RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

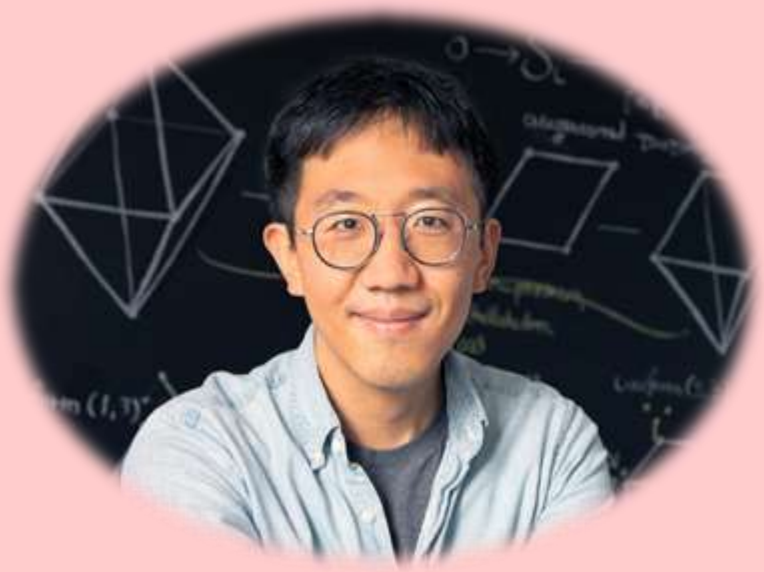
# સુગણિતમ્

## ત્રિમાસિક

વર્ષ : 62 ઈ-આવૃત્તિ-7 સળંગ અંક : 312 જાન્યુઆરી 2024

For Private Circulation Only

### મુખપૃષ્ઠ પરનો ગણિતજ્ઞ



**જૂન હહ (June Huh)**

જન્મ વર્ષ : 1983

email : suganitam2018@gmail.com

આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

સંવર્ધક તંત્રી
ડો. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

# અનુક્રમણિકા

સળંગ અંક : 312 ઈ-આવૃત્તિ-7 જાન્યુઆરી- 2024


| | લેખનું શીર્ષક | લેખક | પાના નં. |
|---|---|---|---|
| 1 | સંપાદકીય | -- | 2 |
| 2 | સો અંક પહેલાં | -- | 3 |
| 3 | દૂધ લેજો ભાઈ, દૂધ | પ્રા. એમ. એચ. વસાવડા | 6 |
| 4 | જાણીતાનું અજાણ્યું – 6 : પદિક ત્રિકોણ | પ્રા. હેમા વસાવડા | 9 |
| 5 | ત્રિકોણમિતિના પાયામાં આર્યભટનું મૂળભૂત યોગદાન | પ્રા. રેખાબહેન મહેતા | 13 |
| 6 | પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આચમન-7 | શ્રી મેઘરાજ જ. ભટ્ટ | 16 |
| 7 | ક્ષેત્ર દર્શન (ભજન) | ડૉ. સંજયકુમાર એસ. પટેલ | 18 |
| 8 | ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા - જૂન હહ (June Huh) | ડૉ. માનસી શાહ | 19 |
| 9 | ગણિત બચાવો, ગણિત સમજાવો | ડૉ. પારસ દિ. ઉચાટ | 22 |
| 10 | સ્વરિત જોષી : તેજસ્વી તારલો | શ્રી કલ્પેશ અખાણી | 23 |
| 11 | રાજેશકુમાર મેરના કોયડાનો ઉકેલ | પ્રા. પી. કે. વ્યાસ | 24 |
| 12 | ભૂમિતિનો એક રસપ્રદ કોયડો | શ્રી દયારામભાઈ ઠક્કર | 27 |
| 13 | અંકો અને અક્ષરોની જુગલબંધી | પ્રા. પી. કે. વ્યાસ<br>શ્રી નિલેશ માંડલીયા | 29 |
| 14 | ગણિતકણિકાનું વ્યાપક સ્વરૂપ | શ્રી રાજેશકુમાર મોહનલાલ મેર | 31 |
| 15 | સુગણિતમમાંથી વીણેલાં મોતી : પુનશ્ચ "1089" | પ્રા. પી. કે. વ્યાસ | 33 |
| 16 | રૂડું પ્રકરણ તે મારું ચલનું રે... (ઊંચી મેડી તે મારા કંથની રે...) | ડૉ. સંજયકુમાર એસ. પટેલ | 37 |
| 17 | પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો (E-Copy-7) | ડૉ. સચિન ગજ્જર | 38 |
| 18 | ગુજરાત ગણિત મંડળ:60મા અધિવેશનના કાર્યક્રમોનો અહેવાલ | સંકલિત | 40 |
| 19 | શ્રી એ. કે. વિરાણી ગણિત સ્પર્ધા-2023 | -- | 46 |
| 20 | Prof. A. M. Vaidya Prashna Sandhya – 2023 | Dr. U. M. Prajapati | 48 |
| 21 | ગણિત સમાચાર | સંકલિત | 50 |

# સંપાદકીય

વર્ષ 2024નો સુગણિતમ્‌નો પ્રથમ અંક (સળંગ અંક 312 અને E-અંક 7) આપ સર્વે સમક્ષ પ્રસ્તુત કરતાં આનંદ અનુભવીએ છીએ.

અમદાવાદ મુકામે આયોજિત ગુજરાત ગણિત મંડળના 60મા અધિવેશન દરમ્યાન સુગણિતમ્‌ના E-અંક 1 થી 6ને એકત્ર કરીને સગુણિતમ્‌નો સંકલિત અંક અધિવેશન દરમિયાન હાજર રહેલ સર્વે ડેલિગેટ્સ મિત્રોને વિના મૂલ્યે યાદગીરી સ્વરૂપે આપવામાં આવ્યો હતો. આશા છે કે સુગણિતમ્‌ના ચાહકોને આ પહેલ પસંદ પડી હશે તથા આ સંકલિત અંક એક સુખદ સંભારણુ બની રહેશે.

સળંગ અંક 310 (E-અંક 5) ના સંપાદકીયમાં ગણિત સમાચાર માટે કરેલ અપીલનો સુંદર પ્રતિભાવ મળ્યો છે, જે આનંદની વાત છે. 22 ડિસેમ્બર, 2023, રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસ નિમિત્તે ગુજરાતની શાળાઓ તથા કૉલેજોમા આયોજિત કાર્યક્રમોના ટૂંકા અહેવાલો આ અંકમાં રજૂ કર્યા છે. આપ પણ આપની સંસ્થામાં યોજાતી ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓનાં સંક્ષિપ્ત અહેવાલ સુગણિતમ્‌માં શક્ય પ્રકાશન માટે મોકલી શકો છો.

સુગણિતમ્ માટે આપના લેખ / ગણિત સમાચાર મોકલવા માટેનું સરનામું નીચે મુજબ છે :

**સરનામું :** ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ

ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત-395007

**મોબાઈલ:** 9898057891 **ઈ-મેઈલ :** suganitam2018@gmail.com

સુગણિતમને વધુ સમૃદ્ધ બનાવવા માટે આપનાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

સુગણિતમ્‌ના E-અંકો ઈ-મેઈલથી નિઃશુલ્ક મેળવવા માટે આપનું અથવા સંસ્થાનું નામ, સરનામું, ઈ-મેઈલ તથા વોટ્સએપ નંબર અમને જણાવશો.

**- સંપાદકો**

## કૃપા કરી આટલું કરશો.

સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત કરવા માટે ઘણાં બધાં — સારા, પ્રકાશિત કરવા જ જોઈએ એવાં - લખાણો મળી રહ્યાં છે. કેટલાંક લખાણો ટાઈપ કરેલાં હોય છે તો કેટલાંક હસ્તલિખિત પણ હોય છે. હસ્તલિખિત લખાણોના ફોટા પાડીને અને ટાઈપ કરેલાં લખાણોની Doc-File અને PDF મળે છે. અમે નમ્રતાપૂર્વક નીચે પ્રમાણે ત્રણ સૂચનો કરીએ છીએ.

1. ટાઈપ કરેલાં લખાણો 14 પોઈન્ટના અક્ષરોમાં ટાઈપ કરવાં. ટાઈપ કરતી વખતે બે લીટી વચ્ચેનું અંતર (Line Spacing) થોડું વધારે રાખવું. પછી તેની Doc-File અને PDF બન્ને મોકલવી.
2. હસ્તલિખિત લેખ તદ્દન કોરા કાગળો પર પાનાની એક જ બાજુએ લખવો. લીટીવાળા-આંકેલા કાગળોનો ઉપયોગ ન કરવો. લખાણ 0.7 પોઈન્ટની અણી (Nib) વાળી વાદળી અથવા કાળા કલરની Gel Pen વડે લખવું. Ball Pen નો ઉપયોગ ન કરવો.
3. હસ્તલિખિત લખાણના ફોટા પાડતા પહેલાં અને ટાઈપ કરેલ લખાણની PDF બનાવતા પહેલાં, લેખ બરાબર વાંચી જવો.

જો આપ આ સૂચનોનો અમલ કરશો તો ટાઈપ કરનારને અને પ્રુફ વાંચનારને ઘણી સુગમતા થશે.

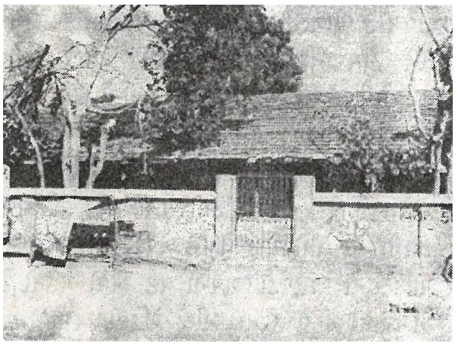
**આભાર...**

## સો અંક પહેલાં

**[સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 212 નવેમ્બર-ડિસેમ્બર 2004નો હતો. આ અંકમાં સ્વ. પ્રાધ્યાપક અરુણ મ. વૈદ્ય સાહેબનો લેખ એકડિયાથી એમ.એસસી.-2 પ્રગટ થયો હતો. આ લેખ અત્રે પુનર્મુદ્રિત કરેલ છે - પ્રધાન સંપાદક]**

અમો 1942ના જૂનમાં કલોલ આવ્યાં. ત્યાં મારા પિતાશ્રી વખારિયા પી. જે.હાઈસ્કૂલમાં આચાર્ય તરીકે જોડાયા. તે સ્કૂલના ઉપાચાર્ય શ્રી પદ્મમણીશંકર ત્રિપાઠી હતા. તે આપણા જાણીતા હાસ્યસાહિત્યકાર બકુલ ત્રિપાઠીના પિતા થાય. બકુલભાઈ એ વખતે પંદરેક વર્ષના હતા. અને વખારિયા હાઈસ્કૂલના વિદ્યાર્થી હતા.

વખારિયા હાઈસ્કૂલ ખરેખર હાઈસ્કૂલ હતી એટલે કે તેમાં પ્રાથમિક વિભાગ નહોતો. મારે તો બીજા ધોરણનો અભ્યાસ કરવાનો હતો એટલે મને તાલુકાની કુમારશાળામાં દાખલ કરવામાં આવ્યો. એ વખતે કલોલમાં બે કુમારશાળાઓ હતી. એક ટાવરની પાસે બે-ત્રણ માળવાળી મોટી કુમારશાળા હતી અને બીજી ટાવરથી થોડે દૂર અમદાવાદ તરફ જતા રસ્તા પર એક માળ વાળી (ત્યારથી માંડીને આજે બાસઠ વર્ષે પણ એટલી જ બિસ્માર હાલતમાં દેખાતા મકાનવાળી), પથ્થરની દિવાલો અને ઉપર નળીયાં વાળી હતી. હું એ બીજી કુમારશાળામાં હતો.



અમારી શાળામાં સાત-આઠ ઓરડા લાઈનસર રસ્તા તરફનાં બારણાંવાળા હતા. (આજે પણ એમ જ છે) તેમાથી જમણી બાજુથી પહેલો ઓરડો અમારો વર્ગ હતો.

મુંબઈમાં તો દિવસ દરમિયાન બે-ત્રણ શિક્ષકો અમને જુદા જુદા વિષયો શીખવતા, પણ અહીં કલોલમાં તો આખો દિવસ એક જ શિક્ષક અમને વારાફરતી ગણિત, ભૂગોળ, ઈતિહાસ અને ગુજરાતી શીખવતા. શરૂઆતમાં તો આ શાળામાં 'આ શિક્ષક બધા વિદ્યાર્થીઓને ખૂબ મારતા હશે' એ વાતથી હું દહેશતભરી સ્થિતિમાં રહેતો. પરંતુ સદ્‌ભાગ્યે અમારા શિક્ષક દયાળુ અને પ્રૌઢ ઉંમરના હતા. અને બધા વિદ્યાર્થીઓ પ્રત્યે ઉદારદિલ હતા મારા પ્રત્યે તેમને વિશેષ અનુરાગ હતો કારણ કે હું હાઈસ્કૂલના પ્રિન્સિપાલનો પુત્ર હતો.

આ શાળામાં મને સૌથી પહેલો માનસિક આઘાત કોઈ શારીરિક શિક્ષાથી નહિ પણ વિદ્યાર્થીઓ માટે પાણી પીવાની વ્યવસ્થાથી લાગ્યો હતો. વર્ગની બહાર એક મોટા માટલામાં પીવાનું પાણી હતું. પાણી પીવાના પ્યાલા બાજુના ઘોડા પર મૂકવામાં આવ્યા હતા. મને એ જાણીને ખૂબ આશ્ચર્ય થયું કે બ્રાહ્મણોએ કેવળ એ ઘોડાના સૌથી ઉપરના ખાના પરના પ્યાલા લેવાના હતા, પટેલોએ બીજા ખાના પરથી, વાણીયાઓએ ત્રીજા ખાના પરથી, અન્ય હિંદુઓએ ચોથા ખાના પરથી અને મુસ્લિમોએ પાંચમાં ખાના પરથી પ્યાલા લેવાના રહેતા. મુંબઈમાં તો અમને અમારી જ્ઞાતિ વિશે કદી સભાન કરવામાં આવ્યા ન હતા અને અહીં તો જાણે કાયમ માટે જ્ઞાતિનું લેબલ તમારા કપાળ પર ચોટેલું રહેતું હતું.

કલોલમાં અમારા શિક્ષક આંકના ઘડિયા યાદ કરાવવા પર ખૂબ ભાર આપતા. જાણે ઘડિયા ગીત હોય. કે મંત્રો હોય એ રીતે આખો વર્ગ સાથે મળીને ઘડિયા બોલતો. ગીતના તાલમાં બંધ બેસે એ માટે કેટલીક સંખ્યાઓને અમે તોડી-મરોડીને પણ બોલતા. આમ 'સત્તર છક એકસો બે' નહિ પણ 'સત્તર છક બીલંતરસો' એમ બોલતા. એ જ પ્રમાણે 108ને 'અઠલંતરસો' 117 માટે 'સતરોતેરસો' એમ બધું બોલાતું. પાછળથી કોઈ કારણે શિક્ષણકારોએ આ રિવાજ બંધ કર્યો પણ મને લાગે છે કે આ રિવાજ અને ઘડિયાની ગેયતા ખૂબ જ લાભકારી હતાં. અમારી પેઢીના વિદ્યાર્થીઓ ઘડિયા મોટી ઉંમરે પણ ભૂલતા નહિ, જ્યારે હવે ઘડિયા યાદ રહે તેવી કોઈ પદ્ધતિ જ નથી રહી તેથી વિદ્યાર્થીઓને દાખલા ગણવામાં ઘણી મુશ્કેલીઓ પડે છે.

વાત નીકળી જ છે તો એક બીજો મુદ્દો પણ કહી દઉં. એવું મનાય છે અને કહેવાય છે કે માધ્યમિક કક્ષાએ અભ્યાસક્રમ કે શિક્ષણ પદ્ધતિમાં પરિવર્તન કરવું પ્રાથમિક કક્ષા કરતાં સરળ છે, કારણ કે માધ્યમિક શિક્ષકોની સંખ્યા ઓછી છે અને પ્રાથમિક શિક્ષકોની સંખ્યા વિશાળ છે. પણ મેં તો એવું જોયું કે નવું ગણિત આવ્યું તે પહેલાં માધ્યમિક શાળાના ગણિત શિક્ષણમાં કદાચ સો વર્ષમાં કોઈ ફેરફાર નહોતો થયો. જ્યારે પ્રાથમિક કક્ષાના ગણિત શિક્ષણમાં 1940 થી 1970 સુધીમાં બે કે ત્રણ મોટા ફેરફાર મેં જોયા છે. એક તો ઉપર જણાવ્યો તે ઘડિયાની ગેયતા નાબૂદ થવાનો પ્રયોગ જે મારી દૃષ્ટિએ અયોગ્ય હતો અને બીજો ગુણાકારની પદ્ધતિનો. અમારા જમાનામાં અમારે 45 ને 67 વડે ગુણવા હોય તો પહેલા 45 ને 7 વડે ગુણતાં, ગુણાકારના એકમના આંકડાની નીચે ચોકડી (×) મૂકતાં અને તેની બાજુમાં 45 ને 6 વડે ગુણી તેનો ગુણાકાર મૂકતાં. એટલે ગુણાકાર આમ થતો.

```
   45
×  67
  315
 270×
 3015
```

પણ 1970માં આ પદ્ધતિ બદલાઈ ગઈ હતી. હવે 45 ને પહેલા 6 વડે ગુણી ગુણાકારની જમણી બાજુ 0 મૂકાય છે. તેની નીચે 45 અને 7 નો ગુણાકાર મુકાય છે. આમ હવેની પદ્ધતિએ

```
   45
×  67
 2700
  315
 3015
```

આ ફેરફાર ખૂબ સમજપૂર્વકનો છે અને 67 એટલે 60 + 7 છે. તેનો સ્પષ્ટ ઉપયોગ છે.

આ ઉપરાંત અમે એકાથી દાન સુધીના આંકમાં એક દુ બે, બે દુ ચાર, ત્રણ દુ છ એમ કરતાં પણ અગિયારાથી અગિયાર એકું અગિયાર, અગિયાર દુ બાવીસ, અગિયાર તેરી તેત્રીસ કરતાં હવે અગિયારની જેમ જ બેના ગુણકો પણ બે એકું બે, બે દુ ચાર, બે તેરી છ એમ બોલાય છે. કહેવાનો મતલબ એ છે કે પ્રાથમિક કક્ષાએ પરિવર્તનો કઠિન જ છે તેમ માની લેવાની મને જરૂર લાગતી નથી.

અમારા શિક્ષક વૃદ્ધ હતા અને એમણે અટક્યા વગર આખો દિવસ અમારો જ વર્ગ લીધા કરવો પડતો એટલે કોકવાર થાકી જતા. આવે વખતે તેઓ અમારા બાંકડા પર લંબાવી દેતા અને અમારા કોકના દફતરનું ઓશિકું બનાવતા. બાંકડાઓ ખસેડી વર્ગની મધ્યમાં જગા કરી અમો બધા નીચે પલાઠી મારીને બેસી જઈએ અને તે અમને રામાયણની વાત કહેતા. તેમની વાત કહેવાની શૈલી એવી આકર્ષક હતી કે અમે રામ-રાવણ અને હનુમાનની વાતોમાં ખોવાઈ જતા.

અમે કલોલ હતા એ દરમિયાન ભારતમાં અને વિશ્વમાં ઈતિહાસ રચાઈ રહ્યો હતો. મહાત્મા ગાંધીએ ઓગસ્ટ 1942માં ‘ભારત છોડો આંદોલન’ છેડ્યું હતું. આમ તો કલોલ બ્રિટિશ ભારતમાં નહોતું - તે ગાયકવાડ રાજ્યનો ભાગ હતું. છતાં કલોલમાં પણ આંદોલન અને તેને ડામવાની પોલીસ પ્રવૃત્તિ હતી. ઓગસ્ટની નવમીની સવારે એવી અફવા આવી હતી કે ગાંધીજી અને બીજા ઘણા નેતાઓની ધરપકડ થઈ હતી. આ સમાચારે ગામમાં સનસનાટી ફેલાવી દીધી હતી. કલોલમાં બે જ ઘેર રેડિયો હતા. એક રેડિયો તો ડૉ. રાવને ત્યાં હતો પણ તેમને ઘેર રેડિયો એક તો ત્રીજે માળ હતો અને ડૉ. રાવનો વટ એવો પડતો કે લોકો એમનાથી થોડા ડરતા. બીજો રેડિયો અમારે ત્યાં હતો. એટલે સવારે પોણા નવ વાગે રેડિયો પર ગુજરાતી સમાચાર શરૂ થયા ત્યારે અમારો રેડિયોવાળો મુખ્ય ઓરડો લોકોથી ખચાખચ ભરેલો હતો. રેડિયોએ સૌ નેતાઓની ધરપકડના ખબર આપ્યા. લોકો થોડી વાર તો ચૂપ રહ્યા. પછી અંગ્રેજોની ટીકા શરૂ થઈ ગઈ. બપોરે અમારા ઘરની સામે પણ વિરોધ સરઘસ નીકળ્યું અને ઘોડેસ્વાર પોલીસોએ લાઠીચાર્જ કર્યો એ અમે જોયું.

કોંગ્રેસના નેતાઓ જેલમાં હતા તેથી મુસ્લિમ લીગના નેતાઓએ પાકિસ્તાનની માંગણી જોરશોરથી કરવા માંડી. હિંદુઓના ક્રોધને સંયમમાં રાખે તેવા નેતાઓ જેલમાં હતા. એટલે દેશભરમાં રમખાણો ફાટી નીકળ્યાં. અમદાવાદમાં પણ હિંદુ-મુસ્લિમ રમખાણો થયા. કલોલના લોકો પોતાના લાક્ષણિક ઉચ્ચારોમાં કહેતા કે “અમદાવાદમાં ધાંધલ સ”

કલોલમાં છ-આઠ મહિના ગાળ્યા પછી હું તો કલોલના વાતાવરણથી ટેવાવા લાગ્યો હતો, પણ મારી માને કલોલ જરા પણ ફાવતું ન હતું. તેમને મુખ્ય ડર તો મારા અને મારા એક-વર્ષીય નાના ભાઈ મહેશના ઘડતર પર કલોલનું અંધશ્રદ્ધાપૂર્ણ પર્યાવરણ, ત્યાંની અપશબ્દોથી પ્રચુર ભાષા અને વિચિત્ર ઉચ્ચારોના દુષ્પ્રભાવ અને એમને મળનારા શિક્ષણ અને સંસ્કારોનો હતો.

મારી માને સદ્‌ભાગ્યે વિશ્વયુદ્ધમાં પણ પલટો આવ્યો હતો. પ્રશાંત મહાસાગરના ક્ષેત્રમાં અમેરિકાએ જાપાન પર ભારે પ્રહારો કર્યા હતા. તેથી જાપાને ભારત પર આક્રમણ કરવાનો વિચાર છોડી પૂર્વ એશિયા તરફ ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું હતું. આથી મુંબઈ પર આક્રમણનો ખતરો દૂર થયો હતો. તેથી 1943ના ઉનાળામાં શાળાનું શૈક્ષણિક વર્ષ પૂરૂ થયું એટલે મુંબઈથી હિજરત કરી ગયેલા લોકોનો પ્રવાહ મુંબઈ ભણી શરૂ થયો હતો. અમે પણ 5મી જૂનના રોજ મુંબઈ પાછા ફર્યા. અમને ખારમાં જ ઘરે ભાડે મળ્યું હતું. મારા પિતાશ્રી ફરી અંધેરીની એમ.એ.હાઈસ્કૂલમાં શિક્ષક તરીકે જોડાઈ ગયા અને હું ફરી આદર્શ બાળ મંદિરમાં ધોરણ ત્રણમાં દાખલ થઈ ગયો.

એક વર્ષનો કલોલનો અમારો અનુભવ કાંઈ એક દુઃસ્વપ્ન જેવો નહોતો. મને લાગે છે કે જો પચ્ચીસ વર્ષની ઉંમર સુધી મને મુંબઈની બહાર રહેવાની તક મળી જ ન હોત તો ભારત વિશે મારા મનમાં સાવ વિચિત્ર ખ્યાલ જ બંધાયો હોત. કલોલ પછી હું સાચા ભારતને ઓળખતો થયો.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

## National Mathematics Day Celebration at Maharaja Agrasen Vidyalay, Ahmedabad


A beautiful pattern (Rangoli) created by students using geometric figures.

**Sent by : Ajay Trivedi, Maharaja Agrasen Vidyalay, Ahmedabad.**

# દૂધ લેજો ભાઈ, દૂધ

એમ. એચ. વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9824669364

કોયડો જાણીતો છે. રાવ સાહેબના કોયડા પુસ્તક 'બુદ્ધિ કસો'માં આ પહેલો જ કોયડો છે.

1. **કોયડો :** એક દૂધ વેચનાર પાસે 8 લિટર, 5 લિટર અને 3 લિટર માપનાં ત્રણ વાસણો છે. 8 લિટર માપનું વાસણ દૂધથી ભરેલું છે. 5 લિટર અને 3 લિટર માપનાં વાસણો ખાલી છે. ઘરાકને 4 લિટર દૂધ જોઈએ છે. કેવી રીતે આપવું?

અજમાયશ અને ભૂલ (Trial and Error)ની રીતથી આ કોયડો ઉકેલી શકાય. પણ આમ કરવાથી કેટલીક વાર એવું બને છે કે અમુક પગલાં પછી શરૂઆત કરી હોય એ જ સ્થિતિમાં આવી જઈએ. આવું ન થાય એ માટે કોઈ પધ્ધતિસરની રીતનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ. આપણે અહીં સંખ્યાઓ અંગેના એક સાદા પરિણામનો ઉપયોગ કરીને કોયડો ઉકેલીશું. આ રીતથી ઉપર આપેલો કોયડો જ નહિ, એ પ્રકારના અન્ય કોયડાઓ પણ ઉકેલી શકાય એ દર્શાવવા એક બીજું ઉદાહરણ પણ આપીશું.

2. **કોયડાનો ઉકેલ :** મૂળ કોયડા પર આવીએ. 4 લિટર દૂધ મેળવવા માટે 8 લિટર માપના વાસણમાં 8 લિટરમાંથી 4 લિટર દૂધ બાકી રહે એ પ્રકારની પ્રવૃત્તિ કરીશુ. આ માટે આપણે આ વાસણમાંથી 4 લિટર દૂધ લઈ લેવું જોઈએ. આપણી પાસે 3 અને 5 લિટરનાં વાસણો હોવાથી પહેલાં 4ને 3 અને 5ના પૂર્ણાંક સંયોજન તરીકે લખીએ.

$$4 = (2 \times 5) - (2 \times 3)$$

આથી, $4 = 8 - 4 = 8 - [(2 \times 5) - (2 \times 3)]$

$$= 8 - (2 \times 5) + (2 \times 3)$$

આનો અર્થ એ થયો કે 8 લિટરમાંથી 4 લિટર દૂધ મેળવવા માટે બે વાર 5 લિટર દૂધ લઈ લેવું જોઈએ અને બે વાર 3 લિટર દૂધ ઉમેરવું જોઈએ. આ કેવી રીતે થઈ શકે તે કોષ્ટક દ્વારા સમજીએ.

| 8 | 5 | 3 | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 0 | | |
| 3 | 5 | 0 | → | (8–5=3) |
| 3 | 2 | 3 | | |
| 6 | 2 | 0 | → | (3+3=6) |
| 6 | 0 | 2 | | |
| 1 | 5 | 2 | → | (6–5=1) |
| 1 | 4 | 3 | | |
| 4 | 4 | 0 | → | (1+3=4) |

પહેલે પગલે 8 લિટરના વાસણમાંથી 5 લિટર દૂધ લેતાં 3 લિટર દૂધ વધ્યું. આપણે 5 લિટર દૂધ બે વાર લેવાનું છે. પણ હવે તો 8 લિટરના વાસણમાં 3 લિટર દૂધ જ છે. કંઈ વાંધો નહિ. 3 લિટર દૂધ બે વાર ઉમેરવાનું પણ છે. અત્યારે તો 3 લિટર માપનું વાસણ ખાલી છે. એટલે પહેલાં આ વાસણ ભરીએ આથી આપણને 3 2 3 મળે છે. હવે 3 લિટર દૂધ 8 લિટરના વાસણમાં ઠલવી નાંખીએ. આથી 6 2 0 મળે છે. હવે 8 લિટરના વાસણમાં 6 લિટર દૂધ હોવાથી તેમાંથી 5 લિટર દૂધ લઈ શકાશે, પરંતુ 5 લિટરનું વાસણ ખાલી નથી. પહેલાં એ ખાલી કરી, પછી તેમાં 5 લિટર દૂધ ઠલવીએ છીએ.

આથી 6 0 2

1 5 2 મળે છે.

છેલ્લે ૩ લિટરનું વાસણ ભરી દઈએ અને પછી તે દૂધ 8 લિટરના વાસણમાં ઉમેરી દઈએ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| આમ કરવાથી | 1 | 4 | 3 |
| | 4 | 4 | 0 મળે છે. |

8 લિટરના વાસણાંથી બે વાર 5 લિટર દૂધ લઈ લેવાની અને તે વાસણમાં 3 લિટર દૂધ બે વાર ઉમેરવાની ક્રિયા પૂરી થઈ ગઈ અને આ વાસણમાં 4 લિટર દૂધ મળી ગયું.

