પદ્ધતિ ગમે તે હોય, પ્રક્રિયાના અચળાંકના, ડાબી બાજુથી ગણતાં, પહેલા બે અંકો હંમેશા 1 અને 0 જ હોય અને અચળાંકના કુણ અંક ચાર (1, 0, $n-2$ અને $n-1$) હોય

(2) દ્વિઅંકી પદ્ધતિનો આધાર (base) 2 છે. $n=2$ મૂકતાં અચળાંક $(1001)_2$ મળે.

$n=3$ મૂકતાં, ત્રિઅંકી પદ્ધતિમાં અચળાંક : $(1012)_3$ મળે.

ક્રમશઃ $n=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ મૂકતાં, અચળાંકો અનુક્રમે

$(1023)_4, (1034)_5, (1045)_6, (1056)_7, (1067)_8, (1078)_9, (1089)_{10}$ મળશે. આ બધાં અચળાંકો આપણે કોષ્ટક 1માં જોઈ ગયા છીએ.

(3) કઈ સંખ્યાલેખન પદ્ધતિમાં અચળાંક પૂર્ણવર્ગ મળે?

આપણે આગળના લેખમાં જોઈ ગયા છીએ કે દ્વિઅંકી પધ્ધતિ, પંચઅંકી પદ્ધતિ અને દશઅંકી પદ્ધતિમાં મેળવેલા અચળાંકો પૂર્ણવર્ગ છે.

$(1001)_2 = (11)_2^2$; $(1034)_5 = (22)_5^2$; $(1089)_{10} = (33)_{10}^2$; વ્યાપક રીતે આ પ્રશ્નને ઉકેલીએ.

અચળાંક : $10\,(n-2)\,(n-1)$

$$= 1\cdot n^3 + 0\cdot n^2 + (n-2)n^1 + (n-1)\cdot n^0$$
$$= n^3 + n^2 - 2n + n - 1 = n^2\,(n+1) - (n+1)$$
$$= (n+1)\,(n^2-1) = (n+1)^2\,(n-1) \qquad \text{.......................} (4)$$

જુઓ કે $(n+1)^2\,(n-1)$ ના અવયવો પૈકી $(n+1)^2$ તો પૂર્ણવર્ગ છે જ. જો $n-1$ પૂર્ણવર્ગ થાય તો અચળાંક :

$10\,(n-2)\,(n-1)$ પૂર્ણવર્ગ થાય.

$n=2$ માટે $n-1 = 1 = 1^2$ તેથી $n=2$ (દ્વિઅંકી સંખ્યાઓ) માટેનો અચળાંક : $10\,(n-2)\,(n-1) = (1001)_2$ પૂર્ણવર્ગ થાય છે : $(1001)_2 = (11)_2^2$

$n=5$ માટે $n-1 = 4 = 2^2$ તેથી $n=5$ માટેનો અચળાંક : $10\,(n-2)\,(n-1) = (1034)_5$ પૂર્ણવર્ગ થાય છે :

$(1034)_5 = (22)_5^2$

$n=10$ માટે $n-1 = 9 = 3^2$ તેથી $n=10$ (દશાંકી સંખ્યાઓ) માટેનો અચળાંક :

$10\,(n-2)\,(n-1) = (1089)_{10} = (33)_{10}^2$

સત્તર અંકી સંખ્યા માટે $n-1 = 17 - 1 = 16 = 4^2$ તેથી સત્તર અંકી સંખ્યા માટેનો અચળાંક : $10\,(n-2)\,(n-1)$ પૂર્ણ વર્ગ થવો જોઈએ.

જેનો આધાર સત્તર હોય તેવી (સત્તર અંકી) સંખ્યા માટે આપણે શૂન્યથી સોળ સુધીના અંકોના સંકેતો નીચે પ્રમાણે લઈએ.

અંકો : 0, 1, 2, 3, ..., 9, x, y, z, u, v, w, t

અહીં દસ માટેનો અંક x, અગિયાર માટે y, બાર માટે z, તેર માટે u, ચૌદ માટે v, પંદર માટે w અને સોળ માટે t લઈએ. (યાદ રાખો સત્તર અંકી સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં સત્તર માટે કોઈ સંકેત નથી સત્તર = 16 + 1 = t + 1 = 10)

આ સંખ્યા લેખન પધ્ધતિમાં ત્રણ આંકડાની સંખ્યા પર આપણે વ્યાખ્યાયિત કરેલી પ્રક્રિયા મુજબ અચળાંક લખીએ.

$10\,(n-2)\,(n-1)$ માં n=સત્તર મૂકતાં, $n-1 = 16 = t$ અને $n-2 = 15 = w$

આમ સત્તર અંકી સંખ્યાલેખન પદ્ધતિમાં ઉપરોક્ત અચળાંક 10wt મળશે.

10wt પૂર્ણ વર્ગ છે? ચાલો, ચકાસીએ.

આ ચકાસણી માટે આપણે અચળાંકને આપણી જાણીતી દશક પદ્ધતિમાં રૂપાંતરિત કરીએ.

$$(10wt)_{17} = 1\cdot 17^3 + 0\cdot 17^2 + w\cdot 17^1 + t\cdot 17^0$$
$$= 4913 + 0 + 15\cdot 17 + 16\cdot 1$$
$$= 4913 + 255 + 16 = (5184)_{10}$$
$$= (72)_{10}^2$$

હવે $(72)_{10}$ ને સત્તર અંકી સંખ્યા પદ્ધતિમાં લખીએ

$$(72)_{10} = 68 + 4 = 4\cdot 17^1 + 4\cdot 17^0 \quad = (44)_{17}$$

આમ, $(10wt)_{17} = (44)_{17}^2$

સત્તર અંકી સંખ્યાલેખન પદ્ધતિમાં $(44)_{17}^2 = (44)_{17} \times (44)_{17}$ કરી 10wt મેળવવાનું કામ અમે વાચકો પર છોડી દઈશું.

સંખ્યાલેખન પધ્ધતિનો આધાર સત્તર પછી કયો લઈએ તો અચળાંક પૂર્ણવર્ગ મળે?

આ અચળાંક કેટલો મળે? અને તે કઈ સંખ્યાનો વર્ગ હશે ? વગેરે પ્રશ્નોના ઉત્તર વાચકો મેળવે તેવી અપેક્ષા છે.

1089- પુરાણની આ પૂર્ણાહુતિ નથી. વિશેષ હવે પછીના અંકમાં.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ત્રિકોણ માટે 'હાઈકુ'

(1) અસમરેખ
ભિન્ન ત્રણ બિંદુઓ,
બને ત્રિકોણ.

(2) એકસો એંશી,
ખુણાનો સરવાળો
છે, ત્રિકોણમાં.

(3) ખુણાનાં માપ,
બતાવે ત્રિકોણના,
ત્રણ પ્રકાર.

(4) ખુણાનું માપ,
નેવું, તો કાટકોણ
ત્રિકોણ બને.

(5) એક જ ખૂણો
નેવુ છે, તોબાકીના
છે લઘુકોણ.

(6) ત્રિકોણમાં તો
કાટખુણા સામેની
બાજુ એ કર્ણ.

(7) કર્ણનો વર્ગ
બે બાજુના વર્ગોનો
છે સરવાળો.

(8) દરેક ખુણો
સાઈઠ, તો ત્રિકોણ
છે સમબાજુ.

(9) મોટી બાજુની
સામેનો ખુણો મોટો
છે ત્રિકોણમાં.

(10) હોય બે બાજુ
સમાન, તો સામેના
ખુણા સમાન.

(11) બે બાજુઓનો
સરવાળો છે ત્રીજી
કરતાં મોટો

(12) બે બાજુઓની
બાદબાકી છે ત્રીજી
કરતાં નાની.

(13) ત્રણે બાજુઓ
અસમાન, ત્રિકોણ
વિષમબાજુ.

(14) હોય બે બાજુ
સમાન, તો ત્રિકોણ
સમદ્વિબાજુ.

અંતમાં, એટલું જ કહું છું કે,

(15) ટૂંકમાં ઘણું
સમજાવે બધાને,
એ છે 'હાઈકુ'.