**3. બીજો ઉકેલ :** આપણે ઉપર 4 ને 3 અને 5 ના પૂર્ણાંક સંયોજન તરીકે લખેલ છે. આવું સંયોજન અનન્ય નથી. જેમ કે $4 = 3 \times 3 - 1 \times 5$, તરીકે પણ લખી શકાય. આ સંયોજનથી પણ ઉકેલ મળી શકે.

$4 = 8 - 4 = 8 - [(3 \times 3) - (1 \times 5)] = 8 - (3 \times 3) + (1 \times 5)$

એટલે 4 લિટર દૂધ મેળવવા માટે 8 લિટરના વાસણમાંથી 3 લિટર દૂધ ત્રણ વાર કાઢી લેવું જોઈએ અને 5 લિટર દૂધ એક વાર ઉમેરવું જોઈએ. ઉકેલ નીચે પ્રમાણે મળશે.

| 8 | 5 | 3 | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 0 | | |
| 5 | 0 | 3 | → | (8–3=5) |
| 5 | 3 | 0 | | |
| 2 | 3 | 3 | → | (5–3=2) |
| 2 | 5 | 1 | | |
| 7 | 0 | 1 | → | (2+5=7) |
| 7 | 1 | 0 | | |
| 4 | 1 | 3 | → | (7–3=4) |

**4. બીજું ઉદાહરણ :** ધારો કે દૂધ વેચનાર પાસે 18 લિટર માપનું દૂધથી છલોછલ ભરેલું વાસણ છે અને 7 લિટર અને 11 લિટર માપનાં ખાલી વાસણો છે. ઘરાકને 13 લિટર દૂધ જોઈએ છે.

18 લિટરના વાસણમાં 13 લિટર દૂધ રાખવા માટે તેમાંથી 5 લિટર દૂધ લઈ લેવું જોઈએ. 5 ને 7 અને 11ના પૂર્ણાંક સંયોજન તરીકે $5 = (3 \times 11) - (4 \times 7)$ મુજબ લખી શકાય. આથી

$$\begin{aligned} 13 &= 18 - 5 \\ &= 18 - [(3 \times 11) - (4 \times 7)] \\ &= 18 - (3 \times 11) + (4 \times 7) \end{aligned}$$

આમ 18 લિટરમાંથી 13 લિટલ દૂધ રાખવા માટે 18 લિટરના વાસણમાંથી ત્રણ વાર 11 લિટર દૂધ લઈ લેવું જોઈએ અને ચાર વાર 7 લિટર દૂધ ઉમેરવું જોઈએ. નીચેના કોષ્ટક મુજબ આ થઈ શકે.

| 18 | 11 | 7 |
|---|---|---|
| 18 | 0 | 0 |
| 7 | 11 | 0 |
| 7 | 4 | 7 |
| 14 | 4 | 0 |
| 14 | 0 | 4 |
| 3 | 11 | 4 |
| 3 | 8 | 7 |
| 10 | 8 | 0 |
| 10 | 1 | 7 |
| 17 | 1 | 0 |
| 17 | 0 | 1 |
| 6 | 11 | 1 |
| 6 | 5 | 7 |
| 13 | 5 | 0 |

5. **પૂર્ણાંક સંયોજન :** પહેલા કોયડાના ઉકેલમાં આપણે 4 ની 5 અને 3 ના પૂર્ણાંક સંયોજન તરીકે અભિવ્યક્તિ લીધી. બીજા ઉદાહરણના પ્રશ્નના ઉકેલ માટે 5 ની 7 અને 11ના પૂર્ણાંક સંયોજન તરીકે અભિવ્યક્તિ લીધી. એટલે પ્રશ્ન એ થાય કે સંખ્યાની આવી અભિવ્યક્તિ હંમેશાં મળે જ ? સંખ્યાઓ વિશેના નીચેના પરિણામથી આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મળે છે.

પરિણામ : જો $a$ અને $b$ ધનપૂર્ણાંકો હોય અને $a$ અને $b$ નો ગુરુતમ સાધારણ અવયવ $g$ હોય તો પૂર્ણાંકો $m$ અને $n$ મળે જેથી $ma + nb = g$ થાય.

આ પરિણામની સાબિતી યુક્લિડની ભાગાકાર પ્રવિધિથી આપી શકાય છે. જો $a$ અને $b$ પરસ્પર અવિભાજ્ય હોય તો $a$ અને $b$ નો ગુરુતમ સાધારણ અવયવ 1 થાય. એટલે ઉપરના પરિણામથી પૂર્ણાંકો $m$ અને $n$ મળે, જેથી $ma+nb=1$ થાય. એકવાર 1 માટેનું $a$ અને $b$ નું પૂર્ણાંક સંયોજન મળે એટલે દરેક ધનપૂર્ણાંક માટે $a$ અને $b$ નું પૂર્ણાંક સંયોજન મળે એ દેખીતું છે. એક ઉદાહરણ લઈએ. 7 અને 11 પરસ્પર અવિભાજ્ય છે. તેનો ગુરુતમ સાધારણ અવયવ 1 છે. આથી ઉપરના પરિણામથી પૂર્ણાંકો $m$ અને $n$ મળે, જેથી $7m + 11n=1$ થાય. યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિથી આપણે $m$ અને $n$ શોધીએ.

$$11 = 7 \times 1 + 4$$
$$7 = 4 \times 1 + 3$$
$$4 = 3 \times 1 + 1$$

$$\therefore\ 1 = 4 - 3 = 4 - [7-4] = 2 \times 4 - 7$$
$$= 2 \times (11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$$

આપણે ઉદાહરણ બીજામાં 5 માટે 11 અને 7 નું પૂર્ણાંક સંયોજન જરૂરી હતું. એ પણ હવે મળી શકશે.

$$1 = 2 \times 11 - 3 \times 7$$
$$\therefore\ 5 = 10 \times 11 - 15 \times 7$$
$$= 7 \times 11 + 3 \times 11 - 15 \times 7$$
$$= 3 \times 11 - 4 \times 7$$

આપણે 5 ની આ અભિવ્યક્તિનો જ ઉપયોગ કર્યો છે.

**પ્રશ્નો** (1) 9 માટે 8 અને 13નું પૂર્ણાંક સંયોજન મેળવો.

(2) 21 લિટર, 13 લિટર અને 8 લિટર માપનાં ત્રણ વાસણોમાંથી 21 લિટરનું વાસણ દૂધથી પૂરેપૂરું ભરેલું છે, જ્યારે 13 લિટર અને 8 લિટરનાં વાસણો ખાલી છે. ઘરાકને 9 લિટર દૂધ કેવી રીતે આપશો ?

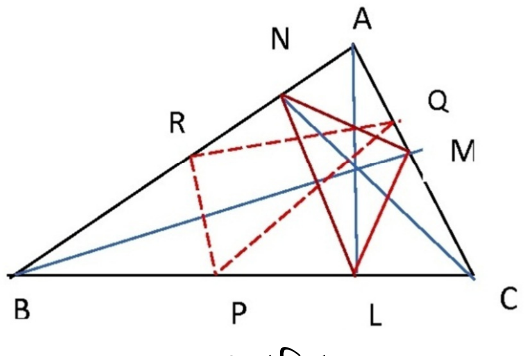
(3) 26 લિટર માપનું વાસણ દૂધથી છલોછલ ભરેલું છે. 18 લિટર અને 8 લિટર માપનાં વાસણો ખાલી છે. બતાવો કે ઘરાકને 11 લિટર દૂધ તો નહિ આપી શકાય, પરંતુ 12 લિટર દૂધ આપી શકાશે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

# જાણીતાનું અજાણ્યું – 6 : પદિક ત્રિકોણ

હેમા વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9409157840

આગલા લેખમાં આપણે અંતર્ગત ત્રિકોણોની ચક્રીય શૃંખલાની વાત કરેલી. આપણે અંતર્ગત ત્રિકોણોને ઓળખીએ છીએ પરંતુ તેની પ્રમાણમાં ઓછી જાણીતી એક ખાસિયત છે – કોઈપણ ત્રિકોણમાં એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો અંતર્ગત ત્રિકોણ હોય છે. તે છે તેનો પદિક ત્રિકોણ. ત્રિકોણના ત્રણેય વેધનાં લંબપાદ ને શિરોબિંદુ તરીકે લઈને મેળવેલ ત્રિકોણને તે ત્રિકોણનો પદિક ત્રિકોણ કહે છે.

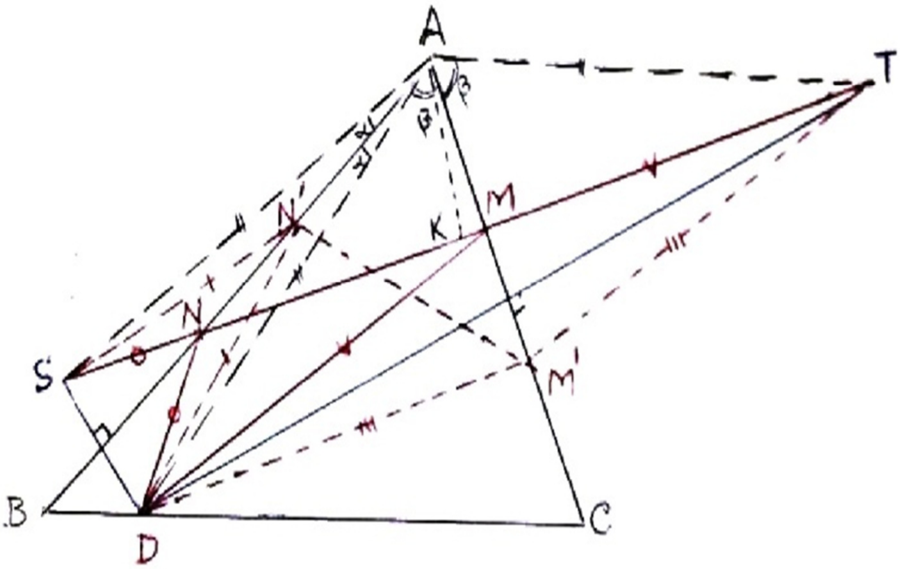



આકૃતિ-1

જેમ કે, આકૃતિ (1) માં $\Delta ABC$ માં $AL \perp BC$, $BM \perp AC$, અને $CN \perp AB$. આથી $\Delta LMN$ એ પદિક ત્રિકોણ છે, જ્યારે $\Delta PQR$ એ કોઈ પણ એક અંતર્ગત ત્રિકોણ છે. આ પદિક ત્રિકોણની લાક્ષણિકતા એ છે કે તે ત્રિકોણના બધા જ અંતર્ગત ત્રિકોણોમાં ઓછામાં ઓછી પરિમિતિ ધરાવે છે.

આ ઓછો જાણીતો ન્યૂનતમ પરિમિતિનો ખ્યાલ સુંદર તો છે જ, પણ તેની સાબિતી પણ એટલી સરસ છે – એક અલગ પ્રકારની ... પ્રતિબિંબનો ખ્યાલ અને માત્ર પ્રાથમિક કક્ષાની ભૂમિતિ વડે ! એટલું જ નહિ, પણ તે એક અનોખી પ્રવૃત્તિ વડે પણ જોઈ શકાય છે. અને તે પણ પ્રતિબિંબ લઈને જ ! તો આ બંને રીતે આ પરિણામ સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

આપણી રીત કંઈક આવી છે --- પહેલા પગલામાં આપણે આપેલા $\Delta$ ABC ની બાજુ BC પર એક બિંદુ D લઈશું. આ બિંદુ Dને BC પર નિશ્ચિત રાખીને નક્કી કરીશું કે બાજુઓ AC અને AB પર બિંદુઓ M અને N કેવી રીતે લેવાં જોઈએ કે જેથી આ D માટે $\Delta$ DMNની પરિમિતિ ન્યૂનતમ થાય. બીજા પગલામાં Dનું સ્થાન BC પર આગલા પગલાની રીતથી એવું નક્કી કરીશું કે જેથી $\Delta$ DMNની પરિમિતિ ન્યૂનતમ થાય.




આકૃતિ-2

**સાબિતી :** બાજુ BC પર એક બિંદુ D લો. કોઈપણ અંતર્ગત $\Delta DM'N'$ લો.

Dનાં બાજુઓ AB અને ACમાં પ્રતિબિંબ S અને T લો. ST જોડો. ધારો કે તે AB અને AC ને N અને Mમાં છેદે છે. (આકૃતિ-2)

હવે AB, એ SDનો લંબદ્વિભાજક હોવાથી $AS = AD$; $NS = ND$; $N'S = N'D$ મળશે. .... (1)

અને AC એ DT નો લંબદ્વિભાજક હોવાથી $AD = AT$; $MD = MT$; $M'D = M'T$ મળશે. .... (2)

તેમજ AB એ $\angle SAD$ ને અને AC એ $\angle TAD$ને દુભાગશે.

$\therefore \angle SAB = \angle BAD = \alpha$ ; $\angle DAC = \angle CAT = \beta$. (ધારો) .... (3)

અને $\angle SAT = 2(\alpha + \beta)$ .... (4)

રચનાને લીધે મળતાં પરિણામો નોંધી લીધાં, જરૂર પ્રમાણે વાપરવા માટે, હવે સાબિતી લઈએ.

$\Delta DM'N'$ની પરિમિતિ $= DN' + N'M' + M'D$

$= SN' + N'M' + M'T > ST$ … … … ((1) અને (2) પરથી)

આ ન્યૂનતમ ત્યારે જ થાય, જ્યારે $N'$ અને $M'$ ST પર હોય. ઉપરાંત, તે અનુક્રમે AB અને AC પર તો હોવાં જ જોઈએ. આથી, Dને અનુલક્ષીને બિંદુઓ M અને N એ AC અને ABને ST જ્યાં છેદે ત્યાં આવશે. (આકૃતિ-2) .... (5)

હવે ઉપરની રીતે મેળવેલ $\Delta DMN$ની પરિમિતિ Dના BC પરના કયા સ્થાન માટે ન્યૂનતમ થશે, તે જોવાનું રહ્યું.

પરંતુ $\Delta DMN$ની પરિમિતિ $= DN+NM+MT=ST$. આથી જો ST ન્યૂનતમ થાય, તો પરિમિતિ ન્યુનતમ થાય. તેને માટે $AK \perp ST$ લો.

પરંતુ, $\Delta AST$ સમદ્વિભૂજ હોવાથી $SK=KT=\frac{1}{2}ST$ અને $\angle SAK = \frac{1}{2}\angle SAT = (\alpha + \beta) = \angle BAC$. …((4) પરથી)

હવે $ST= 2SK=2AS \sin A=2AD\sin A$, જેમાં $\angle A$ આપેલો હોવાથી નિશ્ચિત છે, તેથી $\sin A$ પણ નિશ્ચિત છે.

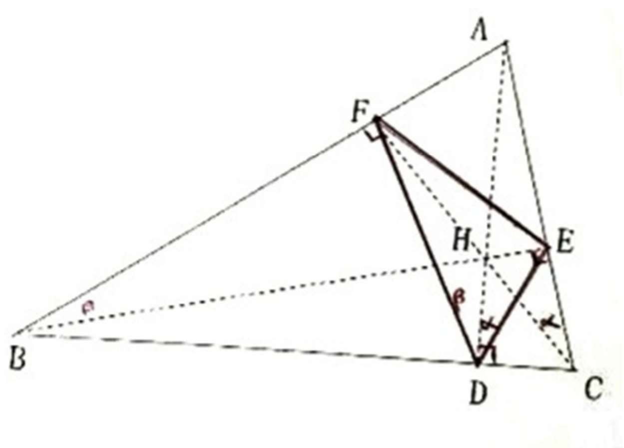
$\therefore$ ST ત્યારે જ ન્યૂનતમ થાય, જ્યારે AS ન્યૂનતમ થાય, એટલે કે જ્યારે AD ન્યૂનતમ થાય. … ((1) પરથી)

એટલે કે જ્યારે $AD \perp BC$.

એટલે કે જ્યારે D એ BC પરનું લંબપાદ હોય.

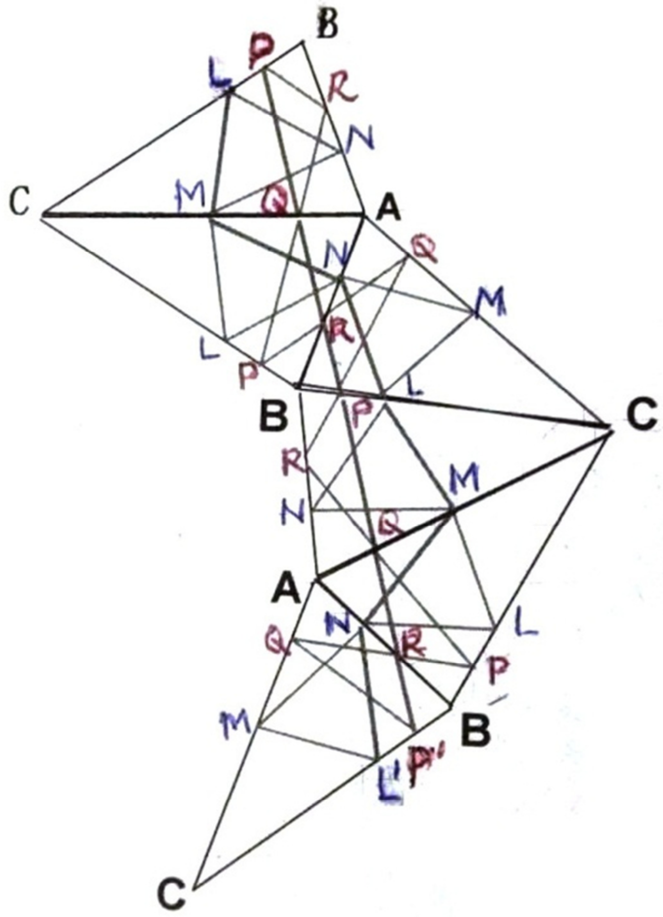
આ જ પ્રમાણે બતાવી શકાય કે આવા ત્રિકોણ માટે બીજાં બે શિરોબિંદુઓ E અને F પણ ત્રિકોણની બાજુઓ પરનાં લંબપાદ હોય.

$\therefore$ ન્યૂનતમ પરિમિતિ માટે પદિક ત્રિકોણ મળે.




આકૃતિ-3

હવે પ્રવૃત્તિ વડે આ પરિણામ જોઈએ. પરંતુ આગળ વાત કરતા પહેલાં તેની બીજી એક ખૂબી નોંધી લઈએ – કોઈ પણ ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર તેના પદિક ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર થાય. આની સાબિતી ચક્રીય ચતુષ્કોણોની મદદથી ખૂબ સહેલાઈથી મળે છે, જે આકૃતિ-3માં જોઈ શકાય છે. પણ આપણે અત્યારે તો તે સ્વીકારીને આગળ ચાલીશું. ..... (A)




**આકૃતિ-4**

એક્રિલિકનો એક ત્રિકોણ કાપીને તેની ઉપર આકૃતિ-1 પ્રમાણે બે અંતર્ગત ત્રિકોણો લો (આકૃતિ 3). અહિં બધાં શિરોબિન્દુઓનાં નામ આકૃતિ-1 કરતાં અલગ રીતે આપ્યાં છે. અહીં $\Delta\, ABC$ માં $\Delta\, PQR$ પદિક ત્રિકોણ છે, જ્યારે $\Delta\, LMN$ એ કોઈપણ અંતર્ગત ત્રિકોણ છે.

હવે એક પછી એક આ પ્રમાણે કરવાનું છે અને આકૃતિમાં સરખાવતા જવાનું છે :

1. આપણી પાસે પહેલો ત્રિકોણ $\Delta\, ABC$ છે. તેને બાજુ AC પર ઊથલાવો – ગણિતની ભાષામાં તેનું $\overline{AC}$માં પ્રતિબિંબ લો. ઊંધો $\Delta\, CBA$ મળશે, જેમાં P,Q,R તેમજ L,M,Nનાં પ્રતિબિંબ દર્શાવેલ છે. પ્રતિબિંબ પછીનાં નામ સરળતા ખાતર બદલ્યાં નથી. (અલબત્ત, Q અને M નું સ્થાનફેર થશે નહિ. કેમ ?) એટલે બીજા ત્રિકોણમાં પણ પદિક ત્રિકોણ PQR અને બીજો ત્રિકોણ LMN છે.
2. બીજા ત્રિકોણનું $\overline{AB}$ પર પ્રતિબિંબ લો – ઊથલાવો.
3. આ ત્રિકોણને $\overline{BC}$ પર, પછી તે ત્રિકોણને $\overline{AC}$ પર અને છેલ્લે $\overline{AB}$ પર, એમ પાંચ વાર ઊથલાવો - પ્રતિબિંબ લો. P અને Lના છેલ્લા સ્થાનને P′ અને L′ વડે દર્શાવ્યાં છે.

આટલી પ્રવૃત્તિથી શું સાબિત થયું તે જોઈએ.

પરિણામ (A) ની મદદથી, બંને ત્રિકોણોમાં $BQ \perp CA$ હોવાથી B, Q, B (બીજા ત્રિકોણનો) સમરેખ થશે અને Q આગળના પદિક ત્રિકોણના ચારેય ખૂણાઓ દ્વિભાજનને લીધે સરખા થશે. આથી P,Q,R (અને R,Q,P પણ) સમરેખ થશે.

એવું જ બીજા અને ત્રીજા ત્રિકોણ વચ્ચે R આગળ બનશે અને આજ રીતે P, Q, R, P સમરેખ થશે.

આજ રીતે, બધા ત્રિકોણો એક પછી એક લેતાં, P, Q, R, P, Q, R, P′ સમરેખ થશે.

$\Rightarrow$ $\overline{PP'}$ એક રેખાખંડ છે, અને $PP' = 2(PQ+QR+RP$

=2 (પદિક ત્રિકોણની પરિમિતિ) ........... (B)

પરંતુ, પદિક ત્રિકોણમાં $BQ \perp CA$ને લીધે મળે છે તેવું $\Delta$ LMN નાં શિરોબિંદુઓમાં નહિ મળે અને L, M, N, L, M, N, L′ સમરેખ નહિ થાય. પરંતુ

$LM + MN + NL + LM + \ldots + ML' = 2(\Delta$ LMN ની પરિમિતિ) .......... (C)

હવે, $\angle CPQ$ (પહેલા ત્રિકોણમાં) $= 90 - \frac{1}{2}\angle QPR = \angle BPR$ ............... ( (A) (વડે)

$= \angle BP'R$ (છેલ્લા ત્રિકોણમાં) ...... ( (A) (વડે)

$\Rightarrow$ $PL \parallel P'L'$. ................ (યુગ્મ ખૂણાઓ સરખા હોવાથી)

પરંતુ $PL = P'L'$.

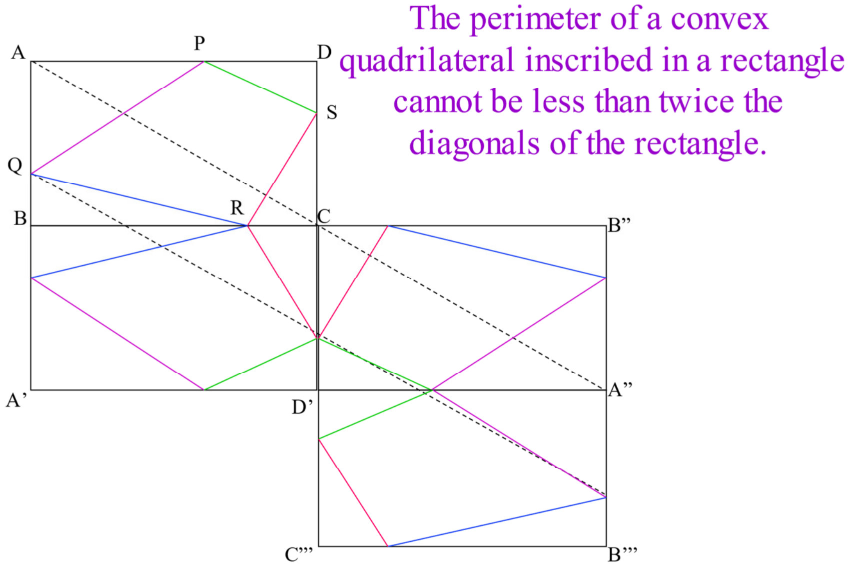
$\Rightarrow$ $PLL'P'$ એ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\Rightarrow$ $PP' = LL' < LM + MN + \ldots\ldots + ML'$.

($\Delta$ PQR ની પરિમિતિ) < ($\Delta$ LMN ની પરિમિતિ). ........ ((B)) અને (C) વડે)

---

## Proof without words (Think about this)




**When will they be equal?**

Sent by : Prof. Hema Vasavada

# The Pioneering Role of Aryabhat in Trigonometry

**Vijay A. Singh**
Visiting Professor, Physics Department,
Centre for Excellence in Basic Sciences,
Kalina, Santacruz East, Mumbai-400078
Email Id : physics.sutra@gmail.com

**Aneesh Kumar**
Dhirubhai Ambani International School,
BKC, Bandra East, Mumbai 400078
Email id : aneesh.kumar11125@gmail.com

# ત્રિકોણમિતિના પાયામાં આર્યભટનું મૂળભૂત યોગદાન

અનુવાદક : રેખાબહેન મહેતા
વલ્લભવિદ્યાનગર (M) 98793 28129

## I. પ્રસ્તાવના :

વિજ્ઞાન અથવા ઈજનેરીના વિદ્યાર્થી તરીકે આપણને અસંખ્ય વખત ત્રિકોણમિતીય વિધેયોની કિંમતો જાણવાની જરૂર પડી છે. આપણે તરત જ લેપટોપ કે મોબાઈલની ચાંપ દબાવીએ છીએ, તો વળી જૂની પેઢીનાં હોય તે છાજલી પરથી કોષ્ટકની પુસ્તિકા કાઢે છે. પરંતુ આપણે ભાગ્યે જ એવું વિચારીએ છીએ કે આ કિંમતો સહુ પ્રથમ કોણે અને શા માટે મેળવી ? જ્યા અને કૉજ્યા વિધેયો કેમ વ્યાખ્યાયિત થયાં ? આ અદ્‌ભુત કામનો યશ પાંચમી સદીના ગાણિતજ્ઞ અને ખગોળશાસ્ત્રી આર્યભટને જાય છે. આ મહાતજજ્ઞે એકદમ નજીક નજીકના ખૂણાઓ માટે જ્યાના કોષ્ટકની ગણતરી કરેલી. જ્યા વિધેયનો પ્રથમ ઉલ્લેખ તેના એકમેવ અદ્વિતીય ગ્રંથ આર્યભટીય (ઈ.સ. 499) માં મળે છે. આકૃતિ-1 માં દર્શાવ્યા મુજબ તેને ધનુષ્યની અર્ધચાપ અથવા અર્ધજ્યાથી ઓળખાવે છે. બાણ અથવા શર કોજ્યા સાથે સંબંધિત છે. આ ગ્રંથ તેમણે માત્ર 23 વર્ષની વયે લખેલો.

આર્યભટીયમાં 121 ગૂઢ શ્લોકો છે. સઘન અને અર્થસભર ગ્રંથ ચાર વિભાગ કે પાદોમાં વહેંચાયેલો છે : ગીતિકાપાદ (13 શ્લોક), ગણિતપાદ (33 શ્લોક), કાલક્રિયાપાદ (25 શ્લોક) અને ખગોળ અથવા ગોલપાદ (50 શ્લોક), આમાં ખગોળશાસ્ત્ર વિશેષ જાણીતું છે. ગણિતપાદમાં બે શ્લોક ‘સુરેખ ડાયોફેન્ટાઈન સમીકરણ’નો ઉકેલ દર્શાવે છે. આની યોગ્ય કદર થઈ છે. પ્રસ્તુત લેખમાં ગણિતપાદમાં સમાવિષ્ટ ત્રિકોણમિતિ વિશે ચર્ચા કરી છે. અમારી દૃષ્ટિએ આ બહુમૂલ્ય યોગદાન ઉપેક્ષિત રહ્યું છે.

ભારતીય ગણિતશાસ્ત્ર મુખ્યત્વે વર્ણનાત્મક અને સંસ્કૃત શ્લોકોમાં છે. પરિણામોનો ઉલ્લેખ છે, સાબિતી કે આકૃતિ નથી હોતી. 100 ઉપરાંત ગહન ગણિતથી ભરપૂર શ્લોકો સાથેનું આર્યભટીય તેનું ઉત્તમ ઉદાહરણ છે.

આ લેખ માટે અમે અનેક સંદર્ભો [2,3,4...] નો ઉપયોગ કર્યો છે. પરંતુ અમારો અભિગમ શિક્ષણશાસ્ત્રીય છે, જે શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓને તેને સમજવા-મૂલવવામાં મદદરૂપ બનશે.