(M) 9376690008
rameshmalania@gmail.com

રમેશ મલણિયા
અમરેલી

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ :

ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા : હ્યુગો ડુમિનીલ-કોપિન (Hugo Duminil-Copin)

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, VNSGU, સુરત. (M) 99742 30088

'મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ' લેખશ્રેણી હેઠળ 2022ના ત્રણ ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતાઓનાં જીવન અને કાર્યોની વિસ્તૃત માહિતી મેળવ્યા બાદ ચોથા અને અંતિમ ફિલ્ડ્સ મેડલ-2022ના વિજેતા-**હ્યુગો ડુમિનીલ-કોપિન (Hugo Duminil-Copin)**નાં જીવન અને કાર્યોની જાણકારી આ વખતે મેળવીએ તે યોગ્ય છે.

ગણિત અને સૈદ્ધાંતિક ભૌતિકશાસ્ત્રમાં અદ્યતન સંશોધનને સમર્થન આપતી ફ્રેન્ચ સંશોધન સંસ્થા Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) ની રચના થઈ ત્યારથી ગણિતના બાર કાયમી પ્રોફેસરોમાંથી આઠમા ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા હ્યુગો ડુમિનીલ-કોપિનનો જન્મ 26 ઑગસ્ટ 1985ના રોજ ફ્રાન્સના ચેટેનાય-માલાબ્રી શહેરમાં થયો હતો. ડુમિનીલ-કોપિનના પિતા મિડલ સ્કૂલમાં રમત-ગમતના શિક્ષક અને માતા ડાન્સર હતા, જેઓ બાદમાં પ્રાથમિક શાળામાં શિક્ષિકા તરીકે ફરજ બજાવતા હતા. નાનપણથી જ રમત-ગમતમાં ઊંડી રુચિ ધરાવતા હ્યુગોએ ખાસ કરીને હેન્ડબોલમાં તેમની રુચિને આગળ વધારવા માટે શરૂઆતમાં રમતલક્ષી હાઈસ્કૂલમાં હાજરી આપવાનું વિચાર્યું, પણ કોઈક કારણસર ગણિત અને વિજ્ઞાન પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરતી પેરિસની લાયસી લુઈસ-લે-ગ્રાન્ડ નામક શાળામાં પ્રવેશ મેળવ્યો.

હ્યુગો કહે છે કે "હું ક્યારેય નિરાશ થતો નથી. હું હંમેશાં સકારાત્મક છું. હું જે કરી રહ્યો છું તેનો હું આનંદ માણીશ." તેમના આ જ વલણે હાઈસ્કૂલ પછી તેમની મદદ કરી. હ્યુગોએ હાઈસ્કૂલ પછી વિદ્યાર્થીઓને વિશિષ્ટ યુનિવર્સિટી માટે રાષ્ટ્રીય પ્રવેશ પરીક્ષા આપવા તૈયાર કરતા 'ક્લાસ પ્રિપેરીટોયર' નામના બે વર્ષના કાર્યક્રમમાં પ્રવેશ મેળવ્યો. હ્યુગોએ આ પરીક્ષા પાસ કરી. ફ્રાન્સની ટોચની યુનિવર્સિટીઓમાંની એક, પેરિસમાં આવેલ Ecole Normale Superieure ખાતે પ્રવેશ મેળવ્યો. તેમણે યુનિવર્સિટીના અભ્યાસ વખતે Percolation Theory (જેનો ઉપયોગ ગાણિતિક ભૌતિકશાસ્ત્રમાં આંકડાકીય મુદ્દાઓના ઉકેલ માટે થાય છે)માં રસ કેળવ્યો.

લગભગ 2008 સુધી, Percolation Theory મોટે ભાગે સરળ મોડલની વિગતોને પિન કરવા સુધી મર્યાદિત હતી, જેને Bernoulli; Percolation કહેવાય છે. હ્યુગોએ પોતાના Ph.D અભ્યાસના સમયગાળા દરમિયાન આ મોડેલની સમજણને અન્ય Percolation મોડલ્સ સુધી વિસ્તારવાને પોતાનું મિશન બનાવ્યું હતું.

2012માં 27 વર્ષની ઉંમરે હ્યુગોએ યુનિવર્સિટી ઓફ જીનીવામાંથી Ph.Dની પદવી મેળવી. 2012માં, તેમના પોસ્ટડોક્ટરેટ પછી હ્યુગોને જિનીવા યુનિવર્સિટીમાં પહેલા સહાયક પ્રોફેસર અને ત્યારબાદ 2014માં પ્રોફેસર તરીકે નિયુક્ત કરવામાં આવ્યાં હતાં. 2016થી તેઓ IHESમાં કાયમી પ્રોફેસર તરીકે ફરજ બજાવી રહ્યા છે.

હ્યુગો ડુમિનીલ-કોપિનના કામે તેમને ઘણા પુરસ્કારો મેળવી આપ્યાં છે. અંગ્રેજી ગણિતશાસ્ત્રી રોલો ડેવિડસનના નામથી સંભાવનાશાસ્ત્રીઓની પ્રારંભિક કારકિર્દીને બિરદાવવા માટે આપવામાં આવતો Rollo Davidson Prize, 2012માં હ્યુગોને વિન્સેન્ટ બફારાં સાથે આપવામાં આવ્યો. ગણિતના ક્ષેત્રમાં ઉત્કૃષ્ટ સિદ્ધિઓ માટે અંદાજે દર ત્રણ વર્ષે આપવામાં આવતો

Oberwolfach Prize હ્યુગોને 2013માં એનાયત થયો. તે જ વર્ષે તેમને ઇન્ટરનેશનલ એસોસિયેશન ઓફ મેથેમેટિકલ ફિઝિક્સ દ્વારા "Early Career Award"થી પણ સન્માનિત કરવામાં આવ્યા. 2016માં તેમને યુરોપિયન મેથેમેટિકલ સોસાયટીનો પુરસ્કાર આપવામાં આવ્યો અને 2017માં Breakthrough Foundation એ તેમને ગણિતમાં New Horozon in Mathematics Prize એનાયત કર્યું, જે ખાસ કરીને આશાસ્પદ યુવા ગણિતશાસ્ત્રીઓ માટે આરક્ષિત છે. તે જ વર્ષે તેમને French Academy of Scienceના Grand Prix Jacques Herbrand પુરસ્કાર અને ગાણિતિક સંભાવનાઓના ક્ષેત્રમાં ઉત્કૃષ્ટ સંશોધન માટે Loeve Prizeથી સન્માનિત કરવામાં આવ્યા.

2018માં તેઓ બ્રાઝિલના રિયો ડી જાનેરોમાં આયોજિત ગણિતશાસ્ત્રીઓની આંતરરાષ્ટ્રીય કોંગ્રેસના આમંત્રિત વક્તાઓમાંના એક હતા. 2019માં તેઓ Academia Europaeaના વક્તા તરીકે ચૂંટાયા અને તે જ વર્ષે તેમને Dobrushin Prize એનાયત થયું.

2022માં હ્યુગો ડુમિનિલ-કોપિનને ફિલ્ડ્સ મેડલ એનાયત થયો. આ મેડલની અધિકૃત Website મુજબ "Hugo Duminil-Copin is awarded the Fields Medal 2022 for solving longstanding problems in the probabilistic theory of phase transitions in statistical physics, especially in dimensions three and four."

હ્યુગો સાહસિક પ્રવૃત્તિઓમાં ખુબ જ રસ ધરાવે છે અને તેમની આ રુચિ તેમના કાર્યને પણ લાક્ષણિકતા આપે છે. Swiss Federal Institute of Technology Zurichના ગણિતશાસ્ત્રી Wendelin Wernerનું માનવું છે કે હ્યુગોએ Percolation Theory પર કામ કર્યું તે પહેલાં આ વિષયને લગતાં મોડેલ્સનો અભ્યાસ અટકી ગયો હતો. હ્યુગોએ આ ક્ષેત્રમાં કામ કર્યું પછી તો આ ક્ષેત્રને ઓળખી પણ શકાતું નથી. આ ક્ષેત્રમાં બધુ સરળ, સુવ્યવસ્થિત અને મજબૂત પરિણામો સાથે સાંકળી શકાય છે. હ્યુગોના મતે Percolation Theory સાથે તેમનો મેળાપ સાહજિક હતો. તેમના મતે એ તેમનો પહેલો પ્રેમ હતો.

ડુમિનીલ-કોપિનનાં સ્વભાવનું બીજું પાસું જે તેમના કામને ઘણું પ્રેરિત કરે છે, તે છે તેમની Anxiety. તેમના મતે વ્યક્તિગત હોય કે વ્યાવસાયિક, જ્યાં સુધી કોઈ કામને તેઓ પોતાનું 100% આપી એવા મુકામ પર ના પહોંચાડે કે જેની આગળ પરિણામો મેળવવા તેમને માટે શક્ય જ ન હોય ત્યાં સુધી તેમને શાંતિ થતી નથી. પોતાના કાર્યને આ જ કારણોસર બીજાના દૃષ્ટિકોણથી જોવા માટે તેઓ હંમેશાં બીજા સાથે કોઈને કોઈ વિષય પર ચર્ચા કરતા જોવા મળે છે અને તેથી જ તેઓના ઘણાખરા સંશોધનપત્રો બીજા ગણિતશાસ્ત્રીઓ સાથે સહયોગમાં છે.

હ્યુગો ડુમિનીલ-કોપિન આ જ રીતે ગણિત વિષયને પોતાની આગવી શૈલીથી સમૃદ્ધ બનાવતા રહે અને બીજા અસંખ્ય પુરસ્કારો મેળવે તેવી પ્રભુને પ્રાર્થના.

સંદર્ભ :

1.en.wikipedia.org/wiki/Hugo_Duminil_Copin

2. Cnrs.fr/en/press/hugo-duminil-copin-french-mathematician-and permanent – professor-ihes-has-been-awarded-fields.
3. quantamagazine.org/hugo-duminil-copin-wins-the-fields-medal-20220705/.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

Art Integrated Approach to Math Teaching: An Activity-Based Demonstration of π

Author's Name: Shailaja Bairy
Affiliation: Research Scholar at Department of European Studies, MAHE, Manipal
Faculty at Madhava Kripa School, Manipal, Karnataka-576104, India
Email ID : msshailajabairy@gmail.com

Abstract:

This research paper illustrates and evidences the effectiveness of an art integrated approach to math teaching in enhancing students' understanding of mathematical concepts. The study explores the collaboration between teachers of art and mathematics, in planning and executing an activity-based demonstration of the approximate value of pi. The aim of the study is to determine if an art integrated approach can foster students' engagement in maths learning and promote their understanding/exploration of complex mathematical concepts such as pi approximation. Data were collected from 68 students in grade 7, who participated in the activity. The results of the study indicate that the art integrated approach to maths teaching is effective in enhancing students' engagement and understanding of mathematical concepts.

Introduction:

Mathematics is a subject that is often perceived as dry and uninteresting, leading to a lack of engagement from students. Traditional teaching methods are often unable to capture students' attention and promote their interest in the subject. Art integrated approaches have been shown to have greater impact on students' engagement in learning and conceptual understanding of complex concepts. These offer space for students to explore the content through various perspectives. In this study, we illustrate and investigate the effectiveness of an art integrated approach to math teaching, for the concept of demonstration *of* approximate pi value, through an art integrated activity.

Literature Review:

A research study by Dakota Baird describes how educators could successfully use the art integration to flexibly extend their classes outside of the traditional educational box and turn them into engaging and creative (2015) [1]. This could illustrate the equation: Increased Student Engagement + Flexibility = Increased opportunity for Learning. He insisted that an increased research on strategies, tools and illustrative examples to implement art integration is required to support teachers. Research findings by Steffen P et al (2019) [2] showed that skills (viz visualization, generation and externalization) found in students inclined to arts, mainly contributed positively not only to the drawing but also to multimedia output and reduced cognitive load. A study by Anja Brezovnik (2017) [3] revealed that a consistent exposure to art integrated activities in Gr 5, showed advantages in terms of mathematical reasoning, intrinsic motivation, visual imagination and reflection on the process of generating creative ideas. Burton et al (1999) [4], in his research involving 2,000 students, showed that subjects like mathematics, science which involve complex cognitive and creative skills are typically art friendly. Students exposed to art education exhibited significantly greater creativity in their way of thinking, as well as in perception, problem solving and expressing themselves. Also, they showed cooperative and collaborative tendencies with peers. It's important to note that, a supporting manual by CBSE (2019) [5], on art integration, lists the objective as 'To develop creative and critical thinking skills, an exploratory and inquisitive attitude and the ability to do art based inquiry'. Language arts is mentioned as one of the example for art integration, advantageous as it integrates three subjects of study viz Arts, Language, Maths.

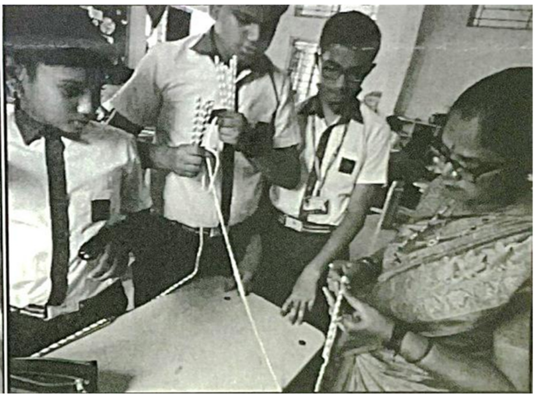
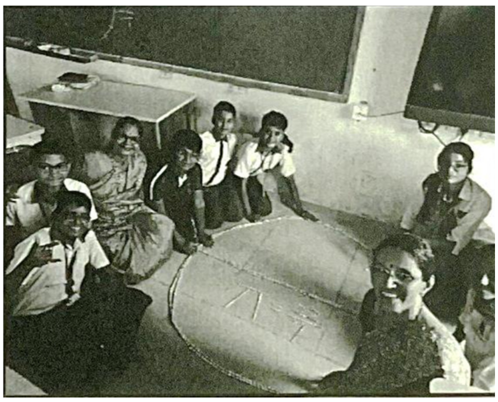
Methodology:

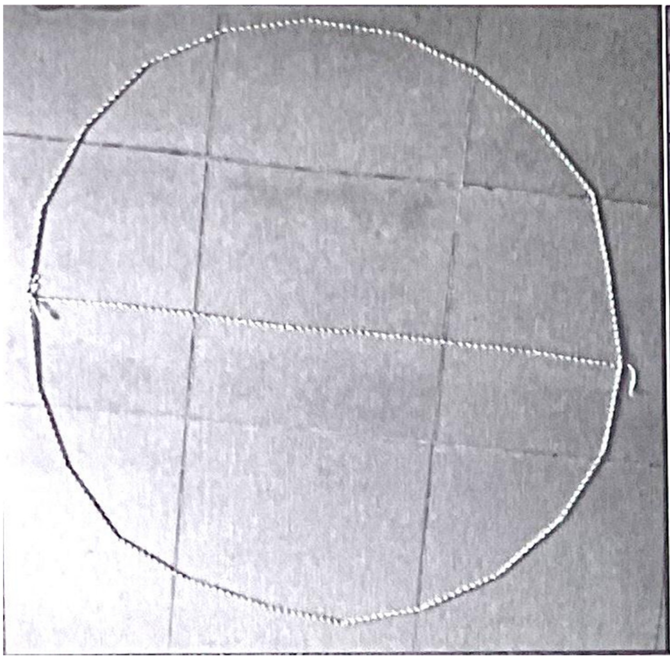
The study was conducted in middle school section of Madhava Kripa School, Manipal, India. A total of 68 students in grade 7 participated in the activity-based demonstration of Pi approximation. The teachers of art and mathematics collaborated in planning and executing the activity. The activity involved creating a circle based artwork that can effectively demonstrate & illustratively calculate the approx. value of pi. The standard definition of Pi C/d is considered as standard reference. Data were collected from the students using a pre-activity survey, a post-activity survey, and a mathematical understanding test.

Details: The objective of the activity: To demonstrate approximate Pi = 22/7 using art integration technique

Materials: Colourful crystal/acrylic pipes or straws, stable and thick wire *or* thread of suitable thickness.

Procedure of the activity: Take 22 straws or crystal pipes of equal length, but two sets of distinct/contrast coloured (11 each in a set). Insert thread or wire to create a circular shape (garland type), with alternate crystal pipes arranged, as shown. Now choose 7 more crystal pipes and form a separate garland, straight in shape, to form the diameter. Now connect and set this to form the diameter of the circle as shown in figure. A circle (just for reference) can be drawn prior to doing the actual setting. It illustrates the concepts of pi beautifully. One can count 22 crystal pipes along the circumference and 7 along the diameter. If such multiple sets are prepared, these can be set in such a way to overlap rings one above the other and appear more attractive, resembling a paddling pool. The activity can be tried with any equi-sized hollow tubes, naturally available in nature.




2. Activity using circular geo board:

Pre requisite to activity:

Approach to create a Geoboard of required number of divisions: The Geo Board of our choice can be created on a bulletin board, using bulletin pins and the cut out of a circular shape divided into required number of sectors. The chart paper on which a circle (With sectors marked) is drawn must be fixed on the bulletin board. The circular cut-out has to be attached to bulletin board accurately with the equi- distanced marked points along circumference, fixed using bulletin pins.