**આર્યભટ :** આર્યભટીય ઈ.સ. 499માં લખાયું, તેના કાલક્રિયાપાદના 10મા શ્લોક પરથી જણાય છે કે આર્યભટનો જન્મ ઈ.સ.476માં થયો હતો. ગણિતપાદના 10મા શ્લોકમાં તે કહે છે, ‘હું મારું જ્ઞાન રજૂ કરું છું જેને કુસુમપુરમાં સન્માન મળ્યું છે.’ કુસુમપુર અથવા પુષ્પપુર તે પાટલિપુત્ર, હાલનું પટના (બિહાર) છે. તે પ્રખ્યાત શિક્ષણધામ હતું. આનો અર્થ એવો થાય કે તેણે ત્યાં કેટલોક સમય ગાળ્યો હશે, પરંતુ તેનો અર્થ તે ત્યાં જન્મ્યો હશે તેમ ન થાય. અલબત્ત ગણિતશાસ્ત્રી ભાસ્કરાચાર્ય (પ્રથમ) જે આર્યભટ પછીની સદીમાં થયેલા તે અને ત્યાર પછી હજાર વર્ષે થયેલ નીલકંઠ સોમૈયાજી બંને સ્પષ્ટ રીતે લખે છે કે તે કુસુમપુરનો હતો. તેથી તે કદાચ ત્યાં જન્મ્યો ન હોય પરંતુ વસ્યો તો હતો જ.

આર્યભટ હાડોહાડ વૈજ્ઞાનિક હતો. દિવસ અને રાતની સમજણ માટે તે શાંત નદી પર વહેતી નૌકામાં સફર કરતી વ્યક્તિનું દૃષ્ટાંત આપે છે. તે વ્યક્તિને એવું લાગે છે કે આજુબાજુની જમીન અને વૃક્ષો તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે. તે જ રીતે પૃથ્વી ફરે છે, પણ આપણને સૂર્ય અને તારાઓ ફરતા દેખાય છે. ગ્રહણો છાયા છે, નહિ કે પૌરાણિક રાહુ અને કેતુ ચંદ્ર કે સૂર્યને ગળી જાય છે. આવું હિંમતપૂર્વક કહેવા બદલ તેના ઘણા સમકાલીન ખગોળશાસ્ત્રીઓએ તેની ટીકા કરી. તેના ગોલપાદના 49મા શ્લોકમાં તે કહે છે, “આ વિશુદ્ધ જ્ઞાન મેં મારી જાતે ઊંડી ડૂબકી મારીને અને મારી પોતાની પ્રજ્ઞાની નૌકા વડે મેળવ્યું છે. કોઈ દેવ કે દેવીના આશીર્વાદથી નહિ.”

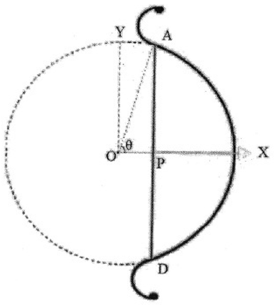
ગીતિકાપાદના પ્રથમ શ્લોકમાં બ્રહ્માની સ્તુતિ છે. તે સિવાય બીજાં ત્રણ સ્થળે પણ બ્રહ્માનો ઉલ્લેખ છે. આ બધા જ ઉલ્લેખ નાન્યેતર જાતિમાં છે. એટલે કે આ બ્રહ્મા ત્રિદેવ (બ્રહ્મા-વિષ્ણુ-મહેશ) પૈકીના બ્રહ્મા નથી. શક્ય છે કે તે નિર્ગુણ બ્રહ્મ હોય, પરંતુ એવું ચોક્કસ ન કહી શકાય, કારણ ગોલપાદના 11-12 શ્લોકમાં તે બૌદ્ધધર્મના શિખર કે 'સુખાવતી' નો ઉલ્લેખ કરે છે. તેથી તે અદ્વૈત વેદાંતી કે મહાયાન બૌદ્ધ હશે તેમ માની શકાય.

આર્યભટ વિશે ઘણી ગેરસમજ છે, વિકિપીડીઆમાં પણ. ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓ 'શૂન્ય'ના ખ્યાલથી પરિચિત હતા જ અને આર્યભટે તેની શોધ કે ખોજ નહોતી કરી, પરંતુ તેણે તેનો બહુ સહજતાથી ઉપયોગ કર્યો છે. તે નાલંદા વિશ્વવિદ્યાલયના કુલપતિ હતા એવા વિધાન ને પણ કોઈ આધાર નથી.

હવે તમે જે વાંચશો તેનાથી એટલું નક્કી સમજાશે કે આર્યભટ અત્યંત મેધાવી અને મૌલિક ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તેના માત્ર 121 શ્લોકના પુસ્તકે હજાર વર્ષ પછી પણ ગણિતશાસ્ત્રીઓ પર પ્રભાવ પાડ્યો છે.

**II. અર્ધજ્યા વિધેય :**

ગણિતના ઈતિહાસમાં અર્ધજ્યા વિધેય વિશે કામ કરનાર પ્રથમ ગણિતજ્ઞ આર્યભટ છે.




**આકૃતિ-1**

આકૃતિ-1માં એકમ વર્તુળ પર ધનુષ્ય મૂકેલું છે. ધનુષ્યની પણછ (AD) નું અડધું એટલે કે અર્ધજીવા AP તે sinθ (જ્યાθ) છે. તે આર્યભટની વ્યાખ્યા છે.

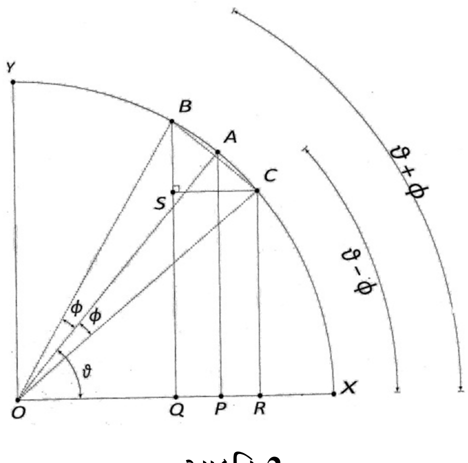
OP ને કૉજ્યાθ(cosθ) અને PX=1−cos θ ને 'સર' કહે છે. ખરેખર તો $\sin\theta=\frac{AP}{OA}=AP$ (કારણ OA=1).

વર્તુળ નાનું કે મોટું હોય તે મુજબ AP અને OA નાના કે મોટા થાય પણ ડાબી બાજુ એ θ નું વિધેય છે, જે અવિકારી છે (બદલાતું નથી). વર્તુળ સાથે સંબંધિત માપનક (Metrical) ગુણધર્મો ત્રિકોણમિતીય વિધેયો, પાયથાગોરસ પ્રમેય (બોધાયન અથવા કર્ણ-પ્રમેય [4]) વડે મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે ત્રિકોણના ગુણધર્મને તેના પરિવૃત્તની ચાપ સાથે જ્યા અને કૉજ્યા વિધેયો વડે સાંકળી શકાય છે. અર્ધજ્યાની ભૂમિકા પર ભાર મૂકીને આર્યભટે વર્તુળ ભૂમિતિને માપનક ગુણધર્મો સાથે જોડી આપી છે. તેમને ત્રિકોણમિતિના જનક પૂરવાર કરવા આટલું જ પૂરતું છે, પણ તેમણે તેનાથી ઘણું વધારે કર્યું છે.

**III. જ્યા અને કોજ્યા માટે તફાવતનાં સૂત્રો :**

ગણિપાદના 12મા શ્લોકની જ્યા વિધેયના કોષ્ટક માટે કેન્દ્રીય ભૂમિકા છે. તે ગહન છે અને તેનો અર્થ સમજવા માટે પહેલાં જ્યાના તફાવતનું સૂત્ર મેળવવું જરૂરી છે. આની રજૂઆતના ઘણા સ્રોત છે. [(2), (3), (4)]




**આકૃતિ-2**

આકૃતિ 2માં એકમ વર્તુળનો ચતુર્થાંશ દર્શાવ્યો છે, OX=OY=1

ચાપ XA, XB, XC ખૂણાઓ θ, θ + φ અને θ − φ રચે છે. અર્ધજીવા AP, BQ અને CR અનુક્રમે તેમનાં જ્યા વિધેયો છે, CS, BQ ને લંબ દોરેલો છે. ભાષ્યકાર નીલકંઠ સોમૈયાજી[3]ના જણાવ્યા મુજબ આર્યભટ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના તફાવત માટે ΔBSC અને ΔOPA ને સમરૂપ બતાવે છે. અમે વાચકોને આ સાબિત કરવા સૂચવીએ છીએ. આ સમરૂપતાને કારણે

$$\frac{BS}{OP}=\frac{BC}{OA} \text{ થશે.} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

હવે, OA = 1, OP = $\cos\theta$ અને BC = $2\sin\phi$ છે. BS = BQ – CR = $\sin(\theta + \phi) - \sin(\theta - \phi)$

તેથી (i) પરથી, $\sin(\theta + \phi) - \sin(\theta - \phi) = 2\cos\theta\sin\phi$ થશે.

તેવી જ રીતે, $\cos(\theta + \phi) - \cos(\theta - \phi) = -2\sin\theta\sin\phi$ સાબિત કરી શકાય.

**સંદર્ભ :**


[1] "Aryabhatiya", Walter E. Clark, University of Chicago Press (1930).

[2] "Aryabhatiya", Kripashanker Shukla and K V Sarma, Vols. I and II, Indian National Science Academy Publication (1976). Our Section III has been shaped by a critical reading of certain verses from the Ganitapada by these authors.

[3] "Aryabhatiya" with the Bhasya (Commentary) of Nilakantha Somaiyaji, Parts I and II ed. Sambasiva Sastri, Government of Travancore, Trivandrum (1930, 1931); Part III, ed. Suranad Kunjan Pillai, University of Kerala, Trivandrum (1957). This work is in Sanskrit and there is no English (or Hindi) translation of this seminal text to the best of our knowledge. The other works mentioned herein are in English.

[4] "The Mathematics of India", P. P. Divakaran, Hindustan Book Agency (2018). The book has shaped this article in ways covert and overt.

[5] "Two New Proofs of the Pythagorean Theorem - Part I ", Shailesh Shirali, At Right Angles, Issue 16, pages 7-17, (July 2023).

[6] "The History of Hindu Mathematics's", Bibhutibhusan Datta and Avadhesh Narayan Singh, Vols. I and II, Asia Publishing House, Delhi (1935 and 1938). A pioneering book on Indian Mathematics written in Pre-Independence India.



પ્રા. વિજય એ. સિંઘ આઇ.આઇ.ટી., કાનપુર, હોમી ભાભા સેન્ટર ફોર સાયન્સ એજ્યુકેશન (HBCSE) મુંબઈ અને ટાટા ઈન્સ્ટીટ્યુટ ઑફ ફન્ડામેન્ટલ રીસર્ચ (TIFR), મુંબઈમાં દીર્ઘકાલીન સેવાઓ આપ્યા બાદ હાલમાં મુંબઈમાં સેન્ટર ફોર એક્સેલેન્સ ઇન બેઝીક સાયન્સીઝ (CEBS)માં મુલાકાતી પ્રાધ્યાપક તરીકે કાર્યરત છે. નેશનલ એકેડેમિ ઑફ સાયન્સીઝ, ઇન્ડિયાના તેઓ ફેલો છે. સાયન્સ ઑલિમ્પિયાડઝના રાષ્ટ્રીય કક્ષાએ સંયોજક રહી ચૂકેલા ડૉ. વિજય સિંઘ 2019-2021ના સમયગાળા દરમિયાન ઇન્ડિયન એસોસીએશન ઑફ ફિઝીક્સ ટીચર્સ (IAPT)ના પ્રમુખ હતા.

શ્રી અનીશકુમાર ધીરૂભાઈ અંબાણી ઇન્ટરનેશનલ સ્કૂલ, મુંબઈમાં ધોરણ 12માં અભ્યાસ કરે છે. તેઓ ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ઊંડો રસ ધરાવે છે.



પ્રસ્તુત લેખ પ્રા. વિજય સિંઘ અને અનીશકુમારના મૂળ અંગ્રેજી લેખના અમુક ભાગ (પહેલા ત્રણ પરિચ્છેદ)નો ડૉ. રેખાબેન મહેતાએ કરેલો ભાવાનુવાદ છે. લેખનો અનુવાદ કરવા માટે અને તે સુગણિતમ્‌માં પ્રસિધ્ધ કરવા માટે અનુમતિ આપવા માટે અમો પ્રા. વિજય સિંઘ અને શ્રી અનીશકુમારના આભારી છીએ. લેખના અનુવાદ માટે ડૉ. રેખાબેન મહેતાનો આભાર માનીએ છીએ.

**- સંપાદકો**


✦ ✦ ✦ ✦ ✦

# પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આચમન-7

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ.
(M) 9925837247

આ લેખમાળાના આ પહેલાંના બે લેખોમાં આપણે ચોરસ વેદિની રચના કરવાની રીતો જોઈ. આ લેખમાં વેદિનાં સ્થાન નિશ્ચિત કરવાની રીત અને સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારની વેદિની રચના કરવાની રીત જોઈશું.

યજ્ઞસ્થળે ત્રણ વેદિઓનો ઉલ્લેખ છે.

(1) ગાર્હપત્ય : યજ્ઞ કરાવનાર "ગૃહસ્થ" સાથે સંબંધિત વેદિ. આ વેદિ વર્તુળાકાર હોય છે.

(2) આહ્‌વનીય : આ વેદિમાં આહૂતિ આપવામાં આવે છે. આ વેદિ ચોરસ આકાર હોય છે.

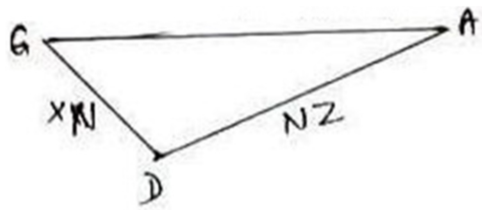
(3) દક્ષિણાગ્નિ : આ વેદિ દક્ષિણ દિશામાં બનાવવામાં આવે છે. આ વેદિ અર્ધવર્તુળાકાર હોય છે.

આહ્‌વનીય વેદિ ચોરસ આકાર છે, જે પ્રથમ રચવામાં આવે છે. ત્યારબાદ અગાઉ સમજાવ્યા પ્રમાણે તેના પરથી ગાર્હપત્ય (વર્તુળાકાર) વેદિ અને ત્યારબાદ દક્ષિણાગ્નિ (અર્ધવર્તુળાકાર) વેદિ બનાવાય છે.

બ્રાહ્મણ યજમાન હોય તો આહ્‌વનીય વેદિ, ગાર્હપત્યથી 8 પ્રક્રમ દૂર બનાવવી, ક્ષત્રિય યજમાન હોય તો 11 પ્રક્રમ દૂર અને વૈશ્ય યજમાન માટે 12 પ્રક્રમ દૂર બનાવવી એવું વિવિધ શ્રુતિઓમાં કથન છે.

ગાર્હપત્ય અને આહ્‌વનીય વેદિઓની રચના કર્યા બાદ દક્ષિણાગ્નિ વેદિનું સ્થાન નિશ્ચિત કરવા માટે નીચે પ્રમાણેની રીત દર્શાવેલી છે.

ધારો કે A અને G અનુક્રમે આહ્‌વનીય અને ગાર્હપત્ય વેદિઓનાં કેન્દ્રો છે. AG ના માપથી થોડા વધુ માપવાળી રજ્જુ (સૂલ્બ-દોરી) લો. તેના પર XY = GA થાય તેવાં બે બિંદુઓ X અને Y નિશ્ચિત કરો. હવે XY ના છ સરખા ભાગ કરો.


અને તેમાંના એક ભાગ જેટલી લંબાઈ Y થી આગળ તરફ લઈને ત્યાં Z બિંદુ નિશ્ચિત કરો. હવે XZ ના ત્રણ સરખા ભાગ કરો અને XZ પર $XN = \frac{1}{3}$ XZ થાય તેવા બિંદુને N કહો. હવે X ને G આગળ અને Z ને A આગળ ખીલા સાથે બાંધી દો અને રજ્જુને N આગળથી પકડીને દક્ષિણ તરફ ખેંચો અને બિંદુ N જમીન પર જ્યાં અડકે ત્યાં શંકુ D મૂકો. આ બિંદુ D દક્ષિણાગ્નિ વેદિનું કેન્દ્ર છે. આ રીતે યજ્ઞસ્થળે વેદિઓનાં સ્થાન પણ ગણિતની મદદથી નિશ્ચિત કરવામાં આવતાં હતાં.

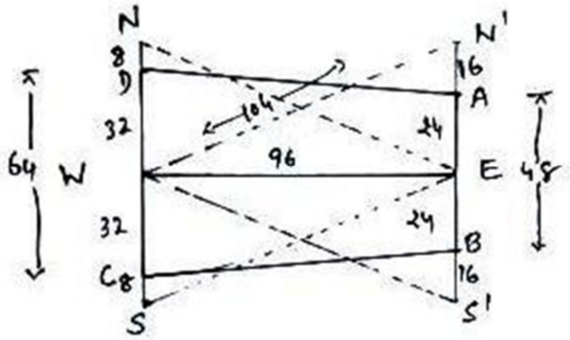
હવે સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારની એક વિશિષ્ટ વેદિ – જેને "દાર્શિકી" અથવા "દર્શપૌર્ણમાસિકી" વેદિ કહેવામાં આવે છે – ની ભૌમિતિક રચનાની રીત જોઈશું. વેદિનું વર્ણન આપતો શ્લોક નીચે મુજબ છે.

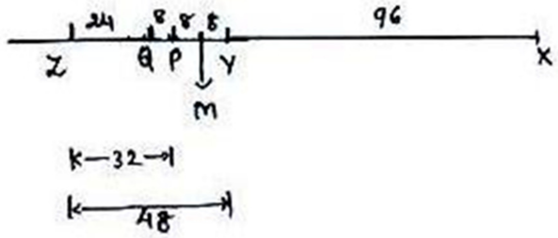
"यजमान मात्री प्राची । अपरिमिता वा । यथा सब्नानि हवीषि सम्भवेदेवं तिरश्री । प्राञ्चौ वेद्यंसावुन्नयति । प्रतीची श्रोणी । पुरस्तादंहीयसी पश्चात् प्रथीयसि मध्ये सन्नततरा । एवमेव हि योषेति दार्शिक्या वेदेर्विज्ञायते ॥ 4.13-19 ॥"

**અર્થઘટન :** દાર્શિકી વેદિની પ્રાચી (પૂર્વ-પશ્ચિમ રેખા) ની લંબાઈ યજમાનની ઊંચાઈ જેટલી (પ્રમાણભૂત 96 અંગુલ) અથવા તેનાથી થોડી વધુ લેવામાં આવે છે. તિર્યંગ્માની (પહોળાઈ) હવન સામગ્રી મુકી શકાય. એ ધ્યાનમાં રાખીને નિશ્ચિત કરાય છે. વેદિની પૂર્વ બાજુ થોડી ઊંચી અને પહોળાઈ ઓછી હોય છે જ્યારે પશ્ચિમ બાજુની પહોળાઈ વધુ હોય છે. વેદિનો મધ્યભાગ અંદર તરફ વળાંકવાળો હોય છે.

આ વેદિની મધ્યરેખા 96 અંગુલ લંબાઈની હોય છે. જો કે પૂર્વ અને પશ્ચિમ બાજુનાં માપ બોધાયન સૂલ્બસૂત્ર (1.71-72) પ્રમાણે લેતાં પશ્ચિમ બાજુ 64 અંગુલ અને પૂર્વ-બાજુ 48 અંગુલ હોય છે.

આપસ્તંભ સૂલ્બ સૂત્રમાં (4.20-25) આ વેદિની રચનાનું વર્ણન છે. પરંતુ તેનું શબ્દશઃ અર્થઘટન સ્વયંસ્પષ્ટ નથી. ઉપરાંત તેમાં પૂર્વ-પશ્ચિમ બાજુનાં માપનો પણ ઉલ્લેખ નથી. અગાઉ લખ્યા પ્રમાણે બૌધાયન સૂલ્બ સૂત્ર (1.71-72) નો ઉપયોગ કરીને ટીકાકારે વર્ણવેલી ભૌમિતિક રચના સમજવી સરળ છે જે નીચે પ્રમાણે છે :




ઉપરની આકૃતિના સંદર્ભમાં EW એ પ્રાચી (પૂર્વ-પશ્ચિમ રેખા) છે જેની લંબાઈ 96 અંગુલ છે. XY = EW = 96 લંબાઈની રજુ (દોરી) નીચે દર્શાવેલી છે. Y આગળથી દોરીને Z સુધી લંબાવો જેથી YZ = 48 અંગુલ થાય. YZ પર Y થી 8 અંગુલ અંતરે નિશાની M કરો જ્યાંથી દોરીને ખેંચવાની થશે. MP = PQ = 8 અંગુલ અંતરે બિંદુ P અને Q ની નિશાની કરો. QZ = 24 અંગુલ રહેશે.

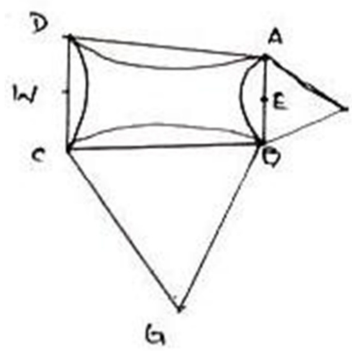
હવે E અને W આગળ બે શંકુ જમીનમાં સ્થિર રહે એ રીતે મૂકો. X અને Z આગળ ગાળીયો બનાવી X ને E આગળના શંકુમાં અને Z ને W આગળના શંકુમાં બાંધી દો.

હવે દોરીને M આગળથી પકડીને દક્ષિણ તરફ ખેંચો અને જમીનના જે બિંદુએ M સ્પર્શે ત્યાં શંકુ S મૂકો. આ જ સ્થિતિમાં જમીનના જે બિંદુએ P સ્પર્શે ત્યાં શંકુ C મૂકો. આ વેદિનો દક્ષિણ-પશ્ચિમનો ખૂણો થશે (જુઓ આકૃતિ) તે જ રીતે ઉત્તર પશ્ચિમનો ખૂણો D નિશ્ચિત કરો.

હવે દોરીના ગાળીયાની અદલાબદલી કરી ફરીથી E અને W માં ગાળીયા નાખી આ જ રીતે દક્ષિણ-પૂર્વમાં S′ અને B નાં સ્થાન નિશ્ચિત કરો. ઉત્તરપૂર્વમાં N′ અને Aનાં સ્થાન નિશ્ચિત કરો. ABCD જરૂરી સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારની વેદિ છે, જેમાં અગાઉ જણાવ્યા પ્રમાણે પૂર્વ બાજુએ પહોળાઈ 48 અને પશ્ચિમ બાજુએ પહોળાઈ 64 છે.

$\Delta WEN'$ માં $WE = 96$, $EN' = 40$ અને $WN' = 104$ છે જે $96^2 + 40^2 = 104^2$ થવાથી E આગળ કાટકોણ રચાય છે.

હવે BC કરતાં બમણી લંબાઈની દોરી લઈ, તેના B અને C આગળના ગાળીયાને B અને C આગળ શંકુ મૂકી, તેમાં ભેરવો. આ દોરીનું મધ્યબિંદુ નિશ્ચિત કરી તે બિંદુથી દોરીને દક્ષિણ તરફ ખેંચો. મધ્યબિંદુ જે જગ્યાએ જમીનને અડે ત્યાં શંકુ G મૂકો. હવે આ દોરીના મધ્યબિંદુને શંકુ G માં ભેરવી બંને છેડાના ગાળીયાને સાથે રાખીને C થી B ની વક્રચાપ દોરો. (જુઓ આકૃતિ.)




આ જ રીતે AD આગળ ચાપ દોરો તથા AB અને CD આગળ પણ યોગ્ય લંબાઈની દોરી લઈ આ ક્રિયા કરો. આમ કરવાથી વેદિની ચારે બાજુઓ અંદર તરફ વક્રાકાર ધારણ કરશે.

હવે પછીના લેખમાં આવી સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારની અન્ય વેદિઓની રચનાની ભિન્ન રીતો જોઈશું.

Ref. (1) Apastamba Sulbasutram – Dr. D. P. Kuleria
(2) The Science of the Sulba – B. B. Datta

## ક્ષેત્ર દર્શન (ભજન)

માનવ આયે .... માનવ જાયે.... ક્ષેત્રફળ સંગાથ (2)
નોટું નોટું ... (2) કરતાં કરતાં ક્ષેત્રફળ ભૂલી જાય ...માનવ...
પાંદડીઓમાં ક્ષેત્ર દીઠું, ... બીજ કાંટાને સંબંધ (2)
જીવન એનું ... (2) ક્ષેત્રે ડુબ્યું, માસ્તર કડિયો ને રંગમ ... માનવ ....
કાપડિયો તો પને માપે, ... સાડી, ધોતિયું, જાજમ (2)
ધોબી ગરમ ... (2) ઈસ્ત્રી કરે, ગજવું બાંય ને રેશમ ... માનવ...
ક્ષેત્રદર્શન કરવા નીકળ્યા, ... હરિ વિદ્યાર્થીને સંગ (2)
ઘોડિયામાં તો .... (2) બાળક દીઠું બાળોતિયાને સંગ ... માનવ ...
ખાતાં શીખતાં ચમચી લીધી, ... ચગાવ્યો ઊંચો પતંગ (2)
મોટો થયો ત્યાં... (2) પાને રમ્યો, કેરમ, ચેસને સંગ ... માનવ ...
પત્ર લખ્યો પ્રેમિકાને, .... દિલ દિવાલે તરંગ (2)
ગાલે એના ... (2) ચુંબન દીધું એમાંય ક્ષેત્રદર્શન ... માનવ ...
નોકરી માટે અરજી કીધી, ... ખરચ્યું લંબચોરસ ધન (2)
ઘરડો થયો ત્યાં ... (2) ધોતિયુ પહેર્યું ધર્મક્ષેત્રને સંગ ... માનવ...
છેલ્લે ઓઢયું કફન પ્યારું, ... લંબચોરસ અનુબંધ (2)
ઠાઠડી બાંધીને ... (2) મસાણે મૂક્યો ચતુષ્કોણને સંગ ... માનવ...
બેસણામાં તો ચાદર્યું પાથરી, ... ચોરસ, ત્રિકોણને લંબ (2)
બારમા પછી....(2) લોકો ભૂલ્યા ડોહાને ક્ષેત્રસંબંધ ... માનવ ....
વા'લા લોકો કરતાં જાજો, ... બંધમાં ક્ષેત્ર દર્શન (2)
ખુલ્લાની તો ... (2) વાત જ ન્યારી એને શું ક્ષેત્રસંબંધ ... માનવ ...

**ડૉ. સંજયકુમાર એસ. પટેલ**
**વાપી, જિ. વલસાડ, (મો) 98258 23271**

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ :

# ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા જૂન હહ (June Huh)

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, VNSGU, સુરત. (M) 99742 30088

આપણી ગુજરાતી ભાષામાં કહેવત છે કે 'શૂરના લક્ષણ પારણેથી અને વહુના લક્ષણ બારણેથી'. મોટેભાગે મહાન ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને વૈજ્ઞાનિકો બાળપણથી જ પોતાની મહાનતાના પરચા બતાવતા રહે છે. પરંતુ આ વખતે "મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ" લેખશ્રેણી હેઠળ આપણે એવા ગણિતજ્ઞના જીવન અને કાર્યોની માહિતી મેળવીશું, જેમણે શૈક્ષણિક અને વ્યવસાયિક વિકાસમાં સફળતાની સીડી ચડવામાં ઘણું મોડું કર્યું, પણ જ્યારે તેઓ એ સીડી સુધી પહોંચ્યા ત્યારે 2022ના ફિલ્ડ્સ મેડલનાં પગથિયે જઈ ઊભા રહ્યાં. આપણે વાત કરીશું પ્રિન્સ્ટન યુનિવર્સિટીનાં પ્રોફેસર જૂન હહની.

જૂન હહનો જન્મ કેલિફોર્નિયાના સ્નેટફર્ડ શહેરમાં 1983ની સાલમાં થયો હતો, જ્યાં તેમનાં માતાપિતા સ્નેટફર્ડ યુનિવર્સિટીમાં અભ્યાસ કરતાં હતા. એ વાત વાચકોના ધ્યાન પર દોરવા માંગું છું કે તેમની જન્મ તારીખ વિશે ઘણી શોધ કરવા છતાં ઈન્ટરનેટ પર કશે માહિતી પ્રાપ્ત થઈ નથી. જૂન આશરે બે વર્ષનાં હતા ત્યારે તેમનું કુટુંબ સાઉથ કોરિયામાં સ્થાયી થયું. તેમના પિતા કોરિયા યુનિવર્સિટીમાં આંકડાશાસ્ત્રના પ્રોફેસર હતા. જ્યારે તેમની માતા સિઓલ નેશનલ યુનિવર્સિટીમાં રશિયન ભાષાનાં પ્રોફેસર હતાં.