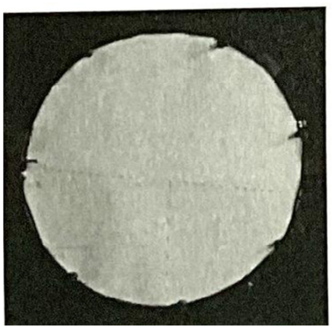
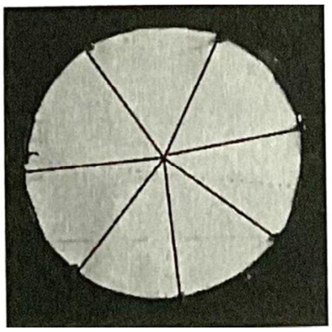
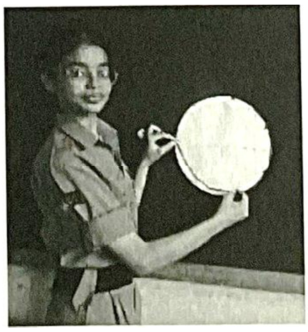
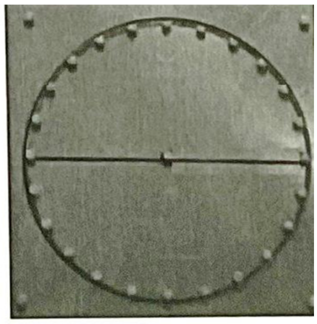
(Refer to a sample at: https://youtu.be/o1cCBCISnpshttps://youtu.be/o1cCBCISnps)

How to divide a circle into 7 equal sectors?

Refer to: https://youtu.be/0rd5GpL2IBw?si=VMh6XGOn5xkaKVqM

Create a circular geo board with 7 equal divisions along the circumference. Connect the two ends of the diameter accurately using the required length of thread. Mark the length of the thread to note the diameter. Now, starting from one end of the diameter, trace the same thread along the circumference (around it, connecting each nail). Along the circumference, the thread completes three full rounds and extends 1 division out of 7.

This illustrates that;

Diameter x $3\frac{1}{7}$ = approx. = Circumference

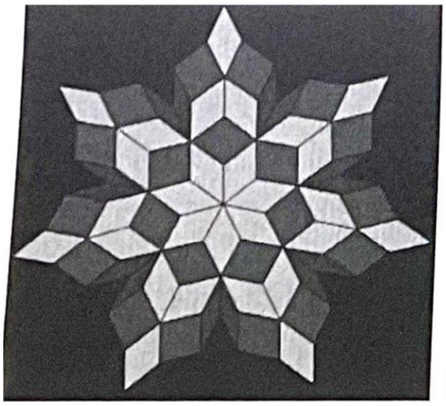
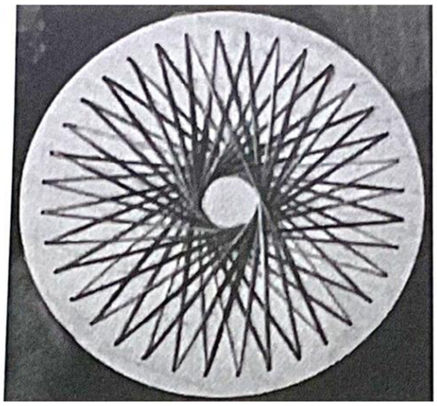
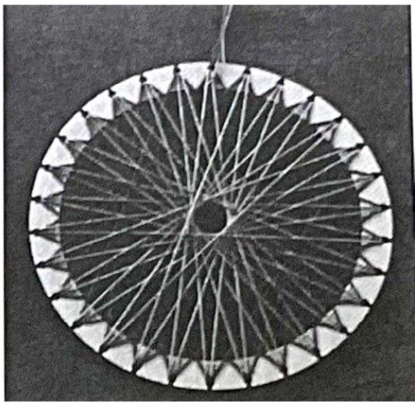
Diameter x (approx) $\frac{22}{7}$ = Circumference, In other words, $\frac{C}{d} = \frac{22}{7}$ = A constant π

3. Demonstration by experimental technique:

To begin with, teacher demonstrates the ratio C/d by measuring the circumference and diameter each, for three distinct sized circular objects. A note on history of discovery of pi value is also demonstrated. This method involves inscribing and circumscribing a regular hexagon. The concept clarity is at a higher level, when actual construction technique is used. Students individually repeat the activity at home and submit the same in the form of video. The Pi value recitation also is done by students who are inclined to this and skilled in it. The following link provides the access to videos of the activity.

https://drive.google.com/drive/folders/18qg7PemhftenT25W9rJIXArpy5vFY9pE?usp=sharing

Using this construction technique/Geo board method, students create the following art forms. Only those who are inclined to drawing are motivated to take part in this. Others play supportive roles.

Results:

The results of the study indicate that the art integrated approach to math teaching is effective in enhancing students' engagement in learning and promoting their understanding of mathematical concepts. The pre-activity survey indicated that 70% of the students found the concept to be difficult, while only 20% found art to be difficult. However, the post-activity survey showed that 80% of the students found the activity to be interesting, and 75% of the students reported that they had a better understanding of pi after the activity. The mathematical understanding test also showed an improvement in students' comprehension of pi, with a mean score of 8.25 out of 10 compared to a mean score of 6.3 out of 10 in the pre-activity test. At the completion of the lesson, a group activity to create a mathematical model using circles was taken up. This was integrated to language arts, as students created the model and wrote a script/poem to depict the same. The materials used for the model were exclusively locally available and not expensive.

Discussion:

The results of the study suggest that an art integrated approach to math teaching can enhance students' cognition in maths and awareness in arts. Complex mathematical concepts such as pi; properties of circles can be comfortably encoded their meaning through visual elements. The collaboration between teachers of art and maths in planning and executing the activity was crucial in achieving the desired outcomes. The activity-based approach was successful in promoting students' interest and motivation in learning, leading to an improvement in their mathematical understanding.

Conclusion:

In conclusion, an art integrated approach to math teaching can be an effective way of enhancing students' engagement in learning and promoting their understanding of complex mathematical concepts. The collaboration between teachers of art and maths can lead to creative and innovative teaching methods that can foster students' interest and motivation in learning. The activity-based demonstration of pi showed that students' engagement in learning and understanding of mathematical concepts can be enhanced through an art integrated approach. Further research is needed to investigate the effectiveness of this approach in other mathematical concepts and in different age groups.

References

1. Dakota, Baird (April 2015) Integrating the Arts in Mathematics Teaching, a research proposal submitted in conformity with the requirements for the degree of Master of Teaching, Department of Curriculum, Teaching and Learning Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/68768/1/Baird_Dakota_L_201506_MT_MTRP.pdf
2. Schmidgall, S. P., Eitel, A., & Scheiter, K. (2019). Why do learners who draw perform well? investigating the role of visualization, generation and externalization in learner- generated drawing. *Learning and Instruction, 60,* 138–153. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.006
3. Brezovnik, A. (2017). The benefits of fine art integration into mathematics in Primary School. Center for Educational Policy Studies Journal, 5(3), 11-32. https://doi.org/10.26529/cepsj.125
4. Burton, J., Horowitz, R., & Abeles, H., "Learning in and through the arts: Curriculum implications. In Champions of change: The impact of the arts on learning (pp. 35-46), 1999
5. CBSE, (2019). Art Integration- Towards experiential learning. https://cbseacademic.nic.in/web_material/Circulars/2019/art_integration.pdf

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

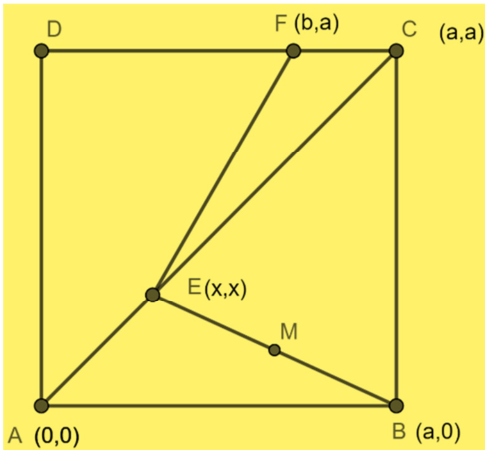
એમ. એચ. વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9824669364

સુગણિતમ્‌ના જાન્યુઆરી 2024 ના અંક (અંક 312)માં નીચેનો કોયડો અને તેનો ઉકેલ આપેલાં છે.

$ABCD$ ચોરસ છે. રેખાખંડ AC અને CD પર અનુક્રમે બિંદુઓ E અને F એવી રીતે લેવામાં આવ્યાં છે કે જેથી ΔBEF સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ બને અને $\angle E$ કાટખૂણો હોય. M, BEનું મધ્યબિંદુ છે. જો $MA=5, MC=7$, હોય તો ચોરસ $ABCD$નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આપણે અહીં આ કોયડાની અને તેના ઉકેલની ચર્ચા કરવી છે. હું ધારું છું કે ઉકેલ શ્રી પ્રહલાદભાઈ વ્યાસ સાહેબે આપ્યો છે. તેમણે નોંધ્યું છે કે ઉકેલમાં $\angle E$ કાટખૂણો હોવા બાબતનો ઉપયોગ કર્યો નથી. તેમણે એવો પ્રશ્ન પણ પૂછ્યો છે કે જો $EB=EF$ થાય તો $\angle BEF$ કાટખૂણો થાય તેવું સાબિત કરી શકાય? આપણે એક પછી એક મુદ્દાની ચર્ચા કરીએ.

(1) કોયડાના ઉકેલ માટે $\angle BEF$ કાટખૂણો હોવાની જરૂર નથી, એ વાત સાચી છે. ઉકેલમાં આ બાબત ($\angle E$ કાટકોણ હોવાની) ક્યાંય વપરાતી નથી. બીજી બાજુ, લેખકે પ્રશ્ન પૂછ્યો છે કે જો $EB=EF$ તો $\angle BEF$ કાટખૂણો થાય? આ પ્રશ્નનો જવાબ 'હા'માં છે. સાબિતી સરળ છે.



ધારો કે $EB=EF$. આપણે આકૃતિ અને આકૃતિમાંનાં બિન્દુઓના યામ મૂળ લેખમાં આપ્યા પ્રમાણે લઈશું. આથી, E, F, B ના યામ અનુક્રમે (x,x), (b,a), $(a,0)$ છે. આથી $EB=EF$ હોવાથી $(x-a)^2+(x-0)^2=(x-b)^2+(x-a)^2$.
આથી $x=\frac{b}{2}$ અને E ના યામ $\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$ થશે.

હવે $\overleftrightarrow{EB}$ નો ઢાળ $=\dfrac{0-\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}}=-\dfrac{\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}}$

અને $\overleftrightarrow{EF}$ નો ઢાળ$=\dfrac{a-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}$. આ બે ઢાળનો ગુણાકાર -1 છે. તેથી $\angle BEF$ કાટખૂણો છે. આમ ઉકેલ માટે $\angle BEF$ કાટકોણ હોવાની જરૂર નથી પરંતુ $EB=EF$ હોવાથી આ ખૂણો આપોઆપ કાટકોણ થઈ જાય છે.

(2) આપણે એ પણ સહેલાઈથી બતાવી શકીએ કે જો $\angle BEF$ કાટખૂણો હોય તો $EB=EF$. ધારો કે $\angle BEF$ કાટખૂણો છે. E, F, B, ના યામ અનુક્રમે (x,x), (b,a), $(a,0)$ હોવાથી $\frac{a-x}{b-x}\times\frac{-x}{a-x}=-1$ તેથી $x=b-x$ અને

$x=\frac{b}{2}$. તેથી Eના યામ $\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$ થશે. હવે $EB=EF$ હોવાનું સહેલાઈથી જોઈ શકાશે. આમ વિધાનો $EB=EF$ અને $\angle BEF$ કાટકોણ છે એ સમાનાર્થી છે અને તેથી મૂળ પ્રશ્નમાં આ બેમાંથી એક શરત મૂકી હોત તો ચાલત.

અહીં નોંધીએ કે પ્રશ્નમાં ΔBEF સમદ્વિબાજુ છે એટલું જ આપેલું છે. $EB=EF$ આપેલ નથી, જ્યારે ઉકેલમાં $EB=EF$ વાપરેલ છે. ઉપર જોયું તેમ જો E કાટકોણ હોય તો $EB=EF$ થાય. કદાચ આ માટે જ E કાટકોણ હોવાનું આપ્યું હશે. પણ તો પછી ΔBEF સમદ્વિબાજુ હોવાનું કહેવાની જરૂર ન હતી.

(3) ખરેખર તો પ્રશ્નમાં F બિંદુની કોઈ જરૂર જ નથી. એટલું આપેલું હોત કે E $\overline{AC}$ પરનું કોઈ બિંદુ છે, M $\overline{BE}$નું મધ્યબિંદુ છે, $MA=5$, $MC=7$. તો પણ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાત અને જવાબ એ જ આવત. આ જોવાને માટે આપણે ફરીથી A, B, Eના યામ અનુક્રમે $(0,0)$, $(a,0)$ અને (x,x) લઈએ. તો Mના યામ $\left(\frac{a+x}{2},\frac{x}{2}\right)$ થશે. Cના યામ (a,a) હોવાથી $AM^2=\left(\frac{a+x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}$ અને $CM^2=\left(\frac{x-a}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}-a\right)^2$ $AM=5$ અને $CM=7$ લેતાં, $a^2+2ax+2x^2=100$ અને $5a^2-6ax+2x^2=196$

$$\therefore \left(5a^2-6ax+2x^2\right)-\left(a^2+2ax+2x^2\right)=96$$

$$\therefore a^2-2ax=24 \text{ અથવા } x=\frac{a^2-24}{2a}$$

xનું આ મૂલ્ય સમીકરણ $a^2+2ax+2x^2=100$માં મૂકતાં અને સાદુંરૂપ આપતાં સમીકરણ $5a^4-296a^2+576=0$ મળે છે. આ એ જ સમીકરણ છે, જે અંક 312 માં પ્રશ્નના ઉકેલમાં મળે છે. આમ a^2નું મૂલ્ય એ ઉકેલમાં મળે છે એ જ મળે છે. સારાંશ એ કે E બિંદુ $\overline{AC}$ પર ક્યાં લેવામાં આવે છે તે અગત્યનું નથી.

(4) ઉપરની ચર્ચા પરથી ખ્યાલ આવશે કે પ્રશ્ન ચોરસ માટે નહિ, પરંતુ કાટકોણ ત્રિકોણ માટે જ છે. પ્રશ્ન નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય:

સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ΔABCમાં $\angle B$ કાટકોણ છે અને E કર્ણ $\overline{AC}$ પરનું કોઈ બિંદુ છે. જો M એ $\overline{BE}$નું મધ્યબિંદુ હોય અને $AM=5$ અને $CM=7$ હોય તો ΔABCનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જો P અને Q $\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$નાં મધ્યબિંદુઓ હોય તો M દેખીતી રીતે જ $\overline{PQ}$ પર હશે. આનો અર્થ એવો થાય કે $\overline{PQ}$ના કોઈ બિંદુનાં A અને C થી અંતર જાણતા હોઈએ તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાય.

પી.કે. વ્યાસની નોંધ :

(1) પ્રશ્ન અને તેનો ઉકેલ શ્રી દયારામભાઈ ઠક્કરનો હતો. અમે અંગ્રેજી લેખનું ગુજરાતીમાં ભાષાંતર કર્યું હતું. હા, છેલ્લા બે પ્રશ્નો અમારા ધ્યાન પર આવ્યા હતા. એ દયારામભાઈના મૂળ લખાણમાં ન હતા.

(2) આ પ્રશ્નનો ભૌમિતિક ઉકેલ હવે પછીના કોઈક અંકમાં ‘વીસરાતી ભૂમિતિ’- માં આપીશું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ડૉ. સચિન ગજ્જર
અમદાવાદ (M) 99253 62754

સળંગ અંક-312 (E-Copy-7)ના ઉકેલો

શ્રી દયારામભાઈ ઠક્કરે પ્રા. પ્ર.ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો, સળંગ અંક-312 ના ત્રણેય પ્રશ્નો : (10), (11) અને (12)ના સાચા ઉકેલ મોકલાવેલ છે આ ઉકેલો અત્રે થોડા ફેરફાર સાથે રજૂ કરેલ છે.

(10) Solve the equation $x(x+1) = y(y+4)$, where x and y are positive integers.