પ્રાથમિક શાળાની કસોટીઓમાં નબળા ગુણ મળવાના કારણે જૂનને ખાતરી થઈ હતી કે તેમની પાસે ગણિતમાં શ્રેષ્ઠ બનવાની જન્મજાત યોગ્યતાનો અભાવ છે. શાળા તેમના માટે ત્રાસદાયક હતી. તેમને શીખવું ગમતું હતું પરંતુ વર્ગખંડમાં તે ધ્યાન કેન્દ્રિત કરી શકતા ન હતા. તેના બદલે તેમને પોતાની જાતે વાચન કરવું ઘણું પસંદ હતું. પ્રાથમિક શાળામાં જ તેમણે જીવંત વસ્તુઓ વિશેના જ્ઞાનકોશના તમામ 10 ગ્રંથો વાંચી લીધા હતા.

બસ, જ્યારે પણ શક્ય હોય તેઓ ગણિત ટાળવા માટે શ્રેષ્ઠ પ્રયાસ કરતા. તેમનાં પિતાએ એકવાર તેમને વર્કબુકમાંથી શીખવવાનો પ્રયાસ કર્યો, પરંતુ તે પુસ્તકના પ્રશ્નોને હલ કરવાનો પ્રયાસ કરવાને બદલે તેઓ પાછળથી ઉકેલોની નકલ કરવા લાગ્યા. જ્યારે તેમના પિતાએ તે ઉકેલો ધરાવતાં પૃષ્ઠોને ફોડી નાંખ્યાં ત્યારે જૂન એક સ્થાનિક પુસ્તકોની દુકાનમાં ગયા અને ત્યાં તે પુસ્તકોની નકલ શોધી જવાબો લખી લાવ્યા.

જ્યારે તેઓ 16 વર્ષના હતા, ત્યારે હાઈસ્કૂલના પ્રથમ વર્ષની મધ્યમાં તેમણે ભણવાનું છોડી કવિતા લખવાનું નક્કી કર્યું. તેમણે પ્રકૃતિ વિશે તથા પોતાના અનુભવો વિશે કવિતાઓ પણ લખી. જૂનને કવિતાઓ લખવા માટે એટલું જનૂન હતું કે તેમણે નક્કી કર્યું કે યુનિવર્સિટીમાં ભણતર માટે હાજરી આપતાં પહેલાં જે બે વર્ષ તેમની પાસે હતાં, તેમાં તેઓ પોતાની શ્રેષ્ઠ કૃતિ પૂર્ણ કરી પ્રકાશિત કરી દેશે, જે શક્ય ન બન્યું. કવિતા

લખવા માટે પણ જે શિસ્ત જરૂરી હતી તે જૂન અનુસરી ન શક્યાં.

2002માં જૂને જ્યારે સિઓલ નેશનલ યુનિવર્સિટીમાં પ્રવેશ મેળવ્યો, ત્યારે તેમણે વિજ્ઞાન લેખક બનવાનું વિચાર્યું અને તે માટે ભૌતિકશાસ્ત્ર અને ખગોળશાસ્ત્રને મુખ્ય વિષય તરીકે યુનિવર્સિટીમાં પસંદ કર્યા. પરંતુ પાછું વર્ગખંડના નિત્યક્રમ પ્રત્યેના અણગમાને કારણે તેઓ અવારનવાર વર્ગ છોડતા અને આ કારણથી તેમણે કેટલાક અભ્યાસક્રમોનાં વર્ગો ફરીથી લેવા પડ્યા હતા.

જૂનને સ્નાતક થતાં છ વર્ષ લાગ્યાં હતાં. આ દરમિયાન છોડેલા વર્ગખંડોની ભરપાઈ સ્વરૂપે તેમણે છઠ્ઠા વર્ષમાં પ્રખ્યાત જાપાની ગણિતશાસ્ત્રી હેઈસુકે હિરોનાકા દ્વારા શીખવવામાં આવતા વર્ગમાં પ્રવેશ મેળવ્યો. હિરોનાકા પોતે 1970ના ફિલ્ડ્સ મેડલના વિજેતા રહી ચૂક્યા હતા અને ખૂબ જ પ્રભાવશાળી વ્યક્તિત્વ ધરાવતા હતા. જૂન પ્રથમ વર્ગમાં જ ઝડપથી તેમના પ્રભાવ હેઠળ આવવા લાગ્યા.

જોકે તેઓ ફક્ત પ્રોફેસરના પ્રભાવના કારણે જ વર્ગથી આકર્ષિત નહોતા થયા, પરંતુ ત્યાં ભણાવવામાં આવતા ગણિત પ્રત્યે તેમને પ્રથમ વખત દિલચસ્પી જાગી. આમ તો તે વર્ગનો અભ્યાસક્રમ બીજગણિતીય ભૂમિતિના પરિચયનો હતો. પણ તેના બદલે હિરોનાકાએ પોતાનું સંશોધન કાર્ય કે જે Singular Theoryના ક્ષેત્રમાં હતું. તે આ વર્ગ દરમિયાન શીખવ્યું. આ વર્ગ કે જે 200 વિદ્યાર્થીઓથી શરૂ થયો હતો તેમાં થોડા અઠવાડિયા પછી ફક્ત પાંચ વિદ્યાર્થીઓ જ રહ્યા હતા. જૂન હુહ તેમાંના એક હતાં.

આ વર્ગ દરમિયાન પ્રથમ વખત જૂને સંશોધન ગણિતને અનુભવ્યું. હિરોનાકાના પ્રવચનો અન્ય અંડરગ્રેજ્યુએટ અભ્યાસક્રમોની જેમ પોલિશ્ડ ન હતાં અને જૂનને તેનું સસ્પેન્સ ખૂબ ગમ્યું. આ વર્ગ દરમિયાન એવું કંઈક કરવાના પ્રયાસ કરવાની ક્રિયા હતી, જે ખરેખર કોઈ જાણતું ન હતું કે કઈ રીતે કરવાનું છે. જૂનને આ ક્રિયામાં ખૂબ રસ પડ્યો. તેમની ધગશ જોઈ હિરોનાકાએ જૂનને પોતાની સાથે કામ કરવા માટે પ્રોત્સાહિત કર્યો.

જૂને સ્નાતક થયા પછી સિઓલ નેશનલ યુનિવર્સિટીમાં માસ્ટર્સ પ્રોગ્રામ શરૂ કર્યો, જ્યાં તેઓ નાયંગ કિમને મળ્યા જે હાલમાં તેમનાં પત્ની છે. આ પ્રોગ્રામ દરમિયાન રજાના દિવસોમાં જૂન હિરોનાકા સાથે સમય વિતાવવા લાગ્યા અને તેમની સાથે જાપાનમાં ટોક્યો અને ક્યોટો પણ ગયા, માત્ર ગણિતની ચર્ચાનાં ઊંડાણમાં જવા માટે.

ત્યારબાદ જૂને S.U.માં લગભગ એક ડઝન ડૉક્ટરલ પ્રોગ્રામ માટે અરજી કરી હતી. પરંતુ તેમના અંડરગ્રેજ્યુએટ સમયના ભૂતકાળના કારણે એકને છોડી બાકી બધી જગ્યાએથી તેમને નકારમાં જવાબ મળ્યો. અંતે 2009માં તેમણે યુનિવર્સિટી ઓફ ઈલિનોઈસ, અર્બાના-ચેમ્પેનમાં ડૉક્ટરેટનો અભ્યાસ શરૂ કર્યો અને 2011માં યુનિવર્સિટી ઓફ મિશિગનમાં સ્થાનાંતરિત થયા.

આ અભ્યાસક્રમ દરમિયાન તેઓ તરત જ ઊભરતા સિતારા તરીકે ઉપસી આવ્યા. ઇલિનોઇસમાં પ્રારંભિક સ્નાતક વિદ્યાર્થી તરીકે તેમણે Graph Theoryનું 40 વર્ષથી સાબિત ન થયેલું Conjecture સાબિત કર્યું કે જે Read's Conjecture તરીકે ઓળખાય છે. આ Conjecture સાબિત કરવા માટે કાચો માલ કહી શકાય તેવું ગાણિતિક જ્ઞાન જૂનને હિરોનાકા સાથે ગાળેલા સમય દરમિયાન મળ્યું હતું.

તેમના આ ઉકેલે ગણિત સમુદાયને દંગ કરી દીધો અને તે સમયે મિશિગન યુનિવર્સિટી કે જેણે તેમની પ્રારંભિક અરજીને નકારી કાઢી હતી, તેણે તેમને ગ્રેજ્યુએટ પ્રોગ્રામમાં ભરતી આપી. 2014માં 31 વર્ષની ઉંમરે મિસિયો મુસ્તાતાના નિર્દેશનમાં લખાએલી થીસીસ સાથે તેમણે ડૉક્ટરલ અભ્યાસ પૂર્ણ કર્યો. તેમના Ph.D. થીસીસ માટે તેમને Summer Byron Myers Prize પણ એનાયત કરવામાં આવ્યું.

કરીમ અદિપ્રાસિતો અને એરિક કાત્ઝ સાથેના સંયુક્ત કાર્યમાં, તેમણે મેટ્રોઇડ્સના લાક્ષણિક બહુપદીના લોગ-કન્કેવિટી પર Heron-Rota-Wlsh Conjectireનું નિરાકરણ કર્યું.

2019માં તેમને New Horizons in Mathematics પ્રાઈઝ મળ્યું. 2017માં તેઓ યંગ સાયન્ટિસ્ટ્સ માટે બ્સવિટનિક એવોર્ડના વિજેતા બન્યા. તેઓ રિઓડી જાનેરોમાં 2018માં ગણિતશાસ્ત્રીઓની આંતરરાષ્ટ્રીય કોંગ્રેસમાં આમંત્રિત વક્તા પણ રહ્યા હતા. 2021માં તેમને ભૌતિકશાસ્ત્ર અને ગણિતશાસ્ત્રમાં અપાતાં Sumsung Ho-Am-Prize in Science પણ એનાયત થયો.

જૂનને 2022માં ફિલ્ડ્સ મેડલ એનાયત થયો. આ મેડલની અધિકૃત વેબસાઈટ મુજબ – 'June Huh is awarded the fields Medal for bringing the ideas of Hodge theory to combinatorics, the proof of the Dowling–Wilson conjecture for Geometric lattices, the proof of the Heron-Rota-Welsh conjecture for matroids, the development of the theory of Lorentzian polynomials, and the proof of the strong Mason conjecture.'

જૂન પૂર્વ એશિયા વંશના છઠ્ઠા ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા છે અને કોરિયન વંશના પ્રથમ. હાલમાં જૂન પ્રિન્સ્ટન યુનિવર્સિટીમાં ગણિતશાસ્ત્રી છે.

બાળપણમાં ગણિત ટાળવાથી માંડીને કવિતામાં હાથ અજમાવવા અને પછી ગણિતમાં રસ કેળવવો અને આજે જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી બનવા સુધીની જૂન હુહની સફર એ સાબિત કરે છે કે નાની ઉંમરે જીવનની સમજ મળી જાય તે જરૂરી નથી. કેટલીક વાર પ્રવાહ સાથે જવું પણ ઉપયોગી નીવડે છે.

**સંદર્ભ :**

1. en.wikipedia.org/wiki/june-Huh
2. quantamagazine.org/june-huh-high-school-dropout-wins-the-fields-medal-20220705/
3. Mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

# ગણિત બચાવો, ગણિત સમજાવો

ડૉ. પારસ દિ. ઉચાટ
ગાંધીનગર (M) 9824434459

થોડાં વર્ષો પહેલાં સરકારશ્રી દ્વારા એક ખાસ પ્રકારનું અભિયાન ચલાવવામાં આવ્યું હતું. "બેટી બચાવો, બેટી પઢાવો" આ અભિયાનનો હેતુ સમાજમાં દીકરીઓની સંખ્યા ઘટતી જતી અને સમાજમાં તેનું અવમૂલ્યન થતું રોકવા માટેનો હતો. જ્યારે જ્યારે સમાજમાં કોઈ બાબત રોકવા કે અવમૂલ્યન થતું રોકવાનું હોય ત્યારે આવા જ પ્રકારનું અભિયાન કરવાની જરૂર પડે છે. પ્રસ્તુત લેખમાં આવી જ કોઈ બાબત ઉજાગર કરવાનો પ્રયત્ન કરવામાં આવ્યો છે.

આજના સમયમાં સમાજમાં તેમજ વિદ્યાર્થીઓમાં 'ગણિત વિષય' પ્રત્યેનું ઉદાસીન વલણ ઉડીને આંખે વળગે તેવું છે. મોટા ભાગના કિસ્સાઓમાં કોઈપણ કક્ષાએ જો શિક્ષક દ્વારા વર્ગખંડમાં પૂછવામાં આવે કે તમારા ગમતા વિષયોની યાદી બનાવો તો માત્ર 15-20 % વિદ્યાર્થીઓના જવાબમાં ગણિત અગ્રતાક્રમે હોય છે. તે પણ વર્ગખંડના તેજસ્વી વિદ્યાર્થીઓ જ હોય. એટલે કે વર્ગખંડમાં બહુમતી ધરાવતા સામાન્ય કે નબળા વિદ્યાર્થીઓની પહેલી પસંદ ગણિત નથી.

આ માટેનાં કારણો ઘણાં છે અને એ દિશામાં નક્કર પગલાં પણ લેવાતાં હશે પરંતુ આ જ પરિસ્થિતિ કાયમ રહે તો પરિણામો ઘણાં ભયંકર આવી શકે.

હાલની શિક્ષણ વ્યવસ્થામાં વ્યવસ્થાતંત્ર દ્વારા ધોરણ-10માં માત્ર ગણિત વિષયના એક જ પાઠ્યક્રમ માટે વિદ્યાર્થીઓને બે વિકલ્પો આપવામાં આવે છે. Basic Mathematics અને Standard Mathematics. જાણીને નવાઈ લાગશે કે અન્ય બોર્ડમાં આવા વિકલ્પો નથી. બીજી તરફ ઉચ્ચ શિક્ષણની ઈજનેરી શાખાઓમાં પણ તેના વિવિધ સ્રોતોમાં ગણિતનો અભ્યાસક્રમ ઘટાડી દેવાયો છે.

જ્યારે આઈ.આઈ.ટી. કક્ષાની ઈજનેરી સંસ્થાઓમાં હજુ પણ ગણિતનું એટલું જ મહત્ત્વ છે. આથી જ ત્યાં B.Tech. (Mathematics and Computing) નામની વિદ્યા શાખાનો ઉદ્‌ભવ થયો છે.

આવી તો ઘણી બાબતો બની છે કે જેમાં લાગે કે ગણિત વિષયનું અવમૂલ્યન થતું હોય. અહીં, શિક્ષણ વ્યવસ્થાતંત્ર પાસે પ્રશ્નોના જવાબ માંગવા કરતાં, ગણિત શિક્ષક સમુદાય તરીકે આપણા માટે આ એક ગહન ચિંતનનો વિષય છે.

જેમ અન્ય લોકોના મનમાં એક વાત પ્રસ્થાપિત થઈ રહી છે કે સામાન્ય કે નબળા વિદ્યાર્થીઓ માટે ગણિત વિષય અઘરો છે તેવું જ જો આપણે સહુ ગણિત શિક્ષકો પણ માનવા લાગીશું તો પરિસ્થિતિ કદાચ વધારે અળખામણી બની શકે. ભવિષ્યમાં એવું બને કે આ વિષય, વૈકલ્પિક વિષય તરીકે ભણાવવો પડે ત્યારે અસ્તિત્વ જોખમમાં મુકાઈ શકે. આ બાબત આપણા માટે દસ્તક સમાન છે. આથી જ આ બાબતે આપણે સહુએ જાગૃતતા કેળવવી જોઈએ.

જાણીતા અમેરિકી શૈક્ષણિક મનોવૈજ્ઞાનિક બેન્જામિન બ્લૂમે 1968 માં Mastery Learningનો સિદ્ધાંત આપ્યો હતો. આ સિદ્ધાંત મુજબ વર્ગખંડનો પ્રત્યેક વિદ્યાર્થી વર્ગની કોઈપણ શૈક્ષણિક કસોટીમાં ઉચ્ચ સિદ્ધિ (90 % જેટલી) હાંસલ કરી શકે છે. તે સિદ્ધિ હાંસલ કરવા માટે જરૂરી માર્ગદર્શન, શીખવા માટેનો જરૂરી સમય અને યોગ્ય શૈક્ષણિક વાતાવરણ હોવું જોઈએ.

ઉપરોક્ત સંશોધનનાં તારણ મુજબ, વર્ગખંડને હોશિયાર કે નબળા વિદ્યાર્થીઓમાં વર્ગીકૃત કરવું વ્યાજબી નથી. પરંતુ ઝડપી શીખનાર અને ધીમા શીખનાર વિદ્યાર્થીઓમાં વર્ગીકૃત કરવું વધારે યોગ્ય છે. જેમાં તેની સિદ્ધિ પર કોઈ અસર થતી નથી.

(1) સમાજમાં કે વિદ્યાર્થીઓમાં પ્રસરેલું, વિષય પ્રત્યેનું, નકારાત્મક વલણ 'ગણિત એ અઘરો વિષય છે.' તેનાથી તેઓને બચાવવા જોઈએ. તો જ ગણિતનો બચાવ થશે.

(2) ગણિત વિષયનું શિક્ષણ એ અન્ય વિષયના શિક્ષણની માફક વર્ગખંડમાં માત્ર માહિતી આપવા પૂરતું સીમિત નથી. ગણિત વિષયવસ્તુનું સ્વરૂપ અન્ય વિષય કરતાં ઘણું જુદું છે. આથી આ વિષય શીખવા માટે વિદ્યાર્થીને અન્ય વિષય કરતાં વધારે સમય આપવો જોઈએ. આ વાત શિક્ષકે સમજી લેવી જોઈએ આ વિષયનાં વિવિધ કૌશલ્યોનો વિકાસ થાય તે માટે તેને 'આવડે તેવા અનુભવો' આપવા પડશે. તો જ તેને ગણિત સમજાશે.

હું આશા રાખું છું કે 'ગણિત બચાવો, ગણિત સમજાવો' અભિયાન થકી આપણે સહુ "ગણિતનું અવમૂલ્યન" જેવા ગંભીર પ્રશ્નનો ઉપાય કોઈના પર નિર્ભર રહ્યા વગર મેળવી શકીશું.

## સ્વરિત જોષી : તેજસ્વી તારલો

ગુજરાત ગણિત મંડળનું અધિવેશન 22 થી 24 નવેમ્બર દરમ્યાન સેંટ ઝેવિયર્સ કોલેજ અમદાવાદ ખાતે સંપન્ન થયું. આ અધિવેશનમાં ખૂબજ સરસ કાર્યક્રમો થયા. આ અધિવેશનમાં ધોરણ 9ના અમદાવાદની આનંદ નિકેતન હાઈસ્કુલના વિદ્યાર્થી સ્વરિત જોષીએ વિશેષ ધ્યાન ખેંચ્યું. તેના પપ્પા આશિષભાઈ જોષી કડી ખાતે અંગ્રેજીના શિક્ષક છે તેમજ તેની મમ્મી એલ.ડી. એન્જિનીયરિંગ કોલેજ ખાતે પ્રાધ્યાપિકા છે.

એ.કે. વિરાણી ગણિત સ્પર્ધામાં શાળા અને કોલેજના સર્વ ડેલિકેટસ ભાગ લે છે. 50 ગુણની સ્પર્ધા હોય છે. આ સ્પર્ધામાં સ્વરિત 43 ગુણ મેળવી સ્પર્ધામાં વિજેતા બન્યો હતો.

પ્રશ્ન સંધ્યા ગણિત અધિવેશનનો લોકપ્રિય કાર્યક્રમ છે જેમાં પ્રથમ દિવસે ડેલિકેટસને 10 પ્રશ્નો આપી દેવામાં આવે છે. બીજા દિવસે આ કાર્યક્રમ હોય છે. તેમાં ઉપસ્થિત ડેલિકેટસ પાસેથી ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે. આ પ્રશ્ન સંધ્યા કાર્યક્રમમાં સ્વરિત જોષીએ દસ માંથી 5 જેટલા પ્રશ્નોના ઉકેલ આપ્યા હતા. ધોરણ 9માં અભ્યાસ કરતો આ કિશોર ધોરણ 12 તેમજ કોલેજ કક્ષાના ગણિતનું જ્ઞાન ધરાવે છે. ઇન્ડિયન નેશનલ મેથેમેટિક્સ ઓલિમ્પિયાડમાં ગુજરાત તરફથી પસંદગી થવાની તેની શક્યતા છે. તાજેતરમાં સ્વામિનારાયણ ગુરુકુળ, વેડ રોડ, સુરત મુકામે યોજાયેલ વિજ્ઞાન વિદ્યાર્થી મંથન ના સ્ટેટ લેવલના કેમ્પમાં ભાગ લેવા આવેલ ત્યારે તેની વિશેષ મુલાકાત થયેલી. 1996 થી ગુજરાત ગણિત મંડળના અધિવેશનમાં ભાગ લેવાનું થયું છે. શરૂઆતના વર્ષોમાં વિશાલ જોષી તેમજ ગૌરવ પિત્રોડા અધિવેશનમાં ભાગ લેતા અને પ્રશ્ન સંધ્યાના પ્રશ્નોના જવાબ આપતા તે સ્વાભાવિક યાદ આવી ગયું. વિશાલ જોષી પી.આર.એલ.માં સાયંટિસ્ટ છે તેમજ ગૌરવ પિત્રોડા લંડનમાં રિસર્ચ સાયંટિસ્ટ છે.

રામાનુજન માટે કહેવાતું, "નીચેના ધોરણમાં હોવા છતાં ઉચ્ચ ધોરણનું ગણિત સમજતા" સ્વરિતને જોઈ રામાનુજનની યાદ આવી ગઈ.

**પ્રેષક : કલ્પેશ અખાણી**

**પ્રિન્સિપાલ : વિવેકાનંદ વિદ્યાલય, વડનગર**

# રાજેશકુમાર મેરના કોયડાનો ઉકેલ

પી. કે. વ્યાસ

(M) 98255 77784 Email : vyaspk123@gmail.com

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 311 (E Copy 6) ના 35 નંબરના પાના પર રાજેશકુમાર મેરનો એક કોયડો છપાયેલો છે. રાજેશભાઈએ આ કોયડાનો ઉકેલ પણ અમોને તાજેતરમાં મોકલ્યો છે. આ ઉકેલ થોડાક ફેરફાર સાથે અત્રે રજુ કર્યો છે.

**કોયડો :** પાંચ ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકોના વર્ગોના સરવાળાને બીજી કોઇ પાંચ ક્રમિક ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાથી ભાગતાં 2 મળે એવાં અસંખ્ય ઉદાહરણો છે. આ ઉદાહરણો શોધવા માટે વ્યાપક સૂત્ર અને તેનો ઉકેલ મેળવો.

રાજેશભાઈએ આવાં પાંચ ઉદાહરણો આપ્યાં છે. આમાનું એક ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$$\frac{56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2}{39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2} = 2$$

પાંચમાંનું છેલ્લું ઉદાહરણ એવું છે કે જેની ડાબી બાજુએ અંશ અને છેદમાં 13 આંકડાઓની પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો છે. (જીજ્ઞાસુ વાચકોએ સુગણિતમ્‌ની E Copy 6 જોઈ જવી)

ઉપર આપેલી વિગતો પ્રમાણે પ્રશ્નનું વ્યાપક સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$\frac{(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2}{(y-2)^2 + (y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 + (y+2)^2} = 2$$

આપણે ઉપરના સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ શોધવાનો છે. દેખીતી રીતે જ $x$ અને $y$ ની કિંમત 3 કે તેથી મોટી મળવી જોઈએ. સમીકરણને સાદું રૂપ આપતાં, $\frac{5x^2+10}{5y^2+10} = 2$ મળશે. $\therefore \frac{x^2+2}{y^2+2} = 2$

$\therefore x^2 + 2 = 2y^2 + 4$ $\quad\quad \therefore x^2 - 2y^2 = 2$ .............. (1)

(A) પેલ સમીકરણ (Pell's Equation) : $x^2 - dy^2 = 1$ નો એક ઉકેલ $(x_1, y_1)$ હોય તો આ સમીકરણના અનેક ધન પૂર્ણાંક ઉકેલો $(x_n, y_n)$ એ $x_n + \sqrt{d}\, y_n = \left(x_1 + \sqrt{d}\, y_1\right)^n, n \in N$ .............. (2)

પરથી મળે જ્યાં $d$ ધનપૂર્ણાંક છે અને પૂર્ણવર્ગ નથી. અહીં $(x_1, y_1)$ એ પ્રયત્ન અને ભૂલથી મેળવેલો એક પ્રાથમિક ઉકેલ છે. d=2 લેતાં $x^2 - 2y^2 = 1$ મળે છે. $x^2 - 2y^2 = 1$ નો એક પ્રાથમિક ઉકેલ $(x_1, y_1) = (3,2)$ મળે છે. કારણ કે $3^2 - 2(2)^2 = 9 - 8 = 1$

$\therefore x^2 - 2y^2 = 1$ ના તમામ ધનપૂર્ણાંક ઉકેલો, (2) પરથી,

$x_n + \sqrt{2}\, y_n = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n, n \in N$ .............. (3)

$n$=1 લેતાં $(x_1, y_1) = (3,2)$ મળે છે તે નોંધો.

(B) પેલ (Pell) નું વ્યાપક સમીકરણ : $x^2 - dy^2 = p$ છે, જ્યાં $p$ પૂર્ણાંક છે. આપણે (1) માં મેળવેલું સમીકરણ આ પ્રકારનું છે જેમાં $d$=2 અને $p$=2.

આ સમીકરણના તમામ ધન પૂર્ણાંક ઉકેલો શોધવા માટે પણ આપણે એક પ્રારંભિક ઉકેલ તો શોધવો જ પડે. ધારો કે આ પ્રારંભિક ઉકેલ $(a, b)$ છે. $x^2 - 2y^2 = 2$ માં $x$=2 અને $y$=1 મૂકતાં $2^2 - 2(1)^2 = 4 - 2 = 2$. આમ આ સમીકરણના પ્રારંભિક ઉકેલ તરીકે આપણે $(a,b) = (2,1)$ લઈએ.

(C) પેલના વ્યાપક સમીકરણ $x^2 - dy^2 = p$ ના $\delta$ પૂર્ણાંક ઉકેલો $(X_n, Y_n)$ આપણને નીચેનાં સમીકરણ પરથી મળશે.

$X_n + \sqrt{d}\, Y_n = \left(x_1 + \sqrt{d}\, y_1\right)^n \cdot (a + \sqrt{d} \cdot b)$

આપેલાં સમીકરણ (1) : $x^2 - 2y^2 = 2$ ના પૂર્ણાંક ઉકેલો $(X_n, Y_n)$ એ નીચેના સમીકરણ પરથી મળે.

$$X_n + \sqrt{2}\, Y_n = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \qquad \text{..............} \ (4)$$

સમીકરણ (4) એ આપણું Master Equation છે.

$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n, n \in N$ થી આપણને $x^2 - 2y^2 = 1$ ના ઉકેલો મળે છે. આવા દરેક ઉકેલને $2 + \sqrt{2}$ વડે ગુણતાં આપણને $x^2 - 2y^2 = 2$ ના ઉકેલો મળશે. અહીં $(a,b) = (2,1)$ એ $x^2 - 2y^2 = 2$ નો પ્રારંભિક ઉકેલ છે.

હવે, $n$ની જુદી જુદી ધનપૂર્ણાંક કિંમતો સમીકરણ (4) માં મૂકી આપણે $(X_n, Y_n)$ ની કિંમતો મેળવીએ.

**1.** $n$=1 માટે $X_1 + \sqrt{2}\, Y_1 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^1 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = 10 + 7\sqrt{2}$

$\therefore X_1 = 10,\ Y_1 = 7$

અનુરૂપ ઉદાહરણ : $\dfrac{8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2}{5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2} = \dfrac{510}{255} = 2$

**2.** $n$=2 માટે $X_2 + \sqrt{2}\, Y_2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 \left(2 + \sqrt{2}\right)$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(10 + 7\sqrt{2}\right) = 58 + 41\sqrt{2}$$

$\therefore X_2 = 58,\ Y_2 = 41$

અનુરૂપ ઉદાહરણ : $\dfrac{56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2}{39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2} = 2$

તાળો મેળવવા માટે ઉપરનાં પાંચ પૂર્ણવર્ગોનો સરાવાળા ન કરો. પણ $\dfrac{X^2+2}{Y^2+2} = 2$ થાય છે તે ચકાસો.

$\dfrac{58^2+2}{41^2+2} = \dfrac{3366}{1683} = 2$

**3.** $n$=3 માટે $X_3 + \sqrt{2}\, Y_3 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 \left(2 + \sqrt{2}\right)$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(58 + 41\sqrt{2}\right) = \left(338 + 239\sqrt{2}\right)$$

$\therefore X_3 = 338,\ Y_3 = 239$

અનુરૂપ ઉદાહરણ વાચકો જાતે લખી શકે તેમ છે. રાજેશકુમાર મેરે આપેલાં ઉદાહરણો પૈકીનું એક આ પણ છે. આપણે તાળો મેળવીએ

$$\frac{X_3^2+2}{Y_3^2+2} = \frac{338^2+2}{(239)^2+2} = \frac{3880902}{1940451} = 2$$

**4.** $n$=4 માટે $X_4 + \sqrt{2}\, Y_4 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^4 \left(2 + \sqrt{2}\right)$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(338 + 239\sqrt{2}\right) = 1970 + 1393\sqrt{2}$$

$\therefore X_4 = 1970,\ Y_4 = 1393$

ઉદાહરણ વાચકો જાતે લખે.