Solution :

Here $x(x+1) = y(y+4)$; $x, y \in \mathbb{N}$

$\therefore 4x^2 + 4x = 4y^2 + 16y$

$\therefore 4x^2 + 4x + 1 + 15 = 4y^2 + 16y + 16$

$\therefore (2x+1)^2 + 15 = (2y+4)^2$

$\therefore (2y+4)^2 - (2x+1)^2 = 15$

$\therefore (2y - 2x + 3)(2y + 2x + 5) = 15$

$\therefore 2y - 2x + 3 = 1$ and $2y + 2x + 5 = 15.$

or $2y - 2x + 3 = 3$ and $2y + 2x + 5 = 5$

By solving these equations, we have $x = 3$ and $y = 2$.

(11) Find the sum : $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \cdots \ldots \ldots ..$

Solution :

Let $S = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \frac{8}{3^4} + \cdots \ldots \ldots ..$ (1)

$\therefore \frac{1}{3}S = \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{6}{3^4} + \frac{8}{3^5} + \cdots \ldots \ldots ..$ (2)

Taking (1) – (2), we have

$$S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{6}{3^3} - \frac{4}{3^3}\right) + \left(\frac{8}{3^4} - \frac{6}{3^4}\right) + \cdots$$

$$\therefore \frac{2}{3}S = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \cdots$$

$$\therefore S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore S = \frac{3}{2}$$

(12) Let x and y be positive real numbers such that $(1+x)(1+y) = 2$. Prove that $xy + \frac{1}{xy} \geq 6$.

Solution :

For $x, y \in R^+$, by AM $\geq$ GM, we have

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\quad\therefore (x+y)^2 \geq 4xy$ .... (1)

Now $(1+x)(1+y) = 2$

$\therefore 1 + x + y + xy = 2$

$\therefore 1 - xy = x + y$

$\therefore (1-xy)^2 = (x+y)^2$

$\therefore (1-xy)^2 \geq 4xy$ $\quad(\therefore$ from (i))

$\therefore 1 - 2xy + x^2y^2 \geq 4xy$

$\therefore x^2y^2 + 1 \geq 6xy$

$\therefore xy + \frac{1}{xy} \geq 6$

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો : અંક-313

(13) If $a_n = \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}, n \geq 1$, then find the value of $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$

જો $a_n = \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}, n \geq 1$, હોય, તો $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ નું મૂલ્ય શોધો.

(14) If a, b, c are positive real numbers, such that $a + b + c = 4$ and $abc = 1$, then prove that $a^2 + 8a \geq (b-c)^2$.

જો a, b, c એવી ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય કે જેથી $a + b + c = 4$ and $abc = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $a^2 + 8a \geq (b-c)^2$.

(15) Let $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$, If $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$ for integer $n \geq 1$, then find the coefficient of x in $P_{20}(x)$.

ધારો કે $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ છે. જો પૂર્ણાંક $n \geq 1$ માટે $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$ હોય, તો $P_{20}(x)$ માં x નો સહગુણક શોધો.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

5th Prof. P. C. Vaidya National Conference on Mathematical Sciences

Date: February 19-20, 2024

Venue: Prof. P C Vaidya Auditorium

Reported by: B. Vidhyasri

Event Overview

DAY 1

The Inauguration Ceremony of the 5th Prof. P. C. Vaidya National Conference on Mathematical Sciences was a poignant and dignified affair, marked by a symphony of scholarly luminaries and esteemed dignitaries. As the radiant glow of the ceremonial lamp illuminated the dias, it symbolized the collective pursuit of knowledge and enlightenment that characterized the event. Vice Chancellor Kalpesh Pathak, a beacon of academic excellence, stood alongside renowned professors as they invoked the blessings of Goddess Saraswati through a soul-stirring prayer song. Amidst a backdrop of reverence and respect, each member on the dias was formally felicitated, their contributions to academia celebrated with eloquence by Shri Prasad. The audience was enraptured by V. A. Patel's mesmerizing recounting of his mathematical journey, while Kumaresan's motivational address ignited a fire of inspiration in every heart. Vice Chancellor Pathak, in his address, emphasized the transformative power of education and the pivotal role of conferences like these in shaping the future of mathematical sciences. Dr. Paras Uchat, the conference's conveyor, concluded the ceremony with a heartfelt vote of thanks, expressing gratitude for the collective efforts that promised two days of enlightenment and collaboration ahead. The event kicks off with the inauguration of the wall poster exhibition at Abhivyakti which was based on the theme Mathematical Knowledge System, setting the tone for a celebration of mathematical prowess followed by group photo at amphitheatre. The first talk of the 5th Prof. P. C. Vaidya National Conference on Mathematical Sciences was delivered by S. Kumaresan from the University of Hyderabad, delved into the fundamental concepts of topology, elucidating the essence of T1 space, T2 space, and normal space, as well as the significance of separation axioms in defining the properties of a space. With a blend of clarity and depth, Kumaresan not only imparted knowledge but also instilled a spirit of comprehension among the audience, encouraging them to grasp the concepts rather than merely memorize them. The interactive question-answer session that ensued allowed for a dynamic exchange of ideas, wherein Kumaresan elucidated on topics such as space-clearing theory and the application of Mobius function in various fields. Notably, he highlighted the relevance of topology in diverse domains, including its role in cancer studies, captivating the audience with the far-reaching applications of mathematical theory. At the culmination of his enlightening discourse, Dr. Paras Uchat felicitated S. Kumaresan, acknowledging his invaluable contribution to the conference and applauding his commitment to fostering a deeper understanding of mathematical concepts.

Following the enlightening discourse by S. Kumaresan, the audience was treated to a captivating speech by V. A. Patel on the intriguing subject of chaos. With erudition and eloquence, Patel delved into the nexus between chaos theory and the Special Theory of Relativity, unraveling the complexities that underlie chaotic systems. Through vivid illustrations and compelling examples, he elucidated how chaos manifests in the form of unpredictable behavior, illustrated graphically to showcase the profound impact of seemingly minute differences on outcomes. Drawing parallels between chaos theory and the erratic behavior of mosquitoes, Patel underscored the significance of chaos in understanding nonlinear dynamics in nature. He shed light on the groundbreaking discovery of the Feigenbaum number in the 1980s, a milestone that propelled chaos theory into the forefront of scientific inquiry. As his discourse drew to a close, Darshana Likhada, an esteemed member of the conference, extended felicitations to V. A. Patel, acknowledging his insightful contribution and the illuminating journey through the enigmatic realm of chaos.

In a captivating address following V. A. Patel's discourse, Prof. Praveen Agrawal delved into the intricate realm of special functions and their pivotal role in mathematical analysis. With eloquence and precision, he elucidated the process of numerical analysis, demonstrating how iterative techniques are employed to attain precision in solutions. Agrawal ingeniously tied mathematical concepts to real-world applications, showcasing the utilization of algebra and graph theory in platforms like Google Maps. Emphasizing the symbiotic relationship between mathematics and technology, he underscored how machines operate on logical principles rooted in mathematics. Central to his speech was the significant role of fractional calculus in contemporary domains such as artificial intelligence and image processing, particularly in the analysis of infectious diseases. Agrawal's groundbreaking work on mosquito population modeling, which led to the discovery of the Fabrizio Atangana derivative, showcased the relevance of fractional calculus in addressing complex real-world problems. Illustrating the importance of the Jacobian matrix in fractional calculus, he provided insights into its applications and implications. Encouraging academic rigor, Agrawal urged students to prioritize books over online resources for research, highlighting the depth and reliability of scholarly literature. The ensuing question-answer session was lively and engaging, reflecting the audience's keen interest in Agrawal's discourse. Dr. Kunjan Shah concluded the session by felicitating Prof. Praveen Agrawal.

Following the lunch break, Prof. Shilpi Jain delivered an engaging speech on "Fractional Hypergeometric Functions: A Survey and Future Perspectives." She introduced classical beta and gamma functions, extended hypergeometric functions, and delved into the realm of fractional calculus and its special functions and applications. Prof. Jain also provided insights into the historical development of fractional calculus, discussing contributions from mathematicians such as Liouville and Miller, and highlighted its applications in physics, including Hilfer and Caponetto's work.

Following Prof. Shilpi Jain's insightful speech, the contributory talks commenced with Dr. Prashant Patel initiating the discussion. Dr. Patel delved into the applications of q-Calculus in approximation theory, exploring topics such as Bernstein polynomials, the proof of Weierstrass approximation theorem, and Korovkin theorem. He elucidated on q-integer, q-factorial, q-binomial coefficient, and q-Pascal rules, concluding with an examination of research gaps in q-calculus. The ensuing question-answer session proved to be engaging and enriching, reflecting the audience's keen interest in the subject matter. Dr. Daksha Diwan continued the contributory talks with a fascinating discussion on the Fibonacci sequence, delving into the classic Lucas sequence and the study of its subsequences. She explored topics such as generating functions and the extended Binet formula, concluding by listing open problems in the field. Dr. Diwan's spontaneous engagement in the question-answer session further enriched the discussion, fostering a dynamic exchange of ideas and insights among the audience.

Twinkle R Singh's contributory talk centered on the study of nonlinear differential equations arising in fluid flow through porous media. She provided an insightful introduction to porous media, tracing its historical development and exploring various types. Singh highlighted phenomena like fingero-imbibition in cylindrical pieces and presented solutions to the model using the Homotopy Analysis method. Her active participation in the ensuing question-answer session further enhanced the depth of understanding among the audience.

The final contributory speech of the day was delivered by Dr. Hiren Patel on the topic of the power serieswise Armendariz graph of a commutative ring. Dr. Patel provided a comprehensive overview of basic concepts in ring theory and graph theory, elucidating the fundamental properties of the PA(R) structure. Various corollaries, propositions, and illustrative examples were discussed, culminating in an exploration of future research directions in graph theory, particularly concerning PA(R). The session concluded with an engaging interaction between the speaker and the audience, fostering a dynamic exchange of ideas and insights.

After the tea break, the oral presentation competition commenced with full enthusiasm. Track 1, held in the Prof. P. C. Vaidya Auditorium and chaired by Prof. Praveen Agrawal, featured 8 participants discussing diverse topics such as maximal non-maximal prime submodule, Bose-Einstein

Condensation, and mathematical modeling of Zika virus, among others. Each presentation was followed by a question-answer session, fostering interactive dialogue. Track 2, conducted in the communication lab and chaired by Prof. D. V. Shah, showcased research papers covering a wide array of fields, including cordiality in quadrilateral snake graphs and strategic inventory control. The session concluded with a thoughtful speech by the chair, reflecting on the depth and breadth of research presented.

Day 2

The following day commenced with a stimulating speech by Prof. V H Pradhan on the Finite Element Method, beginning at 9 am. Prof. Pradhan delved into topics such as approximate analytical methods, numerical simulations, and the workings of the finite element method, emphasizing key concepts such as the advection-diffusion equation and weighted residuals. He elucidated on the Galerkin finite element method and encouraged young researchers to critically explore and investigate topics before incorporating them into their research papers, advocating for a thorough understanding of the subject matter.

The subsequent inviting speech was delivered by Prof. D V Shah on the fascinating topic of "Research through the Lens of Number Theory." Prof. Shah provided an insightful exploration into the history of numbers and number theory, highlighting the contributions of prominent number theorists from Gujarat. He delved into the intricacies of the Fibonacci sequence and its diverse generalizations, elucidating various properties of its terms. Additionally, Prof. Shah discussed topics such as continued fractions, Fibonorial numbers, Fibonomial coefficients, double factorial, and Pell's equation, captivating the audience with the rich tapestry of number theory research.

The successive inviting speech was delivered by K. Somasundaram sir on "Results on Total Coloring of Some Classes of Circulant Graphs." His discourse revolved around the application of graph analytics for large-scale networks, providing insights into structured and unstructured data. He elaborated on crucial concepts such as centrality measures including degree, closeness, betweenness, and eigen vector centrality, alongside discussions on power law networks, maximal cliques, and clustering centrality. Through various case studies, Somasundaram sir illustrated the practical implications of centrality and graph theory, enriching the audience's understanding of network analysis.

Following a short break, the contributory talks resumed with Dr. Kumkum Jain providing insights into fractional calculus. Subsequently, Dr. Nidhi Jain delivered a talk on fractional calculus in image processing, where she discussed image enhancement techniques and the application of Grunwald-Letnikov fractional derivative. She presented her modified version of the derivative with an example, emphasizing its significance in medical diagnosis. Dr. Nidhi Jain actively engaged with the audience, addressing all questions with detailed explanations, enhancing the interactive learning experience.

The last contributory talk of the event was delivered by Dr. Darshana B. Likhada on "Topologies Generating Complex Algebras." She provided a comprehensive overview of topology basics, detailing concepts such as topological space, sigma algebra, Borel sigma algebra, and the measure of sets, particularly focusing on the Lebesgue measure. Dr. Likhada delved into the specifics of T topology and standard topology, elucidating related lemmas, theorems, and remarks. Her talk concluded with references, offering attendees a thorough understanding of the topic and avenues for further exploration.

After lunch, the oral presentation competitions commenced in two tracks. The first track, held in the Prof. P. C. Vaidya Auditorium and chaired by Prof. K. Somasundaram, featured discussions on research papers covering diverse fields of mathematics, including numerical analysis, graph theory, queuing theory, and inventory models. Simultaneously, the second track, conducted in Sandipani and chaired by Dr. Prashantkumar Patel, showcased presentations on topics such as HIV infection modeling, fuzzy inventory models, and antimagic labeling in graph theory. Additionally, a poster presentation competition took place outside the auditorium which was judged by Kumkum Jain mam, posters covered various topics including control systems in MATLAB, data security through abstract algebra, and linear algebra used in image processing, among others.

The final speech of the event was delivered by Prof. Nita Shah on the intriguing topic of "Dynamics of Happiness" in Online Mode. Prof. Shah delved into various theories of happiness, presenting a continuous dynamical mathematical model. She discussed the assumptions of the model and the influence of emotions on well-being levels, exploring the dynamics of happiness both with and without emotional inputs. Prof. Shah also highlighted the role of the well-being homeostatic system in shaping the dynamics of happiness, offering profound insights into the complexities of human emotions and well-being in the digital age.

The two-day event of the 5th Prof. P. C. Vaidya National Conference on Mathematical Sciences culminated with a vibrant valedictory function, leaving the auditorium brimming with excitement and happiness. Prof. Divya Sharma, Director of IITE, warmly welcomed the distinguished guests of the dias. Prof. Somasundaram inspired the audience and urged young researchers to delve into qualitative research endeavours. Prof. Kumaresan shared his insightful experiences from the event, enriching the gathering with his feedback. The winners of various competitions were announced, and the advisory committee and support team members were felicitated for their contributions. Dr. Paras Uchat, the event's convener, delivered a heartfelt vote of thanks, bringing the event to a close amidst resounding applause from the overwhelmed audience.

ગણિત સમાચાર

(1) દિનેશ સેવક ગણિત શિબિરનો અહેવાલ

અમદાવાદ ગણિત મંડળ અને સેંટ ઝેવિયર્સ કોલેજના સંયુક્ત ઉપક્રમે ધોરણ-9 થી 12ના વિદ્યાર્થીઓ માટે તા.28 થી 30 ડિસેમ્બર-2023 દરમિયાન દિનેશ સેવક શિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું.

પ્રથમ દિવસે ગણિત વિષય-તજ્જ્ઞો પ્રા. એન. એન. રોઘેલિયા, પ્રા. ઉદયન પ્રજાપતિ, શ્રી માંગલિક બરછા તથા શ્રી મોહમ્મદ હુસેન ગેણાએ Maths Games, Problem Solving, Maths Puzzles તથા Recreational Mathematics પરના સેશન લીધાં હતાં. બીજા દિવસે M.Sc. વિદ્યાર્થિની જાનવી અને કુશવાહા આનંદ તથા શ્રી દર્શનભાઈ મહેતા, પ્રા. ઉદયન પ્રજાપતિ અને પ્રા. એન.એન. રોઘેલિયા દ્વારા સેશન લેવામાં આવ્યાં. ત્રીજા દિવસે ગણિત વિષય તજ્જ્ઞ શ્રી વિજય વોરા, શ્રી દર્શનભાઈ મહેતા, શ્રીમતી સ્મૃતિબેન વસાવડા, શ્રી મોહમ્મદ હુસેન ગેણા તથા રાજવી અને અકસાએ વિવિધ ગણિત મોડેલ્સ, પઝલ્સ, પેન્ટોમીનો, 3D-Shape Making વગેરે સેશન લીધાં હતાં.

ત્રણ દિવસીય શિબિરમાં અમદાવાદ ઉપરાંત હિંમતનગર, ઇડર, નંદાસણ, કડી, વલ્લભ વિદ્યાનગરના વિદ્યાર્થીઓ જોડાયા હતા. 3 શિક્ષકો સહિત કુલ 25 Participantsનો સમાવેશ થાય છે.