તાળો : $\dfrac{X_4^2+2}{Y_4+2} = \dfrac{1970^2+2}{1393^2+2} = \dfrac{3880902}{1940451} = 2$

હજુ તો આપણે $(X_4,Y_4)$ ચાર અંકોની સંખ્યા સુધી પહોંચ્યા છીએ. રાજેશભાઈ તો $X_i$ અને $Y_i$ 13 અંકોની સંખ્યાઓ સુધી પહોંચ્યા છે. વાચકો ધીરજ, ખંત અને સ્વસ્થતાથી આજ રીતે આગળ વધે તો 50 અંકોની પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળાને બીજી 50 અંકોની પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળા વડે ભાગતાં 2 મળે તેવું ઉદાહરણ જરૂર શોધી શકે.

રાજેશભાઈએ લખેલો કોયડાનો ઉકેલ હાઈજેક કરી (અલબત્ત તેમની પરવાનગીથી) અમે અમારો ઉકેલ લખ્યો છે. અમે સંખ્યા ગણિત (Number Theory) અમારા અભ્યાસક્રમના ભાગરૂપે ક્યારેય શીખ્યા નથી. માત્ર રસ ખાતર થોડાં છબછબિયાં કર્યાં છે. નંબર થીયરીના નિષ્ણાત માણસો આપણી પાસે છે. તેઓ આ લેખ વિશે કાંઇક લખે તેવી અપેક્ષા છે.

રાજેશભાઈને તેમણે કરેલા પ્રયત્ન બદલ બિરદાવું છું. આ જ અંકમાં તેમણે આ જ પ્રકારના બીજા બે કોયડા રજૂ કર્યા છે. તે આવાં જ સમીકરણો ઉપર આધારિત છે. (અમે માત્ર નજર ફેરવી છે. ઊંડાણથી જોયું નથી.) અમે આગ્રહપૂર્વક વિનંતી કરીએ છીએ કે નંબર થિયરીની કોઈ જાણકાર વ્યક્તિ ઉકેલ આપે અને અમારા આ લેખમાં રહી ગયેલાં છીંડાં પૂરે.

છેલ્લે $x^2 - dy^2 = 1$ ના ઉકેલો $(x_n, y_n)$ માટે,

$x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n$, જ્યાં $(x_1, y_1)$ એક પ્રાથમિક ઉકેલ છે. આ વિધાન અત્રે સ્વીકારી લીધું છે. આની સાબિતી અને વધુ વિસ્તૃત માહિતી માટે David Burton ના પુસ્તક Elementary Number Theory ના પ્રકરણ 15 : Continued Fractions ના પાનાં 303 થી 352 નો ઊંડો અભ્યાસ કરવો પડે.

## રાજેશકુમાર મેરના કોયડા

(1) કોઈ 11 ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાને બીજી કોઈ 11 ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળા વડે ભાગતાં ભાગાકાર 11 મળે એવું કોઈ ઉદાહરણ મેળવો. (રાજેશભાઈએ એક ઉદાહરણ આપ્યું છે. તમામ 22 સંખ્યાઓ પાંચ અંકોની છે. અંશમાં $39695^2$ થી શરૂ થાય છે. છેદમાં $11965^2$ થી શરૂ થાય છે. વાચકો જાતે ઉદાહરણ લખે.)

(2) કોઈ 13 ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાને બીજી કોઈ 13 ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળા વડે ભાગતાં ભાગાકાર 9 મળે. (એક ઉદાહરણ રાજેશભાઈએ આપ્યું છે.)

(3) ઉપર (2) માં આપેલ ઉદાહરણમાં ભાગાકાર 25 મળે તેવું ઉદાહરણ આપો. (અહીં પણ એક ઉદાહરણ તેમણે આપેલ છે.)

**પ્રસ્તુતકર્તા :** આર.એમ.મેર, આદર્શ નિવાસી શાળા, કુમાર (અ.જા.), રાજકોટ
(M) 95379 27040 / 94282 63776

# ભૂમિતિનો એક રસપ્રદ કોયડો

દયારામભાઈ ઠક્કર
અમદાવાદ
(M) 98246 82852

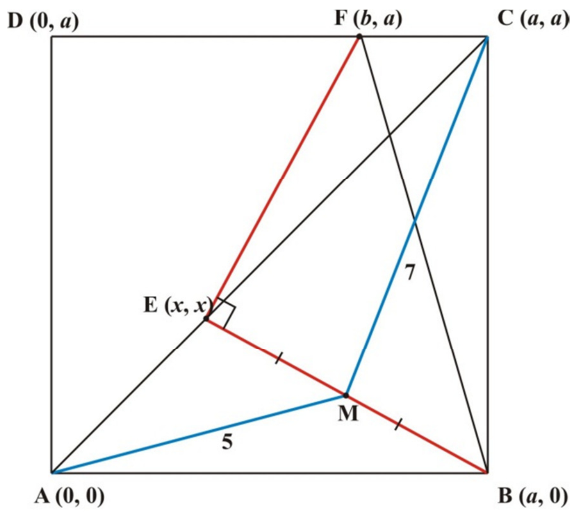
**(સંપાદકીય નોંધ :** આ કોયડો અમને પ્રા. સચિન ગજ્જર દ્વારા સપ્ટેમ્બર માસમાં મળેલો. કોઈક કારણસર ઓક્ટોબર માસના સુગણિતમ્‌ના અંકમાં ન લઈ શકાયો. દયારામભાઈ, સુરેશ ઠાકર, જે.એચ. ભટ્ટ, ઋષિક ધારૈયા, સચિન ગજ્જર અને બીજા ઘણાં ગણિત રસિકો $AG^2M$ ગ્રુપમાં સક્રિય છે. આ ગ્રુપની ખાસિયત એ છે કે ગણિત અને માત્ર ગણિતને જ લગતા પ્રશ્નો અને તેના ઉકેલની ચર્ચાઓ જ ગ્રુપમાં રજુ કરવામાં આવે છે. આ પ્રથા સ્વ. પ્રા. અરુણભાઈ વૈદ્ય સાહેબે શરૂ કરી અને આગ્રહપૂર્વક જાળવી રાખી. તેમના અવસાન પછી પણ આ પ્રથા જળવાઈ રહી છે. અમે અમારી મર્યાદાઓને કારણે તે ગ્રુપમાં (કે બીજા કોઈ ગ્રુપમાં) સક્રિય નથી. પ્રશ્ન પ્રત્યે અમારુ ધ્યાન દોરવા અને કોપી અમારા વ્યક્તિગત નંબર પર Whatsapp થી મોકલવા બદલ અમે પ્રા. સચીનનો આભાર વ્યક્ત કરીએ છીએ)

**કોયડો :** ABCD ચોરસ છે. રેખાખંડ AC અને CD પર અનુક્રમે બિંદુઓ E અને F એવી રીતે લેવામાં આવ્યાં છે કે જેથી $\Delta$BEF સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ બને અને $\angle$E કાટખૂણો હોય. M, BEનું મધ્યબિંદુ છે. જો MA=5, MC=7 તો ચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું છે.

આપણે AB=BC =CD= DA= $a$ લઈએ. A ઉગમબિંદુ અને AB તથા ADને અનુક્રમે X-અક્ષ તથા Y-અક્ષ લઈએ, તો A(0,0), B($a$,0), C ($a$,$a$), D (o,$a$) થશે. DF = $b$ લઈએ તો F ($b$, $a$) થશે.

રેખા AC ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે અને $\angle$CAB નું માપ $45^o$ છે.

તેથી AC પરનાં તમામ બિંદુઓના બન્ને યામ સમાન થશે.




$\therefore$ E $(x, x)$ લઈએ.

BE = EF $\quad\therefore\quad$ $BE^2 = EF^2$

$\therefore (x-a)^2 + x^2 = (x-b)^2 + (x-a)^2$

$\therefore (x-b)^2 = x^2 \qquad \therefore x-b = \pm x$

$x-b = x$ શક્ય નથી. $(b \neq 0)$ $\therefore x - b = -x \therefore x = \frac{b}{2}$

આમ, E = E $(x, x)$ = E $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$

M એ EBનું મધ્યબિંદુ છે.

Mનાં યામ $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + a\right), \frac{b}{4}\right) = \left(\frac{b+2a}{4}, \frac{b}{4}\right)$

$AM^2 = 25 \therefore \left(\frac{b+2a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2 = 25$

સાદું રૂપ આપતાં, $b^2 + 2a^2 + 2ab = 200$ ..................... (1)

$\mathrm{CM}^2 = 49 \therefore \left(\frac{b+2a}{4} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{4} - a\right)^2$

સાદું રૂપ આપતાં, $b^2 + 10a^2 - 6ab = 392$ ..................... (2)

સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણી (2)માં ઉમેરતાં

$3\,(b^2 + 2a^2 + 2ab) + b^2 + 10\,a^2 - 6ab = 600 + 392$

$\therefore 4b^2 + 16a^2 = 992 \qquad \therefore b^2 + 4a^2 = 248$

$\therefore b^2 = 248 - 4a^2 = 4\,(62 - a^2) \qquad \therefore b = 2\sqrt{62 - a^2}$ ..................... (3)

સમીકરણ (1) અને (3) માંથી $b$નો લોપ કરતાં

$248 - 4a^2 + 2a^2 + 2a\left(2\sqrt{62 - a^2}\right) = 200$

$4a\sqrt{62 - a^2} = 2a^2 - 48 \qquad \therefore 2a\sqrt{62 - a^2} = a^2 - 24$

$\therefore 4a^2\,(62 - a^2) = a^4 - 48a^2 + 576$

$\therefore 248a^2 - 4a^4 = a^4 - 48a^2 + 576$

$\therefore 5a^4 - 296a^2 + 576 = 0$

આ $a^2$નું દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

$$\therefore a^2 = \frac{296 \pm \sqrt{(296)^2 - 20\,(576)}}{10}$$

$$\therefore a^2 = \frac{296 \pm \sqrt{76096}}{10}$$

$$= \frac{296 \pm \sqrt{64 \times 1189}}{10} = \frac{296 \pm 8\sqrt{1189}}{10}$$

$$= \frac{148 \pm 4\sqrt{1189}}{5}$$

આમ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ : $a^2 = \frac{148 + 4\sqrt{1189}}{5}$, કારણ કે $a^2 = \frac{148 - 4\sqrt{1189}}{5} < 4$ એટલે કે

ચોરસની બાજુનું માપ $< 2$ છે.

2×2 માપના ચોરસના અંદરના ભાગમાં આવેલા કોઈ બિંદુ Mનું Aથી અંતર 5 અને C થી અંતર 7 શક્ય નથી.

(**નોંધ :** અહીં દયારામભાઈએ પક્ષમાં આપેલા વિધાન, "∠BEF કાટખૂણો છે" નો ઉપયોગ કર્યો નથી. અમને લાગે છે કે આ વિધાન આપવાની જરૂર પણ નથી. AC પરના કોઈપણ બિંદુ E માટે જો EB=EF થાય તો ∠BEF કાટખૂણો થાય તેવું સાબિત કરી શકાય?)

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

# અંકો અને અક્ષરોની જુગલબંધી

પી. કે. વ્યાસ (M) 9825577784
નિલેશ માંડલીયા (M) 9712346664

અંકો અને અક્ષરોની જુગલબંધીના પ્રથમ લેખમાં જે પ્રક્રિયા આપણે કરતા હતા તે પ્રક્રિયા ટૂંકમાં જણાવી દઈએ. જે સંખ્યાઓ આપણે લખવાના છીએ તે તમાન ધન પૂર્ણાંકો હશે. સંખ્યાઓને તેમના અંગ્રેજી નામ (English Spelling) માં તબદીલ કરીશું. ત્યારબાદ આ નામમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યામાં તબદીલ કરીશું. જેમ કે 25 ને બદલે લખીશું twenty five અને તેમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યા 10 છે. તેથી twenty five ના બદલે 10 મુકીશું. જાદુઈ ચોરસ નામથી તો ગણિત રસિકો પરિચિત હોય જ. અહીં આપણે $3 \times 3$ કક્ષાના જાદુઈ ચોરસથી શરૂઆત કરીએ. નીચે એક $3 \times 3$ કક્ષાનો ચોરસ આપેલો છે.

| | | |
|---|---|---|
| 25 | 2 | 18 |
| 8 | 15 | 22 |
| 12 | 28 | 5 |

આ ચોરસની ત્રણ પંક્તિ, ત્રણ સ્તંભ અને બે વિકર્ણો પૈકી દરેકમાં આવતી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો એક સરખો 45 મળે છે. આ હકીકત વાચકો જાતે ચકાસે. આમ આ ચોરસ એ જાદુઈ ચોરસ છે અને તેનો જાદુઈ સરવાળો (જાદુઈ અચળાંક) 45 છે.

હવે બાજુના ચોરસમાં દરેક સંખ્યાને અંગ્રેજી શબ્દોમાં લખીએ અને જે તે ખાનામાં મૂકીએ.

| | | |
|---|---|---|
| Twenty five | Two | Eighteen |
| Eight | Fifteen | Twenty two |
| Twelve | Twenty eight | Five |

હવે દરેક અંગ્રેજી શબ્દને તે શબ્દમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યા સ્વરૂપે લખી ચોરસ નવેસરથી લખીએ. આમ આ ચોરસ નીચે મુજબ મળશે.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 3 | 8 |
| 5 | 7 | 9 |
| 6 | 11 | 4 |

અહીં આશ્ચર્ય એ છે કે આ નવો ચોરસ પણ જાદુઈ ચોરસ છે અને તેનો જાદુઈ અચળાંક 21 છે. જાદુઈ ચોરસની તમામ નવ સંખ્યાઓ ભિન્ન હોવી જોઈએ જુઓ કે આ ચોરસમાં 3 થી 11 સુધીની નવ ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ થયો છે.

નીચે આવો જ એક $4 \times 4$ કક્ષાનો જાદુઈ ચોરસ આપ્યો છે. પ્રક્રિયા એની એ જ છે. મૂળ ચોરસ, અંગ્રેજી શબ્દોમાં ચોરસ અને દરેક શબ્દમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યાથી બનતો ચોરસ આપ્યાં છે. આ પૈકી પહેલો અને ત્રીજો ચોરસ જ જાદુઈ ચોરસ છે અને તેમના જાદુઈ સરવાળા દરેક ચોરસની સામે લખ્યા છે.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 37 | 48 | 59 |
| 49 | 58 | 27 | 36 |
| 57 | 46 | 39 | 28 |
| 38 | 29 | 56 | 47 |

જાદુઈ સરવાળો : 170

હવે દરેક સંખ્યાને અંગ્રેજી સ્પેલિંગ પ્રમાણે લખીને નીચેનો ચોરસ બનાવેલ છે.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Twenty six | Thirty Seven | Forty Eight | Fifty nine |
| Forty nine | Fifty eight | Twenty seven | Thirty six |
| Fifty seven | Forty six | Thirty nine | Twenty eight |
| Thirty eight | Twenty nine | Fifty six | Forty seven |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 10 | 9 |
| 9 | 10 | 11 | 9 |
| 10 | 8 | 10 | 11 |
| 11 | 10 | 8 | 10 |

જાદુઈ સરવાળો : 39

હા, જાદુઈ ચોરસમાં બધા જ અંકો ભિન્ન હોવા જોઈએ એવો આપણો આગ્રહ હોય છે. પરંતુ ઉપર આપેલા ચોરસમાં એવું બનતું નથી. આ ચોરસમાં ચાર સંખ્યા (8, 9, 10 અને 11) નો જ ઉપયોગ થાય છે. એટલું ખરું કે દરેક પંક્તિ, દરેક સ્તંભ, અને દરેક વિકર્ણમાં આવતી ચાર સંખ્યાઓનો સરવાળો સમાન (39) આવે છે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

# ગણિતકણિકાનું વ્યાપક સ્વરૂપ

શ્રી રાજેશકુમાર મોહનલાલ મેર
આદર્શ નિવાસી શાળા - રાજકોટ
(M) 9428263776; jignasamer123@gmail.com

સુગણિતમ્ E Copy-6 (સળંગ અંક 311), ઓક્ટોબર-2023 ના પાના નંબર-5 પર પ્રા. એન.એન. રોઘેલિયાએ નીચે મુજબનાં પરિણામો આપ્યાં છે.

$$(1^2)\,[6\,(1) - 1] = 5\,(1^4)$$
$$(1^2 + 2^2)\,[6\,(1 + 2) - 1] = 5\,(1^4 + 2^4)$$
$$(1^2 + 2^2 + 3^2)\,[6\,(1 + 2 + 3) - 1] = 5\,(1^4 + 2^4 + 3^4)$$

.................................................................................

.................................................................................

આવાં પાંચ પરિણામો આપ્યાં પછી પ્રશ્ન કરેલ છે કે આવું ક્યાં સુધી શક્ય બને ? આ માટેનું કોઈ સામાન્ય સૂત્ર મળે ? આપણે અહીં ઉપરોક્ત બંને પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

હાયર સેકંડરીના વિદ્યાર્થીઓ નીચેના ત્રણ સરવાળાઓથી પરિચિત છે.

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$\sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, ઉપરાંત $\sum n^0 = \sum 1 = n$ પણ વિદ્યાર્થીઓ જાણે છે.

(અહીં $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ ના બદલે ટૂંકું સ્વરૂપ $\sum f(n)$ સરળતા ખાતર લખેલ છે. વિદ્યાર્થીઓ $\sum n$ થી વધુ પરિચિત છે, $\sum n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ )

પણ $\sum n^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ નું સૂત્ર શાળા કક્ષાના અભ્યાસક્રમમાં નથી.

આપણે એક વિધેય, $f(x) = x^5$, $x \in N \cup \{0\}$ વ્યાખ્યિયિત કરીએ. દેખીતી રીતે જ $f(0) = 0$ અને $f(n) = n^5$

હવે, $f(x) = x^5$ તેથી $f(x-1) = (x-1)^5$

$\therefore f(x-1) = x^5 - 5\,x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

$\therefore f(x) - f(x-1) = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$ ......... (A)

હવે, **(A)**માં $x$= 1, 2, 3, ......, $(n-1)$, $n$ મૂકતાં નીચેનાં પરિણામો મળશે.

$f(1) - f(0) = 5{\cdot}1^4 - 10{\cdot}1^3 + 10{\cdot}1^2 - 5{\cdot}1 + 1$

$f(2) - f(1) = 5{\cdot}2^4 - 10{\cdot}2^3 + 10{\cdot}2^2 - 5{\cdot}2 + 1$

$f(3) - f(2) = 5{\cdot}3^4 - 10{\cdot}3^3 + 10{\cdot}3^2 - 5{\cdot}3 + 1$

.....................................................................

.....................................................................

.....................................................................

$f(n-1) - f(n-2) = 5(n-1)^4 - 10(n-1)^3 + 10(n-1)^2 - 5\,(n-1) + 1$

$f(n) - f(n-1) = 5{\cdot}n^4 - 10{\cdot}n^3 + 10{\cdot}n^2 - 5n + 1$

ઉપરોક્ત $n$ પરિણામોનો સરવાળો કરતાં ડાબી બાજુનો સરવાળો $f(n) - f(0) = n^5 - 0 = n^5$ થશે.

જમણી બાજુનો સરવાળો : $5\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)$

$$- 10\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$$

$$+ 10\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$+ 5\,(1 + 2 + 3\ + \cdots + n)$$

$$+ (1 + 1 + 1\ + \cdots n \text{ વખત })$$

$$= 5\Sigma n^4 - 10\Sigma n^3 + 10\Sigma n^2 - 5\Sigma n + n$$

આમ,

$5\Sigma n^4 - 10\Sigma n^3 + 10\Sigma n^2 - 5\Sigma n + n = n^5$

$\therefore\ 5\Sigma n^4 = n^5 - n + 5\,\Sigma\,n + 10\Sigma n^3 - 10\Sigma n^2$ .................... **(B)**

[$5\Sigma n^4 = 5\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)$ ને ડાબી બાજુએ લીધાં છે. બાકીનાં બધાં પદો જમણી બાજુએ અનુકૂળતા મુજબ ગોઠવ્યાં છે કે જેથી સાદું રૂપ આપવામાં સરળતા થાય.]

$\Sigma n, \Sigma n^2, \Sigma n^3$ ની કિંમતો મૂકતાં પહેલાં આપણે પરિણામ B ને 6 વડે ગુણીએ

(શા માટે ?, $\Sigma n^2$ ના સૂત્રમાં છેદમાં 6 આવે છે.)

તેથી $30\Sigma n^4 = 6n^5 - 6n + 30\,\Sigma n + 60\,\Sigma n^3 - 60\,\Sigma n^2$

$$\therefore\ 30\,\Sigma n^4 = 6n\,(n^4-1) + \frac{30n\,(n+1)}{2} + \frac{60n^2\,(n+1)^2}{4} - \frac{60n\,(n+1)(2n+1)}{6}$$

$= 6n\,(n+1)\,(n-1)\,(n^2+1) + 15\,n\,(n+1) + 15\,n^2\,(n+1)^2 - 10n\,(n+1)\,(2n+1)]$

$= n\,(n+1)\,[\,(6n-6)\,(n^2+1) + 15 + 15\,n^2 + 15n - 10\,(2n+1)]$

$= n\,(n+1)\,[\,6n^3 - 6n^2 + 6n - 6 + 15 + 15n^2 + 15n - 20n - 10]$

$= n\,(n+1)\,[\,(6n^3 + 9n^2 + n - 1]$

$\therefore\ 30\,\Sigma n^4 = n\,(n+1)\,[6n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 3n - 2n - 1]$

$= n\,(n+1)\,[(2n+1)\,(3n^2 + 3n - 1)]$

$= n\,(n+1)\,[(2n+1)\,(3n\,(n+1) - 1)]$

હવે બન્ને બાજુએ 6 વડે ભાગતાં, $5\Sigma n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[\frac{6n\,(n+1)}{2} - 1\right]$

$\therefore\ 5\,\Sigma n^4 = [\Sigma n^2]\ \ [6\Sigma n - 1]$ .............. **(C)**

ઉપરોક્ત સૂત્ર **(C)** એ રોઘેલિયા સાહેબે માગેલ વ્યાપક સૂત્ર છે.

ઉપરોક્ત સરવાળા પાંચ પદ સુધી લઈએ તો

$5\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)\,[\,6\,(1{+}2{+}3{+}4{+}5{+}) - 1)$ મળે,

10 પદ સુધી સરવાળા લઈએ તો $5\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + 10^4)$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2)\,[\,6\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) - 1] \text{ મળે.}$$

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

# પુનશ્ચ "1089"

પી. કે. વ્યાસ
(M) 98255 77784, vyaspk123@gmail.com

સુગણિતમ્ E-આવૃત્તિ-5 નાં પ્રુફ વાચતાં અમારા મનમાં ઝબકારો થયો. પ્રા. દેવભદ્ર શાહ સાહેબે પ્રસ્તુત કરેલી "બ્લેક હોલ સંખ્યા" 1089 વિશે તો સુગણિતમ્‌ના જૂના અંકોમાં ઘણું બધું લખાયેલું છે. ગુજરાત ગણિત મંડળનાં ઘણાં બધાં અધિવેશનોમાં એક ગણિત ગમ્મત તરીકે આ સંખ્યાનો ઉલ્લેખ થયો છે. આ સંખ્યા ઉપર તો ઘણો વિસ્તૃત લેખ લખી શકાય તેમ છે.

અમે વિચાર કર્યો કે સુગણિતમ્‌ના જૂના અંકો ફંફોળી, 1089 વિશેનાં તમામ લખાણો વાંચી જઈ, આ સંખ્યા વિશે હવે પછીના અંકમાં લેખ લખીશું. અમે આવાં લખાણો એકત્ર પણ કર્યાં, પછી વાત ભૂલાઈ ગઈ, સુગણિતમ્ E-આવૃત્તિ-6 પ્રગટ પણ થઈ ગઈ.

ગુજરાત ગણિત મંડળના 60મા અધિવેશનના બીજા દિવસે તા.22-11-23નાં રોજ શાળા વિભાગના પ્રથમ સત્ર દરમિયાન અમે સત્રના અધ્યક્ષ હતા. સત્રના ત્રીજા વ્યાખ્યાનના વક્તા હતા શ્રી કલ્પેશ અખાણી. વિષય હતો Mathemagic. તેમના વ્યાખ્યાનમાં રજૂ થયેલી ગણિત ગમ્મતો પૈકી છેલ્લી ગણિત ગમ્મત એવી હતી જેમાં ત્રણ અંકોની ચોક્કસ રીતે પસંદ કરેલી સંખ્યા પર એક પ્રક્રિયા કરતાં અંતિમ પરિણામ 1089 મળતું હતું. (પેલા બુઝાઈ ગયેલા અંગારા પર જાણે કોઈએ ફૂંક મારી.) ત્યાં તો શ્રોતાગણમાંથી પ્રા. સચીન ગજ્જર ઊભા થયા. તેમણે કહ્યું, "સાહેબ, હું આ ગણિત ગમ્મતની એક સરળ સાબિતી રજૂ કરવા માંગું છું." મે એમને સાબિતી આપવાની ના પાડી. કેમ ?

વર્ષ 2019, સ્થળ જામનગર, ગુજરાત ગણિત મંડળનું 56મું અધિવેશન. શાળા વિભાગના એક વ્યાખ્યાનમાં વક્તાએ આ જ ગણિત ગમ્મત રજૂ કરી હતી. વ્યાખ્યાનના અંતે અધ્યક્ષ પ્રા. સચીન ગજ્જરે તેની સાબિતી પણ રજૂ કરી હતી. YouTube પર પ્રણામી ચેનલે આ સમગ્ર અધિવેશનના કાર્યક્રમોનું પ્રસારણ પણ કરેલું. અમે અધિવેશનમાં હાજર નહોતા.

ગુજરાત ગણિત મંડળના એક સક્રિય કાર્યકર અને સુગણિતમ્‌ના ઘણા જૂના લેખકો પૈકીના એક એવા, વડોદરાના શ્રી જે.એચ. ભટ્ટ સાહેબે આ પ્રસારણ જોયું હતું. તેમણે તુરત જ સુગણિતમ્ માટે એક લેખ લખી નાખ્યો. આ લેખ સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 304માં પ્રગટ થયો. લેખનું શીર્ષક હતું, '1089 અને વિશેષ....' ઉપરોક્ત સમગ્ર લેખ વાંચવા જેવો છે. લેખની શરૂઆતમાં તેઓ લખે છે,

"1089 પ્રત્યે મને એવું આકર્ષણ છે કે મેં મારા E-mail Addressમાં આ સંખ્યાનો સમાવેશ કર્યો છે."

અમારો આ લેખ શ્રી ભટ્ટ સાહેબના ઉપરોક્ત લેખના આધારે લખાયો છે. તેથી જ અમે લેખના ટાઈટલમાં એક વાક્ય - 'સુગણિતમ્‌માંથી વીણેલાં મોતી' – ઉમેર્યું છે.

અમારા આ લેખની પ્રસ્તાવના થોડી લાંબી થઈ ગઈ છે. પણ શું કરીએ ? ભૂતકાળને વાગોળ્યા વિના રહેવાતું નથી. "માણ્યું તેનું જતન કરવું" એ પણ એક સુખદ લહાવો છે.

હવે લેખની શરૂઆત કરીએ. તે પણ સુગણિતમ્‌ના વર્ષ 1990ના જાન્યુઆરી-ફેબ્રુઆરી માસમાં પ્રગટ થયેલા અંકની ગણિત નોંધપોથીમાંના એક નાના લખાણથી. "1989ને વિદાય" એ શીર્ષક હેઠળ લેખકે જુદી જુદી તેર રીતે 1989ને વિદાય આપી છે. તે પૈકીની તેરમી રીત નીચે પુનર્મુદ્રિત કરીએ છીએ.

**પ્રક્રિયા :**

(1) ત્રણ અંકોની એક સંખ્યા ધારો **જેનો એકમનો અંક અને શતકનો અંક સમાન ન હોય.**

(2) ત્રણ અંકોની (1) મુજબ ધારેલી સંખ્યાને ઊલટા ક્રમમાં લખો.

(3) ઉપરનાં પગથિયાં (1) અને (2) માં મળતી સંખ્યાનો ધન તફાવત લઈ ત્રીજી ત્રણ અંકની સંખ્યા લખો.

(આમ કરતાં બે અંકોની સંખ્યા 99 મળે તો તેને 099 લખી ત્રણ અંકની સંખ્યા ગણો.)

(4) પગથિયાં (3) થી મળેલી સંખ્યાના અંકોને ઊલટાવી એક નવી ત્રણ અંકોની સંખ્યા રચો.

(5) પગથિયાં (3) અને (4) માં મળેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

(6) પગથિયાં (5)માં મળેલ સંખ્યામાં 900 ઉમેરો.

ઉપરોક્ત પ્રક્રિયાનાં છ પગથિયાંને અંતે મળતી સંખ્યા 1989 હતી. અહીં દર્શાવેલી પ્રક્રિયાનું પગથિયું (6) આપણા માટે ઉપયોગી નથી.

આ નોંધપોથીના લેખક હતા શ્રી જે. એચ. ભટ્ટ. આ લખાણ લખાયાંને આજે 34 વર્ષ થવા આવ્યાં. છેલ્લે પગથિયે 900 ઉમેરવાનો હેતુ એ હતો કે પાંચ પગથિયાં પછી મળતી સંખ્યા 1089 માં 900 ઉમેરી 1989 ને વિદાય આપી શકાય. ઉપરોક્ત પ્રક્રિયાનાં પહેલાં પાંચ પગથિયાં જ આપણા માટે ઉપયોગી છે. હવે પછીના લખાણમાં પ્રક્રિયા એટલે ઉપર લખેલાં પહેલાં પાંચ પગથિયાં સુધી વર્ણવેલી પ્રક્રિયા. આ પ્રક્રિયા કર્યા પછી મળતી સંખ્યા 1089ને આપણે અચળાંક તરીકે ઓળખીશું. (પ્રા. ડી.વી. શાહે આ સંખ્યાને Blackhole તરીકે વર્ણવી છે)

જેનો પહેલો અને છેલ્લો અંક સમાન ન હોય તેવી ત્રણ અંકોની સંખ્યા ઉપર ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા કરતાં 1089 મળે છે. તેની શુધ્ધ ગાણિતિક સાબિતી શાહ સાહેબે બ્લેકહોલ સંખ્યાના લેખમાં આપી છે. પ્રા. સચીન ગજ્જરે પાંચમા ધોરણમાં ભણતો વિદ્યાર્થી પણ સમજી શકે તેવી સરળ સાબિતી જામનગર અધિવેશનમાં આપી હતી. આ લેખમાં આવી કોઈ સાબિતી આપવાનો અમારો ઇરાદો નથી.

**સંખ્યાલેખન પધ્ધતિ :** આપણે સામાન્ય વ્યવહારમાં જે સંખ્યાલેખન પધ્ધતિનો ઉપયોગ કરીએ છીએ તે દશાંકી પધ્ધતિ છે. 3754 એ $3\times1000 + 7\times100 + 5\times10 + 4$ છે. દરેક સ્થાનને તેની કિંમત છે. જમણી બાજુથી ગણતાં પ્રથમ સ્થાનની કિંમત 1, બીજા સ્થાનની કિંમત 10, ત્રીજા સ્થાનની કિંમત 100 એમ જમણેથી ડાબે જતાં સ્થાન કિંમત 10 ગણી વધે છે. આ પધ્ધતિમાં આપણે 0, 1, 2, 3, …, 9 એમ દશ અંકો વાપરીએ છીએ. 9+1 = દશ. પણ દશ લખવા માટે આપણી પાસે કોઈ નવો સંકેત નથી. તેથી જે તે સ્થાનમાં સરવાળો 0 લખી તે સ્થાનની ડાબી બાજુએ વદ્દી 1 ઉમેરીએ છીએ. આમ 9 + 1 =10. આ પધ્ધતિથી આપણે ટેવાયેલા છીએ. તેથી તે વિશે વધારે લખતું નથી. આ સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં 10ને આપણે સંખ્યાલેખન પધ્ધતિનો પાયો અથવા આધાર (Base) કહીએ છીએ.

સંખ્યાલેખન પધ્ધતિનો આધાર બદલીએ તો ? અમે માની લઈએ છીએ કે જુદા જુદા આધાર (Base) પર લખાયેલી સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર વાચકો જાણતા હશે. (આવું માની લેવામાં જોખમ છે.) ન જાણતા હો તો સહેલાઈથી શીખી શકાય તેમ છે.

**(A) દ્વિઅંકી સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં અચળાંક :**

દ્વિઅંકી પધ્ધતિનો આધાર 2 છે. આ પધ્ધતિમાં માત્ર બે જ અંકો 0 અને 1 નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. જેમ દશાંકી પધ્ધતિમાં 9 + 1 =10, તેમ દ્વિઅંકી પધ્ધતિમાં $1 + 1 = (10)_2$ (કારણ બે લખવા માટેનો કોઈ સંકેત આપણી પાસે નથી.) હવે આપણે અહીં જુદીજુદી સંખ્યા લેખન પધ્ધતિમાં સંખ્યાઓ લખવાના છીએ. તેથી કયા આધાર-Base પર સંખ્યા લખી છે તે દર્શાવવું જરૂરી છે. આ માટે સંખ્યાને આપણે કૌંસમાં લખીશું અને કૌંસની બહાર લેખન પધ્ધતિનો આધાર લખીશું. જેમ કે દ્વિઅંકી-Binary લેખન પધ્ધતિમાં $(110)_2$, લખીશું. આ $(110)_2$ ને દશાંકી પધ્ધતિમાં રૂપાંતરીત કરતાં $2^2 + 2^1 + 0 = 6$ મળે. દ્વિઅંકી સંખ્યા પધ્ધતિમાં ત્રણ અંકોની નાનામાં નાની સંખ્યા $(000)_2$ છે. હવે એક એક ઉમેરતા જઈએ તો નીચેની આઠ સંખ્યાઓ લખી શકાય. $(000)_2$, $(001)_2$, $(010)_2$, $(011)_2$, $(100)_2$, $(101)_2$, $(110)_2$, $(111)_2$

**બીજી એક વાત :** હવે આપણે સંખ્યા બોલતી વખતે એકમ, દશક, સો, હજાર, … વગેરે શબ્દો નહીં વાપરીએ. દશાંકી પધ્ધતિમાં આ શબ્દો સાર્થક છે પણ દશાંકી સિવાયની પધ્ધતિમાં આ શબ્દો અર્થહીન છે.

જેમ $(321)_{10} = 3\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 1\cdot10^0 = 300 + 20 + 1$

તેમ $(111)_2 = 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 =$ ચાર + બે + એક $= (7)_{10}$ છે. ઉપર જે યાદી આપી છે તેમાં ચાર સંખ્યાઓ એવી છે કે જેના પહેલાં અને છેલ્લાં સ્થાનોમાં રહેલા અંકો સમાન નથી. આ સંખ્યાઓ નીચે આપેલી છે.

$(001)_2$, $(011)_2$, $(100)_2$ અને $(110)_2$. ત્રણ ચક્રની કોઈ સંખ્યા ($abc$) અને તેના અંકોને ઊલટાવવાથી રચાતી સંખ્યા ($cba$)નો આપણે ધન તફાવત લેવાનો છે. તેથી ધારેલી સંખ્યામાં પહેલેથી જ $a > c$ લેવાથી વ્યાપકતાનો ભંગ થતો નથી. ઉપરની સંખ્યાઓ પૈકી બે સંખ્યાઓ પર આપણે વ્યાખ્યાયિત પ્રક્રિયા કરી છે.

**કોષ્ટક 1**

| પગથિયાંના ક્રમાંક | અનુરૂપ ક્રિયા | ઉદાહરણ (1) | ઉદાહરણ (2) |
|---|---|---|---|
| (1) | ત્રણ અંકની સંખ્યા ધારો જેમાં પહેલો અને છેલ્લો અંક સમાન ન હોય | 110 | 100 |
| (2) | (1) માં ધારેલી સંખ્યાના અંકો ઊલટાવતાં | 011 | 001 |
| (3) | (1) અને (2) નો ધન તફાવત લખતાં | 011 | 011 |
| (4) | (3) માં મળેલી સંખ્યાના અંકો ઊલટાવતાં | 110 | 110 |
| (5) | (3) અને (4) નો સરવાળો કરતાં | 1001 | 1001 |

આમ બન્ને ઉદાહરમોમાં પ્રક્રિયાનો અચળાંક $(1001)_2$ મળે છે. $(1001)_2 = 1{\cdot}2^3 + 0{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 = (9)_{10}$

યાદ રહે કે $(1001)_2 = 1{\cdot}2^3 + 0 + 0 + 1{\cdot}2^1 = (9)_{10} = (3)_{10}^2 = (11)_2^2$

**(B) ત્રિઅંકી સંખ્યા લેખનની પધ્ધતિમાં પ્રક્રિયાનો અચળાંક :**

આ પધ્ધતિમાં આપણે ત્રણ અંકો – 0, 1, 2 – નો ઉપયોગ કરવાનો છે. 2 + 1 = ત્રણ, પણ ત્રણ દર્શાવતો સંકેત નથી. તેથી 2 +1 = 10. આ પધ્ધતિમાં નાનામાં નાની સંખ્યા $(000)_3$ છે અને મોટામાં મોટી સંખ્યા $(222)_3$ છે. આપણે અહીં પણ બે ઉદાહરણો લઈ અચળાંક મેળવીએ.

**કોષ્ટક 2**

| પગથિયાંના ક્રમાંક | અનુરૂપ ક્રિયા | ઉદાહરણ (1) | ઉદાહરણ (2) |
|---|---|---|---|
| (1) | ત્રણ અંકની સંખ્યા ધારો જેમાં પહેલો અને છેલ્લો અંક સમાન ન હોય | 211 | 220 |
| (2) | (1) માં ધારેલી સંખ્યાના અંકો ઊલટાવતાં | 112 | 022 |
| (3) | (1) અને (2) નો ધન તફાવત લખતાં | 022 | 121 |
| (4) | (3) માં મળેલી સંખ્યાના અંકો ઊલટાવતાં | 220 | 121 |
| (5) | (3) અને (4) નો સરવાળો કરતાં | 1012 | 1012 |

આમ ત્રિઅંકી સંખ્યા પધ્ધતિમાં મળતો અચળાંક $(1012)_3$ છે.

યાદ રહે કે $(1012)_3 = 1{\cdot}3^3 + 0{\cdot}3^2 + 1{\cdot}3^1 + 2{\cdot}3^0 = (32)_{10}$

**(C) પંચ અંકી સંખ્યા લેખન પધ્ધતિમાં પ્રક્રિયાનો અચળાંક**

હવે 4 આધાર (Base) થી રચાયેલી સંખ્યા લેખન પધ્ધતિને પડતી મૂકી આપણે 5 આધાર (base) પર રચાયેલી પધ્ધતિ લઈએ. અહીં આપણે પાંચ અંકો – 0, 1, 2, 3, 4 – નો ઉપયોગ કરવાનો છે. અહીં 4 + 1 = પાંચ = 10 થશે. મોટામાં મોટી સંખ્યા $(444)_5$ અને નાનામાં નાની સંખ્યા $(000)_5$ છે.

અહીં પણ ત્રણ અંકો ધરાવતી સંખ્યાનાં બે ઉદાહરણો લઈ પ્રક્રિયા કરીએ.

**કોષ્ટક 3**

| પગથિયાંના ક્રમાંક | અનુરૂપ ક્રિયા | ઉદાહરણ (1) | ઉદાહરણ (2) |
|---|---|---|---|
| (1) | ત્રણ અંકની સંખ્યા ધારો જેમાં પહેલો અને છેલ્લો અંક સમાન ન હોય | 423 | 441 |
| (2) | (1) માં ધારેલી સંખ્યાના અંકો ઊલટાવતાં | 324 | 144 |
| (3) | (1) અને (2) નો ધન તફાવત લખતાં | 044 | 242 |
| (4) | (3) માં મળેલી સંખ્યાના અંકો ઊલટાવતાં | 440 | 242 |
| (5) | (3) અને (4) નો સરવાળો કરતાં | 1034 | 1034 |

આમ 5 આધાર (Base) વાળી સંખ્યાઓ પર પ્રક્રિયા કરતાં અચળાંક $(1034)_5$ મળે છે.

$(1034)_5 = 1{\cdot}5^3 + 0{\cdot}5^2 + 3{\cdot}5^1 + 4{\cdot}5^0 = 125 + 15 + 4 = (144)_{10}$

અહીં આપણે દ્વિઅંકી, ત્રિઅંકી, પંચઅંકી (આધાર (Base) 2,3,5 સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં લખાયેલી) ત્રણ અંકોની સંખ્યા પર આગળ વ્યાખ્યાયિત કરેલી પ્રક્રિયા કરતાં મળતા અચળાંકો શોધ્યા. વાચકો આવી જ રીતે આગળ વધી અન્ય અધાર (Base) પર લખાયેલી સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં આ રીતે અચળાંકો શોધે તેવી અપેક્ષા છે. આધાર 2 થી 10 (દ્વિઅંકીથી દશાંકી) સંખ્યાલેખન પધ્ધતિમાં મળતા અચળાંકો નીચેના કોષ્ટક 4 માં આપેલા છે.

**કોષ્ટક-4**

| સંખ્યા લેખનનો આધાર (પાયો- Base) | અચળાંક | અચળાંકનું દશ અંકી પધ્ધતિમાં મૂલ્ય |
|---|---|---|
| 2 (દ્વિઅંક) | $1001 = (11)_2^2$ | $9 = 3^2$ |
| 3 (ત્રિઅંકી) | 1012 | 32 |
| 4 (ચતુષઅંકી) | 1023 | 72 |
| 5 (પંચ અંકી) | $1034 = (22)_5^2$ | $144 = 12^2$ |
| 6 (ષટ્ અંકી) | 1045 | 245 |
| 7 (સપ્ત અંકી) | 1056 | 384 |
| 8 (અષ્ટ અંકી) | 1067 | 567 |
| 9 (નવ અંકી) | 1078 | 800 |
| 10 (દશ અંકી અથવા દશાંશ) | 1089 | $1089 = 33^2$ |

ઉપરના કોષ્ટકને ધ્યાનપૂર્વક જુઓ. ત્રણ અંકોની સંખ્યા પર કરેલી પ્રક્રિયા એક જ છે, પણ દરેક પધ્ધતિમાં પ્રક્રિયા કર્યા પછી મળતા અચળાંકો જુદા જુદા છે. પણ આ બધા જ અચળાંકો પણ કોઈ ચોક્કસ ભાત (**Pattern**) ને અનુસરે છે. બધા જ અચળાંકોમાં અંકોની સંખ્યા 4 છે.

(i) બધા જ અચળાંકોમાં ડાબી બાજુના પહેલા બે અંકો (10) સમાન છે.

(ii) ત્રીજા અને ચોથા અંકથી બનતી સંખ્યાઓ પણ ચોક્કસ ભાત (Pattern) ને અનુસરે છે.

01, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89

(ઉપરની ભાત જોતાં સ્વ. રાવ સાહેબની એક બહુપ્રચલિત રમત (Reaching 100) યાદ આવી જાય છે. પણ તે વિષે કોઈક બીજા લેખમાં...)

(iii) દરેક અચળાંકમાં જમણી બાજુનો છેલ્લો અંક એ સંખ્યા લેખન પધ્ધતિના આધાર (Base-પાયો) કરતાં 1 જેટલો ઓછો છે.

(iv) દરેક અચળાંકમાં જમણી બાજુથી બીજો અંક એ સંખ્યાલેખનના આધાર કરતાં 2 જેટલો ઓછો છે.

વ્યાપક રીતે, સંખ્યાલેખનનો આધાર $n$ ($n \geq 2$) લઈ આપણે અચળાંક મેળવીશું અને તે પરથી કોષ્ટક 4 ની નીચે આપેલા ગુણધર્મો અને 1089 વિશે બીજાં ઘણાં પરિણામો મેળવીશું. અલબત્ત જે. એચ. ભટ્ટ સાહેબે સુગણિતમ્ સળંગ અંક 304માં આ પરિણામો પૈકી કેટલાંક પ્રગટ કરેલાં છે. કેટલાંક અમે ઉમેર્યા છે. **(ક્રમશઃ)**

---

## રૂડું પ્રકરણ તે મારું ચલનું રે... (ઊંચી મેડી તે મારા કંથની રે...)

રૂડું પ્રકરણ તે મારું ચલનું રે.... મેં તો ભણીને જાણ્યું રાજ ... હો રાજ (2)
હો અમે તે રેખા લઈ નીકળ્યા (2) ... કે એનો ઉકેલ આપો રાજ (2)
ચારે છેડે ચારે જણા ... તો યે ફરી ન છેદે ક્યાંય .... હો રાજ(2)
હો અનન્ય ઉકેલ તણાં બીજડાં (2) ... કે ગુણક ભાગ સરખો ના થાય (2)
મોંઘા તે મૂલના મારા દાંડીયા... મેં તો રમીને જાણ્યા રાજ ... હો રાજ (2)
હો અમે તે રેખા લઈ નીકળ્યા (2) ... કે એનો ઉકેલ આપો રાજ (2)
બંને તે રેખા એવી દોડતી .... કે કદી ન છેદે ક્યાંય ... હો રાજ (2)
હો અમને ના મળ્યાં એનાં બીજડાં (2) ... જેનાં બે ગુણોત્તર સરખા થાય (2)
મોંઘા તે મૂલની મારી ચૂંદડી ... હેજી સમાંતર એની ધાર ... હો રાજ
હો અમે તે રેખા લઈ નીકળ્યા (2) ... કે એનો ઉકેલ આપો રાજ (2)
બંને તે રેખા એવી દેખતાં... કે રેખા બીજી ન દેખાય .... હો રાજ (2)
હો અનંત ઉકેલે જોયાં બીજડાં (2) ... જેના ગુણોત્તર સરખા થાય (2)
મોંઘા તે મૂલની મારી લીપસ્ટીક ... વહાલીએ ઘસી રાજ ... હો રાજ (2)
હો અમે તે આદેશ લેવા નીકળ્યા (2) ... કે એનો એક ચલ સૂત્રધાર (2)
જેની કિંમત મૂકી બીજે ... અમે કિંમત મેળવી રાજ ... હો રાજ (2)
હો લોપની રીતે શોધવા નીકળ્યાં (2) .. કે સહગુણક સરખા કરાય. (2)
ચારે ચલે ચારે જણા ... તો યે એક ચલ લોપ થાય. ... હો રાજ (2)
હો ચોગુની રીત કરવા બેઠા (2) ... મારાં બાલુડાં બહુ ગભરાય (2)
બોર્ડે કીધું કાઢો ચોગુ ... અમે સૌ ખુશ થયાં રાજ ... હો રાજ (2)
હો અડધાં ગણ્યાં, અડધાં આવડ્યાં (2) ... અડધાં 'સરે' ગણાવ્યા રાજ (2)
સંજય પટેલના સ્વામી શૂન્યડા .... પ્રભુ પાર ઉતારો રાજ ... હો રાજ (2)

**વાપી, જિ. વલસાડ, (મો) 98258 23271** **ડૉ. સંજયકુમાર એસ. પટેલ**

## સળંગ અંક-311 (E-Copy-6)ના ઉકેલો

શ્રી દયારામભાઈ ઠક્કરે પ્રા. પ્ર.ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો, સળંગ અંક-311 ના ત્રણેય પ્રશ્નો (7), (8) અને (9)ના સાચા ઉકેલ મોકલાવેલ. આ ઉકેલો અત્રે થોડા ફેરફાર સાથે રજુ કરેલ છે.

(7) Let $a$, $b$, $c$, $x$, $y$ and $z$ be real numbers which satisfy the three equations (i) $13x + by + cz = 0$, (ii) $ax + 23y + cz = 0$, (iii) $ax + by + 42z = 0$. Suppose that $a \neq 13$ and $x \neq 0$. Find the value of $\frac{13}{a-13} + \frac{23}{b-23} + \frac{42}{c-42}$

Solution :

By (ii) – (i), we have, $(a-13)\,x + (23-b)y = 0$

$\Rightarrow (a-13)\,x = (b-23)y$ ............. (iv)

and by (iii) – (ii), we have, $(b-23)\,y + (42-c)z = 0$

$\Rightarrow (b-23)\,y = (c-42)z$ ............. (v)

$\therefore$ from (iv) and (v)

$(a-13)\,x = (b-23)y = (c-42)\,z = \mathrm{k}$ (suppose) ............. (vi)

Here $a \neq 13$ and $x \neq 0$ $\quad\therefore k \neq 0$.

Now by adding $(a-13)\,x$ on both the sides of (i), we have,

$ax + by + cz = k$ ............. (vii)

By (i) + (ii) + (iii), we have

$13x + 23y + 42z + 2(ax + by + cz) = 0$

$\therefore 13x + 23y + 42z = -2k$ ............. (viii)

From (vi) and (viii), we have

$$(a-13)\,x = (b-23)y = (c-42)\,z = \frac{13x+23y+42z}{-2}$$

$$\therefore \frac{1}{a-13} = \frac{-2x}{13x+23y+42z}, \frac{1}{b-23} = \frac{-2y}{13x+23y+42z} \text{ and } \frac{1}{c-42} = \frac{-2z}{13x+23y+42z}$$

$$\therefore \frac{13}{a-13} + \frac{23}{b-23} + \frac{42}{c-42} = \frac{-2\,(13x+23y+42z)}{13x+23y+42z} = -2$$

(8) The sequence $a_0, a_1, a_2,...$ satisfies the equation $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$, for every integer $n \geq 3$. If $a_{14} = 1$, $a_{19} = 10$ and $a_{24} = 100$, then find the value of $a_{2021}$.

Solution : Here, we have

$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$ ............. (i)

$a_{n-1} = 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-4}$ ............. (ii)

$a_{n-2} = 2a_{n-3} - 2a_{n-4} + a_{n-5}$ ............. (iii)

$a_{n-3} = 2a_{n-4} - 2a_{n-5} + a_{n-6}$ ............. (iv)

By (i) + 2×(ii) + 2×(iii) + (iv), we have $a_n = a_{n-6}$ ............. (v)

Now $a_{14} = a_8 = a_2 = 1$,

$a_{19} = a_{13} = a_7 = a_1 = 10$ and

$a_{24} = a_{18} = a_{12} = a_6 = a_0 = 100$

By the given equation, we can calcualte

$a_3 = 82$, $a_4 = 172$ and $a_5 = 181$

Now using (v), we have

$a_{2021} = a_{2015} = a_{2009} = \ldots = a_5 = 181$

(9) If $z_1$, $z_2$ and $z_3$ are three complex numbers such that $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ and $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, then prove that $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$.

**Solution :**

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 &= z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right) \\ &= z_1z_2z_3\left(\frac{|z_1|^2}{z_1}+\frac{|z_2|^2}{z_2}+\frac{|z_3|^2}{z_3}\right) \text{ (because } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1) \\ &= z_1z_2z_3\,(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \text{ (because } |z|^2 = z\,\bar{z}) \\ &= z_1z_2z_3\,(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) \\ &= z_1z_2z_3\,(\bar{0}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો : અંક-312

(10) Solve the equation $x(x+1) = y(y+4)$, where $x$ and $y$ are positive integers.

સમીકરણ $x(x+1) = y(y+4)$ ઉકેલો, જ્યાં $x$ અને $y$ ધન પૂર્ણાંકો છે.

(11) Find the sum (સરવાળો શોધો) :

$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \cdots$ ... ... ..

(12) Let $x$ and $y$ be positive real numbers such that $(1+x)(1+y) = 2$. Prove that $xy + \frac{1}{xy} \geq 6$.

ધારોકે $x$ અને $y$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે કે જેથી $(1+x)(1+y) = 2$ થાય. સાબિત કરો કે $xy + \frac{1}{xy} \geq 6$.

**તંત્રી નોંધ :** પ્રા. પ્ર.ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો સળંગ અંક 309 માં એક પ્રશ્ન પૂછવામાં આવેલ જે નીચે મુજબ હતો, જેનો ઉકેલ અંક 310 માં પ્રકાશિત કરવામાં આવેલ.

"If $x > 0$, then find the greatest possible value of $(log x)^{\log\log\log x} - (log\ log x)^{\log\log x}$, where all the logarithms are on base 10.

પ્રા. એન.એન. રોઘેલીયા સાહેબે અમારું ધ્યાન દોર્યું કે આ પ્રશ્નમાં ભૂલ છે. વાચક મિત્રો, શું તમે આ ભૂલ શોધી શકશો? આગામી અંકમાં આ ભૂલ વિશે ચર્ચા કરીશું.

# ગુજરાત ગણિત મંડળ
# 60મા અધિવેશનના કાર્યક્રમોનો અહેવાલ

## (1) સામાન્ય વિભાગ

ગુજરાત ગણિત મંડળની અવિરત શૈક્ષણિક સફરના માર્ગના એક સીમાચિહ્નરૂપ વર્ષ 2023નું વાર્ષિક અધિવેશન એટલે હીરક જયંતિ અધિવેશન.

ગુજરાત ગણિત મંડળનું 60 મું વાર્ષિક અધિવેશન સેંટ ઝેવિટર્સ કોલેજ, અમદાવાદ ખાતે તારીખ 21 થી 23 નવેમ્બર 2023 દરમિયાન યોજવામાં આવ્યું, જેનું પ્રમુખપદ યજમાન સંસ્થા, સેંટ ઝેવિયર્સ કોલેજ, અમદાવાદના ગણિત વિભાગના વડા પ્રા. ડૉ. ઉદયનભાઈ પ્રજાપતિએ શોભાવ્યું હતું.

અધિવેશન દરમિયાન સામાન્ય વિભાગનાં વ્યાખ્યાનો તારીખ 21 અને 22 નવેમ્બર, 2023, એમ બે દિવસ દરમિયાન યોજાયાં હતાં.

અધિવેશનના ઉદ્‌ઘાટન સમારંભ બાદ સામાન્ય વિભાગનું પ્રથમ સેશન નિયત સમય કરતાં થોડું મોડું શરૂ થયું. વ્યાખ્યાનોને સમયને અનુરૂપ ગોઠવવા માટે પ્રથમ સેશનના અધ્યક્ષ માનનીયશ્રી એન.એન. રોઘેલીયા સાહેબે "ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર સમયની સાપેક્ષે કરીએ" એવી ગાણિતિક ટકોર સાથે એમની કાવ્ય શૈલીમાં સેશનની કમાન સંભાળી. આ સેશનની શરૂઆત ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખ પ્રા. ડૉ. ઉદયનભાઈ પ્રજાપતિના વ્યાખ્યાન, "Problem Solving in Mathematics" થી થઈ, તેમને ગમતા, ગણિતના કેટલાક તર્કસંગત પ્રશ્નો રજૂ કર્યા અને શ્રોતાઓ પાસેથી જવાબો મેળવવામાં સફળ રહ્યા. બીજગણિત, તર્કશાસ્ત્ર જેવાં વિષયાંગોના અનુસંધાનમાં કોયડાઓ રજૂ કર્યા અને ખૂબ જ રસપ્રદ શૈલીમાં એના ઉકેલો સમજાવ્યા. IMO 1981 માં પૂછાયેલ વિશેષ પ્રશ્નની પણ ચર્ચા કરી. શ્રોતાજનોએ ખૂબજ રસપૂર્વક તેના ઉકેલ મેળવવાની રીત વિશે ચર્ચામાં ભાગ લીધો. આ સેશનનું બીજું વ્યાખ્યાન શ્રી મેઘરાજભાઈ ભટ્ટ સાહેબનું હતું. જેનો વિષય હતો, "Mathematics in Management Science". ગણિત શા માટે ભણવું જરૂરી છે એ પ્રશ્નની ચર્ચા સાથે શરૂઆત કરી, મેનેજમેન્ટ ક્ષેત્રે ગણિતના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કઈ રીતે થાય છે એની ચર્ચા તેમણે કરી. બીજા વિશ્વયુદ્ધ દરમિયાન જર્મન લશ્કર દ્વારા રચાયેલ ઓપરેશન રીસર્ચ ગ્રુપથી Management Science નું અલગ ક્ષેત્ર શરુ થયું. તે વિશે તેમણે રસપ્રદ માહિતી રજૂ કરી, જેના દ્વારા ગણિત જીવનનાં કયાં કયાં ક્ષેત્રે જોડાયેલું છે એનો એઓએ ખ્યાલ રજૂ કર્યો.

સમયને ધ્યાનમાં રાખી આ સેશનમાં નિયત થયેલ ત્રીજું વ્યાખ્યાન સામાન્ય વિભાગના આ દિવસના અંતિમ સેશનમાં લેવાનું નિર્ધારિત કરી ભોજન વિરામ બાદ બીજા સેશનનાં નિયત થયેલાં વ્યાખ્યાનો નિયત સમયે રજૂ કરવામાં આવ્યાં.

બીજા સેશનના અધ્યક્ષ તરીકે શ્રી મેઘરાજભાઈ ભટ્ટ સાહેબે કમાન સંભાળી. પ્રથમ વ્યાખ્યાન "પ્રો. એ.એમ. વૈદ્ય મેમોરિયલ લેક્ચર" તરીકે પ્રા. શ્રી. એન.એન. રોઘેલીયા સાહેબે "Mathematical Patterns" વિષય સાથે રજૂ કર્યું. રોઘેલીયા સાહેબે એમની વિશેષ શૈલીમાં જુદા જુદા ગાણિતિક નમૂનાઓ દ્વારા વિવિધ ગાણિતિક પેટર્ન મેળવી શકાય એની ખૂબજ રસપ્રદ રજૂઆત કરી. શ્રોતાઓએ સક્રિય રહી ચર્ચામાં ભાગ લીધો.