આ કાર્યક્રમ અમદાવાદ ગણિત મંડળ, પ્રા.એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન, RMO-Gujarat Region, પ્રા. એ.એમ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન તથા ગુજરાત ગણિત મંડળના સૌજન્યથી યોજવામાં આવ્યો હતો. કાર્યક્રમનું સફળ આયોજન ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખશ્રી પ્રા. ઉદયન પ્રજાપતિ, અમદાવાદ ગણિત મંડળના પ્રમુખશ્રી મોહમ્મદહુસેન ગેણા તથા ઉપપ્રમુખશ્રી દર્શનભાઈ મહેતા દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું.

(2) રાજકોટ મુકામે ગણિત શિક્ષકોનો એક દિવસીય શિબિર

તા.5/3/2024ના દિવસે એ.આર.રાવ ફાઉન્ડેશન અને ગુજરાત ગણિત મંડળના ઉપક્રમે આયોજિત ધોરણ નવ અને દસના ગણિત શિક્ષકો માટેના એક દિવસીય વર્કશોપનું શ્રી ઓ.વી.શેઠ-પ્રાદેશિક લોક વિજ્ઞાન કેન્દ્ર ખાતે આયોજન થયું હતું. જેમાં 30 થી વધુ શિક્ષકોએ ભાગ લીધો હતો. લોક વિજ્ઞાન કેન્દ્રના નિયામકશ્રી ભાયાણી સાહેબનો સહકાર તેમજ શ્રી મિનેષભાઈ મેઘાણીનો સહયોગ પ્રાપ્ત થયો હતો. સ્વાગત બાદ આયોજક અને વક્તાઓનો પરિચય શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક દ્વારા અપાયો હતો. શરૂઆતમાં શ્રી મેઘરાજભાઈ ભટ્ટ સાહેબે "હું કેવી રીતે શીખવું?" એ શીર્ષક હેઠળ સમરૂપતા અને એકરૂપતા વિશે સમજ આપી હતી અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ વિશે રસપ્રદ છણાવટ કરી હતી. ત્યારબાદ શ્રી મહાવીર વસાવડા સાહેબે "ગણિતને રસપ્રદ કેવી રીતે બનાવી શકાય?" એ શીર્ષક હેઠળ પીપીટી દ્વારા ગણિત ઇતિહાસ, ગણિતજ્ઞોની વાત, ગણિત રમતો, જાદુઈ ચોરસ, નંબર ગેમ વિષે રોચક વાતો કરી હતી. યુકિલડ અને રામાનુજન વિષે ઓછી પ્રચલિત વાતો કરી હતી. **'શિક્ષકોના પ્રશ્નો'**ના વસાવડા સાહેબે ઉકેલ આપ્યા હતા. આ તમામ ચર્ચામાં અમદાવાદથી પધારેલ પ્રા. એન.એન. રોઘેલીયા સાહેબ, શ્રી દર્શનભાઈ મહેતા સાહેબ તેમજ રાજકોટના સિનિયર નિવૃત્ત શિક્ષક ડૉ. ગોપાલભાઈ મહેતા અને અમરેલીના નિવૃત્ત શિક્ષક શ્રી માલણિયા સાહેબે સકારાત્મક અને રસપ્રદ ચર્ચામાં ભાગ લીધો હતો. આ દરમિયાન શ્રી ભાયાણી સાહેબે લોકવિજ્ઞાન કેન્દ્રની ભૂમિકા અંગે વાત કરી હતી અને સૌને આ સંસ્થાનો લાભ લેવા અનુરોધ કર્યો હતો. લંચ બ્રેક બાદ વસાવડા સાહેબે વાતો આગળ વધારતાં રોજબરોજના જીવનમાં ભૌમિતિક આકારો


ક્યાં જોવા મળે છે તેની સમજણ અનેક ઉદાહરણો દ્વારા આપી હતી. ત્યારબાદ શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક દ્વારા ભૌમિતિક વ્યાવહારિક કોયડાઓની રજૂઆત કરવામાં આવી હતી. તેમના વક્તવ્યમાં તેમણે AI, NEP અને NCF ની ચર્ચા પણ કરી હતી. દરેક વક્તવ્ય બાદ શિક્ષકો વચ્ચે તંદુરસ્ત ચર્ચા થતી હતી. છેલ્લા એક કલાકમાં ડૉ. હરેશભાઈ ભુટકે ધોરણ નવ અને દસના ગણિત માટે ઉપયોગી અનેક મોડેલનું નિદર્શન આપ્યું હતું. તેમણે ગણિત દ્વારા જીવનમૂલ્યોની વાત કરી હતી. ગણિત શિક્ષણમાં સેન્સ ઓફ હ્યુમરની રસદાયક રજૂઆત કરી હતી. બાદમાં રોઘેલિયા સાહેબે ત્રિકોણનું ધાતુનું મોડેલ રજૂ કરી મધ્યકેન્દ્ર અને લંબકેન્દ્ર જેવી અનેક રજૂઆત કરી હતી. જેમાં શ્રી ગોપાલભાઈ મહેતાએ સહયોગ કરીને માહિતી આપી હતી. ત્યારબાદ શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક દ્વારા ગણિત માટે લેવાતી વિવિધ પરીક્ષાઓની માહિતી આપી હતી અને તેના ભવિષ્યના ઉપયોગ વિશે વાત કરી હતી. અંતમાં શ્રી મેઘરાજભાઈ ભટ્ટ દ્વારા ગણિતના ઉપયોગ બાબતે એક ઉદાહરણ આપ્યું હતું અને કાર્યક્રમના અંતે શિક્ષકોના પ્રતિભાવ લેવામાં આવ્યા હતા જે આયોજકો માટે ખૂબ જ પ્રેરક અને બળ પ્રદાન કરે તેવા હતા. આભાર વિધિ શ્રી મિનેષભાઈ મેઘાણી દ્વારા થઈ હતી. શાંતિ મંત્ર દ્વારા વર્કશોપનું સમાપન થયું હતું.

અહેવાલ પ્રસ્તુત કરનાર : ડૉ. હરેશભાઈ ભુટક, શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક



તંત્રી મંડળ :

લેખક સન્માન

સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થતા ગાણિતિક લેખોના લેખકો માટે સુગણિતમ્‌ના પ્રકાશક - પ્રા. અરૂણ મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ - નીચેના પુરસ્કારો જાહેર કરતાં આનંદ અનુભવે છે.

(1) કોઈપણ કક્ષાએ અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા, સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત થયેલા, ગાણિતિક લેખ દીઠ રૂા.300/- લેખકને પુરસ્કારરૂપે આપવામાં આવશે.

(2) એક વર્ષ દરમિયાન પ્રગટ થયેલા, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા ગાણિતિક લેખો પૈકી સર્વશ્રેષ્ઠ લેખના લેખકને પુરસ્કાર રૂપે રૂા.500/- આપવામાં આવશે. (વર્ષ : 1-જાન્યુઆરીથી 31 ડિસેમ્બર ગણાશે.)

(3) જેમનાં લખાણો અગાઉના સુગણિતમ્‌માં ક્યારેય પ્રકાશિત ન થયાં હોય તેવા (નવોદિત) લેખકને તેમના પ્રથમ લેખ માટે રૂા.500/- પુરસ્કાર રૂપે આપવામાં આવશે.

(4) સુગણિતમ્ માટે લેખ લખતા લેખકો પોતાનો કિંમતી સમય લેખ તૈયાર કરવા માટે આપે છે. તેમનું લેખન કાર્ય અમૂલ્ય છે. આવા લેખનને કોઈ પુરસ્કાર આપી મૂલવવું યોગ્ય નથી. પણ ક્યારેક તો લેખકો લેખને ટાઈપ કરાવીને મોકલે છે. ટાઈપ કર્યા પછી કુરીયરથી મોકલે છે. ટાઈપ કરાવવાનો ખર્ચ, કુરીયર દ્વારા મોકલવાનો ખર્ચ તેઓ જાતે ભોગવે છે. લેખકે કરેલા પ્રયત્નને બિરદાવવા માટે અને તેમણે કરેલા ખર્ચને આંશિક રીતે ભરપાઈ કરવા માટે અમે નીચેની જાહેરાત કરીએ છીએ.

“દરેક ગાણિતિક લેખના, સુગણિતમ્‌માં છપાયેલાં પાનાં દીઠ લેખકને રૂા.100/- આપવા.
લખાણ એક પાનાથી ઓછું હોય તો લેખકને તે પાના માટે રૂા.50/- આપવા.”