ત્યારબાદ બીજું વ્યાખ્યાન ડૉ. સંજયભાઈ કે. પટેલે "A Game of Coins" વિષય હેઠળ રજૂ કર્યું. એઓએ Problem Solving Approach થી સિક્કાની રમતોના પ્રશ્નોના ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય એની સુંદર ચર્ચા કરી. અલગ અલગ તર્કથી સિક્કાઓની સંખ્યા વધારી, નવા નવા પ્રશ્નો મેળવી, એના જવાબો શોધવાની સામાન્ય રીતો તેમણે સમજાવી. આ સેશનનું ત્રીજું વ્યાખ્યાન ડૉ. પારસભાઈ ઉચાટ દ્વારા રજૂ થયું, જેનો વિષય હતો, "Development and Application of Graph Theory" ગ્રાફ થીયરીના ઈતિહાસથી શરૂ કરી કોનિગ્સબર્ગ બ્રિજ પ્રોબ્લેમના ઉકેલ વિશે તેમણએ વિસ્તૃત ચર્ચા કરી, અન્ય વિવિધ રસપ્રદ પ્રશ્નોના ઉકેલ ગ્રાફ થીયરીની મદદથી કઈ રીતે મેળવી શકાય એની સુંદર રજૂઆત કરી. ઉપરાંત ગ્રાફ થીયરીનાં કેટલાંક રસપ્રદ પરિણામોની પણ સરળ સમજ આપી.

ચા-વિરામ બાદ પ્રથમ દિવસના સામાન્ય વિભાગનું ત્રીજું સેશન માનનીયશ્રી એમ.એચ. વસાવડા સાહેબના અધ્યક્ષ સ્થાને શરૂ થયું. પ્રથમ વ્યાખ્યાન "પ્રો. એ.આર. રાવ મેમોરિયલ લેક્ચર" તરીકે PRL, અમદાવાદના પ્રા. વરુણ શીલ દ્વારા રજૂ થયું. વિષય હતો "Role of Mathematics in Space Program." આ વિશેષ વ્યાખ્યાનમાં ચંદ્રયાન-3 ની સફળ યાત્રામાં સમાવિષ્ટ વિવિધ મશીનરીના ભાગો કે જે PRL, અમદાવાદમાં બનાવવામાં આવ્યા હતા એની ઓળખ અને કાર્યરચનાની સમજ આપી. ઉપરાંત Aditya L-1 ના નિર્માણ વિશે પણ માહિતી આપી. મંગળ ગ્રહના વાતાવરણની જાણકારી માટે વિવિધ વિકલ સમીકરણો કઈ રીતે ઉપયોગી થાય છે તેમજ મંગળ ગ્રહના વાતાવરણમાં ઓઝોનનું પ્રમાણ, વાયુના તોફાનોની આગાહી, વગેરેમાં ગાણિતિક સિદ્ધાંતો કેટલા ઉપયોગી છે એ વિશે રસપ્રદ અને ઊંડાણપૂર્વક ચર્ચા કરી.

આ સેશનનું બીજું વ્યાખ્યાન રાજકોટના આયુશસિંઘ સાગર અને કાલિંદી દેલાવાલાએ સંયુક્ત રીતે રજૂ કર્યું. વિષય હતો, "Breaking the unbreakable", જે અંતર્ગત તેમણે Cryptography (સંકેતશાસ્ત્ર), તેની તકનિકીના વિવિધ પ્રકારો, સીઝર સાયફર લેંગ્વેજ વગેરેની રસપ્રદ રજૂઆત કરી. બીજા વિશ્વયુદ્ધ દરમિયાન જર્મન મિલીટરી દ્વારા કોડ મેસેજ આપવા માટે શોધાયેલ એનિગ્મા મશીનની કાર્યપધ્ધતી PPT અને વિડીયો માધ્યમથી સુંદર રીતે સમજાવી. ત્યારબાદ સવારના પ્રથમ સેશનનું રિશિડ્યુલ થયેલ વ્યાખ્યાન ત્રીજા સેશનનાં ત્રીજા વ્યાખ્યાન તરીકે રજૂ થયું. શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક દ્વારા "ભારતીય પંચાંગમાં ગણિત" વિષય અંતર્ગત તિથિ, રાશિ, નક્ષણ, યોગ, પંચાગ વગેરેની ગણતરીમાં ગણિત કેવી રીતે સંકળાયેલ છે એની ખૂબ જ રસપ્રદ ચર્ચા કરવામાં આવી. એઓએ ગ્રેગોરીયન કેલન્ડર અને ભારતીય પંચાગ વિશે તેમજ સોલરડે, લયુનર ડે વિશે સમજ આપી. અધિક માસ, ક્ષય તિથી, ક્ષય માસ કઈ રીતે પંચાંગમાં દર્શાવે છે અને એના મૂળમાં રહેલા ગાણિતિક સિદ્ધાંતો અને ગાણિતિક ક્રિયાઓ કઈ રીતે જોડાયેલ છે એની ખૂબ જ વિસ્તાપૂર્વક ચર્ચા કરી રસપ્રદ માહિતી રજૂ કરી. શ્રોતાઓએ ઉત્સાહથી ચર્ચામાં ભાગ લીધો.

આ વર્ષે વિશેષતઃ હીરક જયંતિ અધિવેશન હોવાથી, પ્રથમ દિવસના, સામાન્ય વિભાગના, સેશનના અંતે ગુજરાત ગણિત મંડળના પાયારૂપ ગણિતજ્ઞ વડીલોને સન્માનિત કરવામાં આવ્યા. સન્માનિત વડીલોએ હર્ષભેર સન્માન સ્વીકારી આશીર્વચનો આપ્યાં અને સૌએ આ 60 વર્ષોની ગુજરાત ગણિત મંડળની વિકાસયાત્રાનાં સંસ્મરણો તાજાં કર્યાં.

અધિવેશનના બીજા દિવસે એટલે કે 22 નવેમ્બર, 2023ના રોજ સામાન્ય વિભાગની શરૂઆત બપોરે ચા વિરામ બાદ થઈ. આ સેશનનું અધ્યક્ષ સ્થાન શ્રી મહમ્મદ હુસેન ગેણા સાહેબે સંભાળ્યું. જેમાં પ્રથમ વ્યાખ્યાન શ્રી વિજયભાઈ વોરાએ "Proof Without Words" વિષય હેઠળ રજૂ કર્યું. પાવર પોઈન્ટ પ્રેઝન્ટેશન દ્વારા બીજગણિતનાં વિવિધ પરિણામોની સાબિતી આકૃતિઓ દ્વારા સુંદર રીતે સમજાવી. ગોલ્ડન રેશિયો, સિલ્વર રેશિયો, ત્રિકોણમિતીય નિત્યક્ષમોની સાબિતીઓ રજૂ કરી. આ સેશનમાં બીજો કાર્યક્રમ "ગણિત સમાચાર" રાજકોટનાં કુ. પરાશ્રી પંડ્યાએ રજૂ કર્યો. ગાણિતિક શોધો અંગેના નવીનતમ સમાચારો, તેની વિસ્તૃત માહિતી અને સંશોધન અંગેની સમજ આપી રસપ્રદ રજૂઆત કરવામાં આવી. ત્યારબાદ અધિવેશનની આગવી ઓળખ એવી પ્રા. એ.એમ. વૈદ્ય–પ્રશ્ન સંધ્યા 2023" નું સંચાલન હંમેશ મુજબ ડૉ. ઉદયનભાઈ પ્રજાપતિ દ્વારા કરવામાં આવ્યું. સ્મરણિકામાં આપેલ 10 પ્રશ્નો પૈકી બે પ્રશ્નો બાદ કરતાં બાકીના તમામ પ્રશ્નોના ઉકેલ શ્રોતાઓ દ્વારા ચર્ચા કરી મેળવવામાં આવ્યા. તમામ ઉકેલોની વિસ્તૃત ચર્ચા કરવામાં આવી. સામાન્ય વિભાગના અંતિમ સેશનના અંતિમ કાર્યક્રમ શ્રી એ.કે. વિરાણી-ગણિત સ્પર્ધા-2023 નું સફળ સંચાલન શ્રી કિશોરભાઈ કાલસરિયા દ્વારા કરવામાં આવ્યું.

અધિવેશનના પ્રથમ બે દિવસ દરમિયાન સામાન્ય વિભાગમાં ખૂબજ રસપ્રદ વિષયો સાથે સુંદર વ્યાખ્યાનો રજૂ થયાં. દરેક વ્યાખ્યાતાઓને પ્રમાણપત્ર અને સ્મૃતિભેટ એનાયત કરવામાં આવ્યાં. તેમજ દરેક સેશનના અધ્યક્ષશ્રીઓને પ્રમાણપત્ર અને સ્મૃતિભેટ અર્પણ કરવામાં આવ્યાં. આમ ખૂબ જ માહિતીસભર અને જ્ઞાનવર્ધક કુલ 12 વ્યાખ્યાનો દ્વારા સામાન્ય વિભાગમાં કુલ 9 કલાક 30 મિનિટ જેટલું શૈક્ષણિક કાર્ય સફળતાપૂર્વક પૂર્ણ થયું.

**વલસાડ (M) 93756 22977** **ઉન્નતિ દેસાઈ**

## (2) કોલેજ વિભાગ

ગુજરાત ગણિત મંડળનું 60મું વાર્ષિક અધિવેશન તા. 21.11.2023 થી 23.11.2023 દરમિયાન અમદાવાદની સેન્ટ ઝેવિયર્સ કોલેજ તથા અમદાવાદ ગણિત મંડળના સહયોગથી સેન્ટ ઝેવિયર્સ કોલેજ, અમદાવાદ ખાતે યોજાયેલ હતું, જેનું પ્રમુખપદ માનનીય ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિ સાહેબે શોભાવ્યું હતું. કોલેજ વિભાગમાં અંદાજે કુલ 6 કલાક અને 5 મિનિટમાં કુલ 11 વ્યાખ્યાનો થયાં હતાં.

તા. 22.11.2023ના રોજ 4 કલાકને 35 મિનિટમાં 8 વ્યાખ્યાનો તથા તા. 23.11.2023ના રોજ 1 કલાકને 30 મિનિટમાં 3 વ્યાખ્યાનોનું આયોજન થયેલું હતું.

તા. 22.11.2023ના રોજ પ્રથમ સેશનમાં સેન્ટ ઝેવિયર્સ કોલેજ અમદાવાદના પ્રાધ્યાપક ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિ સાહેબે અધ્યક્ષપદ શોભાવ્યું હતું.

પ્રથમ વ્યાખ્યાન સવારે 9.00 થી 9.35 દરમિયાન શ્રી વીર નર્મદ સાઉથ ગુજરાત યુનિવર્સિટીનાં સહાયક પ્રાધ્યાપક ઊર્મિ એસ. ગોસાઈ અને તેમના વિદ્યાર્થીઓ કેસર એન. હાથીવાલા, નીરવા આર. પટેલ તથા શ્વેતા એસ. રાઉતાએ, “Mathematics - the heart of GPS for navigation” વિષય પર આપેલું હતું. તેમણે નેવીગેશનના પ્રકારો તેમજ પ્રાચીન સમયમાં નેવીગેશનનો ઉપયોગ ત્રિકોણીય પધ્ધતિથી કેવી રીતે થતો તે વિશે સમજાવેલ, આ ઉપરાંત હોકાયંત્ર ના પ્રકારો વિશે પણ જણાવેલ. વ્યાખ્યાનના અંતે વસાવડા સાહેબે Geodesic curve વિશે પ્રશ્નોત્તરી કરી વ્યાખ્યાનને રસપ્રદ બનાવ્યું હતું. દ્વિતીય વ્યાખ્યાન રાજકોટની ગેલેક્ષી સંસ્થાના ડીપ્લોમાના વિદ્યાર્થી ક્રિશ પટેલે 9.40 થી 10.10 દરમિયાન, “Mathematics behind bubble geometry” વિષય પર આપેલું હતું. તેમણે બબલ્સના આધારે ગુરુના ગ્રહની રચના સમજી શકાય એવું જણાવેલ. બે ડિસ્કને સોફ્ટ સોલ્યુશનમાં ડૂબાડવાથી બનતા અલગ-અલગ આકારનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે ઓછામાં ઓછું થાય તે સમજાવવાનો પ્રયત્ન કરેલ હતો. તૃતીય વ્યાખ્યાન, “Reimann-Hypothesis: The Ultimate Mathematical Challenge for a Million Dollars” વિષય પર કેલીફર્નિયાથી ગુગલ કંપનીના સોફ્ટવેર એન્જિનિયર શિવમ પટેલે સમય 10.15 થી 11.00 દરમિયાન ઓનલાઈન માધ્યમથી આપેલું હતું. તેમણે પ્રાઈમ નંબરની અગત્યતા તેમજ કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા પહેલાં કેટલા પ્રાઈમ નંબર મળી શકે તેના વિશે જણાવેલ હતું. વ્યાખ્યાનને અંતે રીમાન્ન ફોર્મ્યુલા, રીમાન્ન ઝીટા ફન્કશન તેમજ ઝીરો ફ્રી રિજિયન વિશે સમજાવવાનો પ્રયત્ન કરેલ હતો.

દ્વિતીય સેશનમાં અમદાવાદની એલ.ડી. એન્જિનિયરિંગ કોલેજના પ્રાધ્યાપક ડૉ. સંજય કે. પટેલે અધ્યક્ષપદ શોભાવ્યું હતું. પ્રથમ વ્યાખ્યાન જે.એન્ડ જે. કોલેજ ઓફ સાયન્સના સહાયક પ્રાધ્યાપક ડૉ. અરુણ ચૌહાણે સમય 11.30 થી 12.15 દરમિયાન “Role of Linear Algebra in Data Science” વિષય પર રસપ્રદ શૈલીમાં આપેલ હતું. વ્યાખ્યાનની શરૂઆતમાં તેમણે ડેટા સાયન્સ ની સમજૂતી ખૂબ જ સરળ ભાષામાં આપેલ હતી. જેમાં વ્યાખ્યાનની શરૂઆતમાં તેમણે ડેટા સાયન્સની સમજૂતી ખૂબ જ સરળ ભાષામાં આપેલ. શ્રેણિકની મદદથી ઈમેજ કેવી રીતે બને છે તે જણાવેલ. આ ઉપરાંત “Principle Component Analysis Technique” વિશે દાર્શનિક સુંદર છણાવટ કરેલ તથા પાયથન સોફ્ટવેરની ઉપયોગિતા વિશે પ્રકાશ પાડ્યો હતો. વ્યાખ્યાનના અંતે થયેલી પ્રશ્નોત્તરીને કારણે વ્યાખ્યાન વધુ રસપ્રદ બન્યું હતું. દ્વિતીય વ્યાખ્યાન વલ્લભ વિદ્યાનગરની સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના M.Sc. ના વિદ્યાર્થી આદિત્ય ભટ્ટ અને અમદાવાદ ની સ્કૂલ ઓફ સાયન્સની M.Sc.ની વિદ્યાર્થિની ઉર્વશી જૈને સાથે મળીને સમય 12.20 થી 12.50 દરમિયાન “Sum of first ‘n’ natural numbers raised to a ineger powers” વિષય પર આપેલ હતું. વ્યાખ્યાનની શરૂઆતમાં આદિત્યે પ્રાચીન સમયમાં ગણિતની ઉપયોગિતા વિશે જણાવેલ. ઉર્વશીએ જુના સંસ્કૃતમાં લખાયેલા ગાણિતિક દસ્તાવેજ વિશે સમજાવવાનો

પ્રયાસ કર્યો હતો. તેમણે “Erdos-Moser Equation” વિશે માહિતી આપેલ. વ્યાખ્યાનનાં અંતે શ્રી રોધલિયા સાહેબે તેમજ શ્રી વિઠ્ઠલભાઈ સાહેબે પ્રશ્નોતરી કરી વ્યાખ્યાનને વધારે રસપ્રદ બનાવેલ હતું.

તૃતીય સેશનમાં ગુજરાત ગણિત મંડળના ભુતપૂર્વ પ્રમુખ શ્રી વિઠ્ઠલભાઈએ અધ્યક્ષપદની કામગીરી સંભળી હતી.

પ્રથમ વ્યાખ્યાન સમય 2.00 થી 2.30 દરમિયાન “Zero the Hero” વિષય પર અમદાવાદના ડૉ.વી. ડી. ઠક્કર સાહેબે આપેલ હતું. વ્યાખ્યાન દરમિયાન તેમણે મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી. આ ઉપરાંત ગણિતની જુદી જુદી શાખાઓમાં ઝીરોની અગત્ય દર્શાવતાં પરિણામોની ચર્ચા કરી હતી. ત્યારબાદ સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી - વલ્લભ વિદ્યાનગરના સહાયક પ્રાધ્યાપક ડૉ. પ્રશાંત પટેલે સમય 2.35 થી 3.05 દરમિયાન દ્વિતીય વ્યાખ્યાન “How satellite sends images to earth” વિષય પર આપતાં જણાવેલ કે “Approximation Theory” કઈ રીતે ઉપયોગી છે. કોઈ પણ ઈમેજની સાઈઝને કેવી રીતે અને કેટલી ઘટાડી શકાય તેના પર પણ પ્રકાશ પાડેલ હતો. તૃતીય સેશનના અંતિમ ચરણમાં 3.10 થી 3.40 દરમિયાન સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી વલ્લભ વિદ્યાનગરના પીએચ.ડી.ના વિદ્યાર્થી સુધીર કુમારે “Vector Bundles” વિશે માહિતી પૂરી પાડવાનો પ્રયાસ કરેલ હતો.

અધિવેશનના ત્રીજા દિવસે, તા.23.11.2023ના રોજ પ્રથમ સેશનના અધ્યક્ષપદની કામગીરી ડૉ. પ્રદીપ ઝા સાહેબે શોભાવી હતી.

પ્રથમ વ્યાખ્યાન “Proofs that really count” વિષય પર સવારે 9.00 થી 9.30 દરમિયાન અમદાવાદની કોલેજ ચીમનભાઈ પટેલ ઈન્સ્ટીટ્યૂટ ઓફ કમ્પ્યુટર એપ્લીકેશન્સના સહાયક પ્રાધ્યાપક જયમીન પટેલે આપેલ હતું. વ્યાખ્યાનની શરૂઆતમાં તેમણે “Two way counting method” વિશે ચર્ચા કરી હતી. આ ઉપરાંત ફિબોનાકિ સિરીઝ અને તેની અગત્ય સમજાવવાનો પ્રયત્ન કરેલ હતો. વ્યાખ્યાનનાં અંતે શ્રી વસાવડા સાહેબ તેમજ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા થયેલી પ્રશ્નોતરીને કારણે વ્યાખ્યાન વધારે સહજ બન્યું હતું. ત્યારબાદ 9.35 થી 10.05 દરમિયાન દ્વિતીય વ્યાખ્યાન સુરતની વીર નર્મદ સાઉથ ગુજરાત યુનિવર્સિટીનાં સહાયક પ્રાધ્યાપક ડૉ. પ્રીતિ ટંડેલે “History of Equation Solving” વિષય પર સમજૂતી આપેલ હતી. તેમણે વિષયનો ઈતિહાસ અને સમીકરણો ઉકેલવાની રીતો, ભૌમિતિક રજૂઆત અને ઉદાહરણ દ્વારા સમજાવવાનો પ્રયત્ન કરેલ હતો. વ્યાખ્યાનને અંતે શ્રી રોઘેલિયા સાહેબની તેમજ વિદ્યાર્થીઓની પ્રશ્નોત્તરીને કારણે વ્યાખ્યાન ઘણું રસપ્રદ બન્યું હતું. ચોથા સેશનમાં છેલ્લું વ્યાખ્યાન IITE - ગાંધીનગરનાં સહાયક પ્રાધ્યાપક ડૉ. દર્શના બી. લીખાડાનું, “Undergraduate Abstract Algebra with Fun” વિષય પર હતું. વ્યાખ્યાનની શરૂઆતમાં જ તેમણે ગમ્મત સાથે જ્ઞાન પીરસવાનો ઉપાય અજમાવ્યો હતો. આ ઉપરાંત વિષયના મૂળભૂત નિયમો સરસ રીતે સમજાવ્યા હતા. વ્યાખ્યાનને અંતે થયેલી પ્રશ્નોત્તરીને કારણે વ્યાખ્યાન વધુ રસપ્રદ બન્યું હતું.

દરેક વ્યાખ્યાન અને સેશનને અંતે વ્યાખ્યાતાઓને અને સેશનના અધ્યક્ષને સર્ટિફીકેટ તથા મેમેન્ટો આપીને સન્માનિત કરવામાં આવેલ હતાં.

**જિજ્ઞેશ બી. બોસમીયા**

### (3) શાળા વિભાગ

શાળા વિભાગના કાર્યક્રમો તારીખ. 22.11.2023 અને 23.11.2023 એમ બે દિવસ યોજાયા હતા. 22મી તારીખે ત્રણ સેશનમાં કુલ 4 કલાક અને 35 મિનિટમાં આઠ વ્યાખ્યાનો અને 23મી તારીખે એક સેશનમાં કુલ 1 કલાક અને 50 મિનિટમાં ત્રણ વ્યાખ્યાનો થયાં હતાં.

તા. 22 ના રોજ સવારે પ્રથમ સેશનમાં માનનીય શ્રી પી.કે. વ્યાસ સાહેબના અધ્યક્ષ સ્થાને ત્રણ વ્યાખ્યાનો થયાં હતાં. પ્રથમ વ્યાખ્યાન 9 થી 9.40 દરમિયાન અમદાવાદની મહારાજા અગ્રસેન શાળાના વાઈસ પ્રિન્સિપાલ શ્રી અજય

ત્રિવેદીએ “8th Proof of Phythagoras Theroem by Elisha Scott Loomis” વિષય પર રજૂ કર્યું હતું. આ વ્યાખ્યાનમાં તેમણે એલિશા સ્કોટ લૂમિસ દ્વારા પાયથાગોરીયન પ્રેપોઝીશન બૂકમાં અપાયેલી કુલ 350 થી વધુ સાબિતી પૈકી આઠ નંબરની સાબિતી આપી હતી. તેમણે આ સાબિતી શા માટે પસંદ કરી તે જણાવતાં કહ્યું હતું કે આ સાબિતીની આકૃતિ એવી છે જેમાથી કુલ 1231 સાબિતીઓ મળે છે, જેના પરથી પાયથાગોરસના પ્રમેયના સૂત્ર સુધી પહોંચી શકાય. આ રસપ્રદ વ્યાખ્યાનના અંતે શ્રી વ્યાસ સાહેબે પોતાના વિચારો રજૂ કર્યા હતા.

બીજું વ્યાખ્યાન 9.45 થી 10.25 દરમિયાન ગુજરાત વિદ્યાપીઠ દ્વારા સંચાલિત, આદિવાસી વિસ્તારની, આદિવાસી શાળાના નિયામક શ્રી સંજય પટેલ સાહેબે આપ્યું હતું. તેમનો વિષય “Joyful Learning of Mathematics” હતો. તેમણે પોતાના વ્યાખ્યાનમાં ગણિત વિષયમાં આવતા વિવિધ પારિભાષિક શબ્દો કે જે આદિવાસી વિસ્તારની શાળાના વિદ્યાર્થીઓને સમજવામાં અઘરા લાગે છે તેને તેમની ભાષામાં સમજાવી ગણિતને આનંદદાયી કેવી રીતે બનાવી શકાય તેની સુંદર રજૂઆત કરી હતી. તેમણે પોતાના વક્તવ્યમાં વિનોબા ભાવે, ગિજુભાઈ બધેકા અને ગીતા સાર ની વાત પણ કરી હતી. તેમણે દ્વિઘાત સમીકરણ અને ક્ષેત્રફળ આધારિત ભજન દ્વારા પોતાનું વક્તવ્ય પૂર્ણ કર્યું હતું. તેમણે પોતાનું વક્તવ્ય તેમના પિતાશ્રી શંકરભાઈ પટેલ ને અર્પણ કર્યું હતું.

ત્રીજું વ્યાખ્યાન – 10.30 થી 11 સુધીમાં – શ્રી કલ્પેશભાઈ અખાણીએ Mathemagic વિષય પર આપ્યું હતું. તેમણે પોતાના વક્તવ્યની શરૂઆત તેમના પિતાશ્રીએ 1960 માં તેમને લખેલા પત્રની રમૂજી પરંતુ ચોટદાર કવિતા દ્વારા કરી હતી. તેમણે પોતાના વક્તવ્યમાં ગણિતને રમત દ્વારા રસપ્રદ કેવી રીતે બનાવી શકાય અને વિદ્યાર્થીઓને ગણિતના કલાસમાં વધુમાં વધુ કેવી રીતે involve કરી શકાય તેની અસરકારક રજૂઆત કરી હતી. તેમના વક્તવ્યની વિશેષતા એ હતી કે તેમના વક્તવ્ય દરમિયાન બધા લોકોએ ઉત્સાહ પૂર્વક ભાગ લીધો હતો.

ચા-વિરામ બાદ શ્રીમતી હેમાબેન વસાવડાના અધ્યક્ષસ્થાને બીજા સેશનમાં 11.30 થી 12.50 દરમ્યાન બે વ્યાખ્યાન યોજાયાં હતાં. પ્રથમ વ્યાખ્યાન વિશ્વકર્મા કોલેજ અમદાવાદના લેક્ચરર Dr. Mahesh A. Yeolekar સાહેબે આપ્યું હતું. તેમનો વિષય હતો, “Learning of Mathematics through Models and Games”. તેમણે પોતાના વક્તવ્યમાં અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણીના સરવાળા, કાગળ અને કાતરની મદદથી કેવી રીતે મેળવી શકાય તે બતાવ્યું હતું. તેમણે તેમના વક્તવ્યના અંતમાં એમ બતાવ્યું હતું કે જે શ્રેણીનો સરવાળો આપણે જાણતા ન હોઈએ તેવી શ્રેણીનો સરવાળો પણ કાગળની મદદથી કેવી રીતે મેળવી શકાય.

બીજું વ્યાખ્યાન 12.20 થી 12.50 દરમિયાન માનનીય શ્રી વસાવડા સાહેબે આપ્યું હતું. તેમનો વિષય હતો “ચાલો, બારી બહાર જોઈએ અને બતાવીએ”. આ બારી એટલે શાળા કક્ષાએ પાઠ્યપુસ્તક અભ્યાસક્રમ અને પરીક્ષા - આ ત્રણ બાબત વડે બનતી ત્રિકોણાકાર બારી. વસાવડા સાહેબે આ ત્રિકોણાકાર બારીની બહાર જોવાની વાત કરી હતી. તેમણે પોતાના વક્તવ્યમાં ફર્મા, ગોલ્ડબાખ કન્ઝેકચર, યુક્લિડ, પેર્રન (Perron) પેરેડોક્ષ, ડાયોફેન્ટાઈન સમીકરણ અને હેમિલ્ટન જેવા ગણિતશાસ્ત્રી વિશે અને તેમણે આપેલા ગણિતના પ્રદાન વિશે વાત કરી હતી. તેમણે આપેલ વ્યાખ્યાન દ્વારા એવું જાણવા મળ્યું હતું કે કોલેજ કક્ષાએ અઘરા લાગતા મુદ્દાઓ શાળા કક્ષાએ પણ કેટલી સરળતાથી સમજાવી શકાય.

ભોજન વિરામ બાદ ત્રીજું સેશન 2.00 થી 3.40 દરમિયાન યોજાયું હતું, જેના અધ્યક્ષ સ્થાને શ્રી વિજયભાઈ વોરા હતા. આ સેશનમાં કુલ ત્રણ વ્યાખ્યાનો થયાં હતાં.

પ્રથમ વક્તવ્ય 2.00 થી 2.30 દરમિયાન વલસાડનાં ઉન્નતિબેન દેસાઈએ આપ્યું હતું. તેમનો વિષય હતો, “આપનું ગણિત-ગમતું ગણિત”. તેમના વક્તવ્યમાં તેમણે પાઠ્યપુસ્તકમાં દેખાતા ગણિતને આપણી આસપાસ દૈનિક જીવનમાં શોધવાના પ્રયત્નોની અસરકારક વાત કરી હતી. જન્મના સમયથી જ ગણિત આપણી સાથે સંકળાયેલ છે. તે વાત કરવા તેમણે હૃદયના ધબકારા, દવાનું માપ, વિવિધ વસ્તુઓનું પેકેજીંગ, વગેરેથી શરૂ કરી સંગીતનાં વાદ્યો, વિવિધ પરિધાનો, રંગોળી, આભૂષણોની ડિઝાઈન, જીપીએસ સિસ્ટમ, હવામાનની આગાહી, પંચાંગ મેડિકલ કે અવકાશ વિજ્ઞાનનાં ક્ષેત્રો સુધી અત્ર તત્ર અને સર્વત્ર ગણિત કેવી રીતે વિસ્તરેલું છે તેની ખૂબ ઊંડાણપૂર્વક વાત કરી હતી.

બીજું વક્તવ્ય 2.35 થી 3.05 દરમિયાન સુરતના પ્રકૃતિ કાલસરિયાએ આપ્યું હતું. તેમનો વિષય હતો. "The heart of triangles". કોઈપણ ત્રિકોણના ખૂણાઓના ત્રિભાજકો દ્વારા બનતો ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ હોય છે. આ પરિણામની ઘણી બધી સાબિતી છે. પ્રકૃતિએ Elementary Geometry ની મદદથી એકદમ સરળ સાબિતી રજૂ કરી હતી.

ત્રીજું વ્યાખ્યાન 3.10 થી 3.40 દરમિયાન ખેડા જિલ્લાની શ્રી સરસ્વતી વિદ્યા મંદિર, અકલામા, મહેમદાબાદના ધોરણ 10 ના વિદ્યાર્થી નિકુંજ ભટ્ટે આપ્યું હતું. તેમનો વિષય હતો "ચાલો ગણિત માણીએ". તેમણે તેમના વક્તવ્યમાં એક થી નવ સુધીના ઘડિયા પરથી 11 થી 99 સુધીના ઘડિયા કઈ રીતે બનાવી શકાય તે વાત કરી હતી. ત્યારબાદ કોઈપણ તારીખ ઉપરથી તે દિવસે કયો વાર હશે તે કઈ રીતે જાણી શકાય તે વાત કરી હતી. અંતમાં કેલેન્ડરમાં કઈ રીતે ગણિત છૂપાયેલું છે તેની પણ સુંદર રજૂઆત કરી હતી.

23.11.2023ના રોજ સવારે 9 થી 11 દરમિયાન શ્રી કલ્પેશભાઈ અખાણીના અધ્યક્ષ સ્થાને કુલ ત્રણ વક્તવ્યો રજૂ થયાં હતાં. જેમાંથી પ્રથમ વક્તવ્ય 9 થી 9.30 દરમિયાન કરોલી પ્રાથમિક શાળાના ધોરણ 8ના વિદ્યાર્થી દેવરાજ પરમાર અને વિશાલ પરમારે આપ્યું હતું તેમનો વિષય હતો, "ગણિત શીખવું કેટલું સહેલું". તેમણે પોતાના વક્તવ્યમાં ભૂમિતિમાં રેખા, કિરણ, ખૂણા અને સમાંતર રેખાની છેદિકા દ્વારા બનતા ખૂણાની સંકલ્પના આપણા હાથ અને દોરીની મદદથી કેવી રીતે સમજાવી શકાય તેનું સુંદર વર્ણન કર્યું હતું.

બીજું વક્તવ્ય 9.35 થી 10.10 દરમિયાન એલ.ડી. એન્જિનિયરિંગ કોલેજ અને ગવર્મેન્ટ પોલિટેકનિક કોલેજના વીઝીટીંગ ફેકલ્ટી તરીકે ફરજ બજાવતા શ્રી નૃસિંહભાઈ પટેલે આપ્યું હતું. તેમનો વિષય હતો, "Unveiling the Elegance, Cardano's Method". તેમણે ત્રિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટે સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતી રીતમાં શું મુશ્કેલી આવે છે તે જણાવ્યું હતું અને તેનો ઉકેલ Cardanos depressed cubic equation થી કેવી રીતે મેળવી શકાય તે સમજાવ્યું હતું.

ત્રીજો કાર્યક્રમ 10.15 થી 11 દરમિયાન સુરતના શ્રી કિશોરભાઈ કાલસરિયાનો હતો. તેમણે આગલા દિવસે શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓ માટે યોજાએલ શ્રી એ. કે. વિરાણી ગણિતસ્પર્ધાના ઉકેલોની ચર્ચા કરી હતી. આ ચર્ચામાં કિશોરભાઈનો સાથ શ્રી વ્યાસ સાહેબ, સચિન ગજ્જર, જૈમીન પટેલ અને સ્વરિત જોશીએ આપ્યો હતો.

**રાજકોટ.** (M) 94269 00703 **ભાવેશ પાઠક**

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

## ગુજરાત ગણિત મંડળ-60 મું વાર્ષિક અધિવેશન (અમદાવાદ)
## પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન દ્વારા આયોજિત
# શ્રી એ. કે. વિરાણી ગણિત સ્પર્ધા-2023

સૂચના : બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

તમને અલગથી આપવામાં આવેલી જવાબવહીમાં જવાબો લખવા.

પ્રશ્ન-1 નીચેના 1 થી 5 પ્રશ્નોમાં પ્રત્યેકમાં બે વિધાનો આપેલ છે. જો વિધાન સાચું હોય તો T અને ખોટું હોય તો F લખો. ઉદાહરણ તરીકે પ્રશ્નમાં જો પ્રથમ વિધાન સાચું અને બીજું વિધાન ખોટું હોય તો TF વિકલ્પ પસંદ કરો. (પ્રત્યેક પ્રશ્નનો 1 ગુણ છે. આ પ્રશ્ન માટે 6 મિનિટ ફાળવી શકાય.)

(1) જો $a$ અને $b$ અસંમેય સંખ્યાઓ હોય તો

(i) $a^b$ અસંમેય સંખ્યા છે. (ii) $a - b$ અસંમેય સંખ્યા છે.

(A) TT (B) TF (C) FT (D) FF

(2) (i) જો $a + b = \sqrt{5}$ અને $a - b = 1$ હોય, તો $\log_b a = 1$. (ii) પ્રત્યેક, $a, b, c > 1$ માટે, $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(A) TT (B) TF (C) FT (D) FF

(3) (i) કોઈ પણ અયુગ્મ સંખ્યાના વર્ગને 6 વડે ભાગતાં મળતી શેષ 1 અથવા 3 હોય.

(ii) જો કોઈ સંખ્યાના છેલ્લા બે અંકો 84 હોય, તો તે પૂર્ણવર્ગ ન જ હોય.

(A) TT (B) TF (C) FT (D) FF

(4) પ્રત્યેક $x \in R$ માટે, (i) $\sqrt{x^6} = x^3$, (ii) $(x^6)^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^6$

(A) TT (B) TF (C) FT (D) FF

(5) (i) કોઈપણ સમભુજ ચતુષ્કોણનું પરિવૃત્ત રચી શકાય.

(ii) જો કોઈ ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર તે ત્રિકોણની એક મધ્યગા પર હોય, તો તે સમભુજ ત્રિકોણ હોય.

(A) TT (B) TF (C) FT (D) FF

પ્રશ્ન-2 નીચેના 1 થી 5 પ્રશ્નોમાં A, B, C, D એમ ચાર વિકલ્પો આપેલા છે. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી તમારો જવાબ લખો. (પ્રત્યેક પ્રશ્નના 2 ગુણ છે. આ પ્રશ્ન માટે 12 મિનિટ ફાળવી શકાય.)

(1) જો $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ એ બહુપદી $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + 2$ નાં બીજ હોય, તો $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2}$ નું મૂલ્ય શોધો.

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D) $\frac{11}{4}$

(2) જો $a$, $b$ અને $c$ એ એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય કે જેથી $a^2 - 4b = 8$, $b^2 - 2c = 2$ અને $c^2 - 8a = -31$ થાય તો $a + b^2 + c^3$ નું મૂલ્ય શોધો.

(A) 9 (B) 0 (C) 10 (D) 8

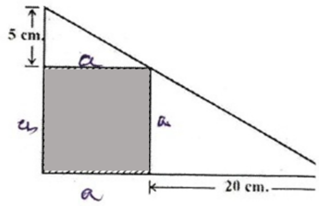
(3) જો $a$, $b$ અને $c$ એ એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય કે જેથી $a \neq b$ અને $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2023$ થાય તો $c^2(a + b)$ નું મૂલ્ય શોધો.

(A) 1012 (B) 2023 (C) –2023 (D) 0

(4) જો 5 વ્યક્તિઓને 100 મીટરની ગટર ખોદવા માટે 4 દિવસ લાગે, તો અડધા દિવસમાં 200 મીટરની ગટર ખોદવા માટે કેટલા વ્યક્તિઓની જરૂર પડે ?

(A) 60 (B) 40 (C) 100 (D) 80

(5) આપેલ કાટકોણ ત્રિકોણમાં છાયાંકિત ચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.




(A) 50 $cm^2$ (B) 100 $cm^2$ (C) 75 $cm^2$ (D) 125 $cm^2$

પ્રશ્ન-3 નીચેના 1 થી 5 પ્રશ્નોમાં A, B, C, D, એમ ચાર વિકલ્પો આપેલા છે. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી તમારો જવાબ લખો.
(પ્રત્યેક પ્રશ્નના 3 ગુણ છે. આ પ્રશ્ન માટે 18 મિનિટ ફાળવી શકાય.) (15)

(1) કિંમત શોધો : $\sum_{k=0}^{2023} \frac{2^k}{2^k + 2^{2023-k}}$

(A) 1012 (B) 2024 (C) 2023 (D) 2022

(2) જો $x$ અને $y$ એ 1 થી મોટા એવા ધન પૂર્ણાંકો હોય, કે જેથી $\log_2 x = \log_x y = \log_y 256$ થાય, તો $y - 2x$ નું મૂલ્ય શોધો.

(A) 16 (B) 8 (C) 4 (D) 12

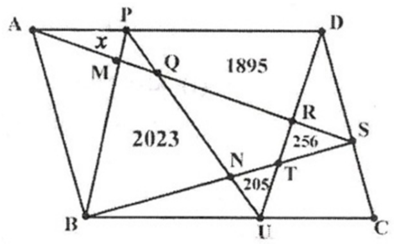
(3) 2744 ના તમામ યુગ્મ અવયવોનો સરવાળો શોધો.

(A) 4200 (B) 4900 (C) 5600 (D) 6300

(4) ગણ {1, 2, 3, 4} માંથી ત્રણ પૂર્ણાંકો (ભિન્ન હોવા જરૂરી નથી) $a, b, c$ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય કે જેથી $a^{(b^c)}$ એ 4 વડે વિભાજ્ય થાય ?

(A) 24 (B) 12 (C) 16 (D) 28

(5) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. NQMB, PQRD, RST, NTU અને AMP નાં ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે 2023, 1895, 256, 205 અને x છે. x નું મૂલ્ય શોધો.




(A) 179 (B) 333 (C) 589 (D) 74

પ્રશ્ન-4 નીચેના 1 થી 5 પ્રશ્નોમાં A, B, C, D, એમ ચાર વિકલ્પો આપેલા છે. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી તમારો જવાબ લખો. (પ્રત્યેક પ્રશ્નના 4 ગુણ છે. આ પ્રશ્ન માટે 24 મિનિટ ફાળવી શકાય.) (20)

(1) કિંમત શોધો : $\frac{1}{2\cos\frac{5\pi}{7}} - \frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{4\pi}{7}}$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) −1

(2) કિંમત શોધો : $\sqrt{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{20}{2} + \binom{21}{2}}$

(A) 38 (B) 40 (C) $\sqrt{1540}$ (D) $\sqrt{1560}$

(3) ધારો કે, $P(x)$ એ એક એવી 5 ઘાત વાળી મોનિક બહુપદી (જેનો અગ્ર સહગુણક 1 હોય તેવી) છે કે જેથી પ્રત્યેક વાસ્તવિક $x$ માટે $P(-x) = -P(x)$ થાય. જો −2 અને $\sqrt{3}$ એ આ બહુપદીનાં બે શૂન્યો હોય, તો $P(4)$ નું મૂલ્ય શોધો.

(A) 624 (B) 468 (C) 312 (D) 156

(4) ફક્ત અયુગ્મ અંકો ધરાવતા હોય તેવા તમામ પૂર્ણાંકોની વધતી શ્રેણી 1, 3, 5, 9, .... છે. આ શ્રેણીમાં 2023મું પદ શોધો.

(A) 39957 (B) 39979 (C) 39975 (D) 39995

(5) PQR એક ત્રિકોણ છે જેમાં ∠ Q = 2 ∠ R, QR પર એક બિંદુ D એવું છે કે જેથી PD એ ∠ QPR નો દુભાજક થાય અને PQ = RD થાય. ∠ QPR નું માપ શોધો.

(A) 54° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

**Prof. A. M. Vaidya Prashna Sandhya – 2023**
**60th Annual Conference of Gujarat Ganit Mandal,**
**St. Xavier's College, Ahmedabad**
**22 November, 2023**

Compiled by : Dr. Udayan M. Prajapati, St. Xaveir's College, Ahmedabad.

1. Determine all positive real numbers $x$ and $y$ satisfying the equation :
$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right).$$
2. Prove that $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ is a positive integer for every positive integer n.
3. In a triangle $ABC$, the bisector of $\angle BAC$ meets the side $BC$ at $D$. Knowing rthat $BD \cdot CD=AD^2$ and $\angle ADB=45^{\circ}$, determine the angels of $\angle ABC$.
4. Prove that cos $1^{\circ}$ is irrational.
5. Find all prime numbers $p$, $q$, $r$, such that $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$.
6. Can both $x^2+y$ and $x+y^2$ be squares for $x$ and $y$ natural numbers?
7. An even number of persons are seated around table. After a break, they are again seated around the same table, not necessarily in the same places. Prove that there are at leas two persons have the same number of persons in between them as before the break.
8. Let $ABCD$ be a cyclic quandrilateral with $O$ as the centre of the circle. $AB$ meets $CD$ in $P$, $AD$ meets $BC$ in $Q$ and the diagonals $AC$, $BD$ meet in $E$. Sow that $E$ is the orthocentre of $\Delta POQ$.
9. A "nice' two-digit number is at the same time a multiple of the product of its digits and a multiple of the sum of its digits. How many such two-digit numbers exist?
10. Given an $1\times n$ table ( $n\geq 2$), two players alternate the moves in which they write the signs + and – in cells of the table. The first player always writes +, while the second always writes –. It is not allowed for two equal signs to appear in the adjacent cells. The player who cant make a move loses the game. Which of the players has a winning strategy?

## પ્રો. અરુણ વૈદ્ય પ્રશ્નસંધ્યા-2023

1. સમીકરણ $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right)$ નું સમાધાન કરતી તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x$ અને $y$ નક્કી કરો.
2. પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક $n$ માટે $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ધન પૂર્ણાંક છે તેમ સાબિત કરો.
3. $\Delta ABC$ માં $\angle BAC$નો દુભાજક $BC$ ને $D$ માં મળે છે. $BD \cdot CD=AD^2$ અને $\angle ADB=45^{\circ}$ હોય તો $\Delta ABC$ ના ખૂણાઓનાં માપ શોધો.
4. cos $1^{\circ}$ અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો,.
5. $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$ થાય તેવી તમામ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ $p$, $q$, $r$ શોધો.
6. ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ $x$ અને $y$ માટે, શું $x^2+y$ અને $x+y^2$ પૂર્ણવર્ગ થાય?
7. યુગ્મ સંખ્યાની વ્યક્તિઓ એક વર્તુળાકાર ટેબલની ફરતે બેસે છે. રીસેસ બાદ તેઓ ફરીથી આજ ટેબલની ફરતે બેસે છે (આગળ ના ક્રમ પ્રમાણે જરૂરી નથી.) ઓછામાં ઓછી બે વ્યક્તિઓ એવી છે કે તેમની વચ્ચે સમાન સંખ્યાની વ્યક્તિઓ છે કે જે રીસેસ પહેલાં હતી તેમ સાબિત કરો.

8. $O$ કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં આવેલો ચક્રીય ચતુષ્કોણ $ABCD$ છે. $AB$ અને $CD$, $P$માં છેદે છે. $AD$ અને $BC$, $Q$ માં છેદે છે. વિકર્ણ $AC$ અને $BD$, $E$ માં છેદે છે. $E$, $\Delta POQ$ નું લંબકેન્દ્ર છે તેમ સાબિત કરો.

9. બે અંકની એક સંખ્યા જો તેના અંકોના ગુણાકારની અવયવી હોય અને તેના અંકોના સરવાળાની પણ અવયવી હોય તો તે સંખ્યા સરસ સંખ્યા કહેવાય. આવી કેટલી સરસ સંખ્યાઓ છે?

10. ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા $n \geq 2$ માટે $1 \times n$ કક્ષાનું એક ટેબલ છે. હરિફો વારાફરતી ચાલ ચાલે છે. પ્રથમ વ્યક્તિ હંમેશા + ખાલી ખાનામાં મુકે છે. બીજી વ્યક્તિ હમેશા – ખાલી ખાનામાં મુકે છે. પાસપાસેના ખાનામાં સમાન ચિન્હ મંજુર નથી, જે હરીફ રમી ના શકે તે હારેલો ગણાય તો કયા હરીફ પાસે જીતવાની રીત છે?

---

# Regional Mathematical Olympiad-2023

**Time: 3 hours** **October 29, 2023**

**Instructions:**

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **Answer all the questions.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. Let $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers and $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 : a^2 + b^2 + c^2 = d^2\}$. Find the largest positive integer $m$ such that $m$ divides $abcd$ for all $(a, b, c, d) \in S$.

2. Let $\omega$ be a semicircle with $AB$ as the bounding diameter and let $CD$ be a variable chord of the semicircle of constant length such that $C, D$ lie in the interior of the arc $AB$. Let $E$ be a point on the diameter $AB$ such that $CE$ and $DE$ are equally inclined to the line $AB$. Prove that
(a) the measure of $\angle CED$ is a constant;
(b) the circumcircle of triangle $CED$ passes through a fixed point.

3. For any natural number $n$, expressed in base 10, let $s(n)$ denote the sum of all its digits. Find all natural numbers $m$ and $n$ such that $m < n$ and
$$(s(n))^2 = m \quad \text{and} \quad (s(m))^2 = n.$$

4. Let $\Omega_1, \Omega_2$ be two intersecting circles with centres $O_1, O_2$ respectively. Let $l$ be a line that intersects $\Omega_1$ at points $A, C$ and $\Omega_2$ at points $B, D$ such that $A, B, C, D$ are collinear in that order. Let the perpendicular bisector of segment $AB$ intersect $\Omega_1$ at points $P, Q$; and the perpendicular bisector of segment $CD$ intersect $\Omega_2$ at points $R, S$ such that $P, R$ are on the same side of $l$. Prove that the midpoints of $PR$, $QS$ and $O_1O_2$ are collinear.

5. Let $n > k > 1$ be positive integers. Determine all positive real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ which satisfy
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{k a_i^k}{(k-1)a_i^k + 1}} = \sum_{i=1}^{n} a_i = n.$$

6. Consider a set of 16 points arranged in a $4 \times 4$ square grid formation. Prove that if any 7 of these points are coloured blue, then there exists an isosceles right-angled triangle whose vertices are all blue.

———0———

# ગણિત સમાચાર

ઑક્ટોબર 2023 થી ડિસેમ્બર 2023 દરમિયાન વિવિધ શૈક્ષણિક સંસ્થાઓમાં થયેલી ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓના અહેવાલો અત્રે રજૂ કર્યા છે. આ સમયગાળામાં 22 ડિસેમ્બર, રામાનુજન જન્મજયંતિ – રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસ – તરીકે ઉજવાઈ ગઈ તેના અહેવાલોનો પણ અત્રે સમાવેશ કરેલ છે. અમને મળેલા અહેવાલો સ્થળ સંકોચને કારણે અમે વિસ્તૃત રીતે રજૂ કર્યા નથી, પણ દરેક અહેવાલને અમે ટૂંકા સ્વરૂપે રજૂ કર્યો છે.

**1. ગુજરાત ગણિત મંડળ અને ગણિત મિલન, વલસાડના સંયુક્ત ઉપક્રમે સેગવીમાં "MATHS LAB" નાં ગણિતિક મોડેલ્સનું પ્રદર્શન**

વિક્રમ સારાભાઈ કમ્યુનિટી સાયન્સ સેન્ટર દ્વારા નિર્મિત માધ્યમિક શાળાના વિદ્યાર્થીઓ માટે "MATHS LAB" શીર્ષક હેઠળ 40 જેટલાં વિવિધ મોડેલ્સ તૈયાર કરવામાં આવ્યાં છે. આ "MATHS LAB" ના મોડેલ્સનું પ્રદર્શન સર્વોદય હાઈસ્કૂલ, સેગવી ખાતે યોજાયેલા જિલ્લા કક્ષાના બાળ વૈજ્ઞાનિક પ્રદર્શનની સાથે રાખવામાં આવ્યું હતું. ગુજરાત ગણિત મંડળ તરફથી આ "MATHS LAB" ગણિત મિલન, વલસાડ સંસ્થાને પ્રાપ્ત થઈ હતી. ગણિત મિલન, વલસાડ દ્વારા સમગ્ર આયોજનના ભાગરૂપે અમદાવાદની સેન્ટ ઝેવિયર્સ કોલેજના છ વિદ્યાર્થીઓએ વલસાડ આવી, તારીખ 28 અને 29 નવેમ્બર 2023, એમ બે દિવસ સર્વોદય હાઈસ્કૂલ, સેગવીના 20 જેટલા વિદ્યાર્થીઓને આ મોડેલ્સના નિદર્શન માટે તાલીમ આપવામાં આવી હતી. ત્યારબાદ આ 20 વિદ્યાર્થીઓએ તારીખ 7 થી 9 ડીસેમ્બર 2023 દરમિયાન સર્વોદય હાઈસ્કૂલ, સેગવી ખાતે યોજાયેલા જિલ્લા કક્ષાના બાળ વૈજ્ઞાનિક પ્રદર્શનની સાથે વિશેષ વિભાગ તરીકે આ "MATHS LAB"નાં મોડેલ્સ પ્રદર્શિત કર્યા.

**પ્રસ્તુતકર્તા : ઉન્નતિ દેસાઈ, વલસાડ. (M) 9375622977**

**2. CBSE Science Fair 2023**


The CBSE Science Exhibition held at Atmiya Vidyalaya, Manjalpur, Vadodara on 21st and 22nd December 2023 saw an impressive display of innovative projects by schools of Ajmer region. Among the 30 recognized reputed schools selected from Ajmer region, Divyapath School of Ahmedabad has done brilliant and important work by showing scientific commitment and dedication.

The children of **Divyapath** were delighted to be selected at the national level among the thirty best projects in the competition from all CBSE schools of Gujarat and Rajasthan in Vadodara. And out of all these schools, only five schools were selected for their exemplary contribution, in which divyapath has been included.

**Children from Divyapath Campus, Memnagar will go to Delhi to show a project on smart storage related to agricultural crops.**

(From a pressnote ----)

### 3. શ્રી રમેશભાઈ છાયા કન્યા વિદ્યાલય, રાજકોટ ખાતે રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણી

ધોરણ 9 થી 12માં અભ્યાસ કરતા, રસ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓની એક કસોટી લઇ, તેના પરિણામના આધારે 16 વિદ્યાર્થીઓને પસંદ કર્યા. આ પસંદ થયેલા વિદ્યાર્થીઓને ચાર ટીમ- આલ્ફા, બીટા, ગેમા અને ડેલ્ટા-માં વહેંચી એક ક્વીઝ સ્પર્ધાનું આયોજન કર્યું હતું. આ ક્વીઝ સ્પર્ધામાં 95 ગુણ મેળવી ટીમ બીટા વિજેતા જાહેર થઈ હતી.

**પ્રસ્તુતકર્તા : ડૉ. હરેશ ભુટક, hareshbhutak999@gmail.com**

### 4. શ્રી શેઠ કે.બી. વકીલ વિવિધલક્ષી વિદ્યાલયમાં રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણી

(i) નિબંધ સ્પર્ધાનું આયોજન :
   50થી વધુ વિદ્યાર્થીઓએ નિબંધ સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો.

(ii) ગાણિતિક આકારોની સુંદર રંગોળીઓ વિદ્યાર્થીઓએ બનાવી.

**પ્રસ્તુતકર્તા : મેહુલદાન ગઢવી, gadhavimehuldan313@gmail.com**

### 5. શ્રી કે.આર. પટેલ વિદ્યામંદિર, ઉમલ્લામાં રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણી

અમારી શાળામાં ગણિતને લગતી ક્વિઝ કોમ્પિટીશનનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. તેમાં કુલ 6 ટીમે ભાગ લીધો હતો. આ ઉપરાંત મેથેમેટિક્સ રંગોળી સ્પર્ધાનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. બન્ને સ્પર્ધામાં પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય ક્રમે વિજેતા થનાર તમામ વિદ્યાર્થીઓને પરમલોક વિજ્ઞાન કેન્દ્ર, ભરૂચના સહયોગથી ગિફ્ટ કીટ તેમજ પ્રમાણપત્ર આપવામાં આવ્યાં હતાં.

**હેમંતકુમાર જોષી**

**શ્રી કે.આર. પટેલ વિદ્યામંદિર, ઉમલ્લા, તા. ઝઘડિયા, જી. ભરૂચ.** **Mob : 9913048193**

### 6. વડનગરમાં રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણી

શાળાના આચાર્યશ્રી કલ્પેશભાઈ અખાણીએ ગણિતજ્ઞ શ્રીનિવાસ રામાનુજનનો પરિચય આપ્યો હતો. આ ઉપરાંત રંગોળી સ્પર્ધા, નિબંધ સ્પર્ધા, વક્તૃત્વ સ્પર્ધા, મૉડેલ સ્પર્ધા પણ રાખવામાં આવી હતી. કાર્યક્રમને અંતે આચાર્યશ્રીએ ઓરીગામી દ્વારા વિદ્યાર્થીઓને સમઘનનું મૉડેલ બનાવવા પ્રેરિત કર્યા હતા. આ પ્રવૃત્તિમાં વિદ્યાર્થીઓને ખૂબ જ મજા આવી હતી.

**આચાર્યશ્રી કલ્પેશભાઈ અખાણી**

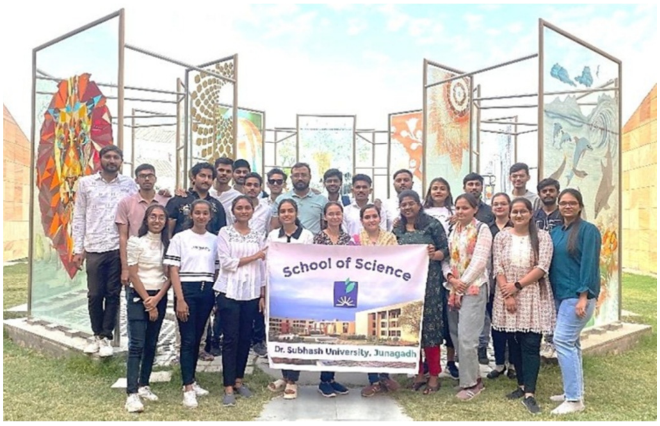
**શ્રી વિવેકાનંદ વિદ્યાલય, વડનગર** **Email : kdakhani@hotmail.com**

7. **સાધના કેમ્પસ અમદાવાદ ખાતે રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણી**


મહાન ભારતીય ગણિતજ્ઞ શ્રીનિવાસ રામાનુજનના જન્મ દિવસની ઉજવણી નિમિત્તે અમારી શાળા - સાધના વિનય મંદિર, ભુયંગદેવ, અમદાવાદ - ખાતે શ્રી રામાનુજન પર Power Point Presentation દ્વારા તેમના જીવન અને તેમનાં ગાણિતિક સંશોધનોની ઝલક દર્શાવતી ટૂંકી ફિલ્મનું નિદર્શન કરવામાં આવ્યું. શાળાના આશરે 1000 વિદ્યાર્થીઓએ આ ફિલ્મ રસપૂર્વક માણી.

**સાધના વિનય મંદિર** **પ્રસ્તુતકર્તા : કૌશલ કે. શાહ**
**ભુયંગદેવ ચાર રસ્તા, અમદાવાદ.** **(M) 9426350460**

8. **National Mathematics Day Celebration**




On the occasion of National Mathematics Day, 25 students and 1 faculty member from the School of Science at Dr. Subhash University, Junagadh had a fascinating visit to the Regional Science Center in Rajkot. The diverse group of students showed a genuine interest in mathematics, reflecting the spirit of the celebration. The purpose was to celebrate the wonders of mathematics and its connection with technology.

The Regional Science Center featured various interactive exhibits illustrating how mathematics is applied in different fields. Students had hands-on experience with displays showcasing the role of mathematics in technology, engineering, and everyday life.

Renowned mathematicians delivered talks highlighting the historical significance of National Mathematics Day and the evolving relationship between mathematics and technology. Also, students were encouraged to identify and analyze the presence of mathematics in their daily lives.

**Sent By : Dr. Premkumar Lalchandani**
**Dr. Subhash University, Junagadh** **Email: finiteuniverse@live.com**

## 9. વલ્લભ વિદ્યાનગર ખાતે ગણિત સપ્તાહની ઉજવણી

સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના અનુસ્નાતક ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ અને સી.સી. પટેલ કૉમ્યૂનિટી સાયન્સ સેન્ટર દ્વારા ગણિત સપ્તાહની ઉજવણી તા.18 થી 23 ડિસેમ્બર, 2023 દરમિયાન વિવિધ કાર્યક્રમોનાં આયોજનો દ્વારા કરવામાં આવી હતી. યુનિવર્સિટીના ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગના ડૉ. પ્રશાંત પટેલ તથા વિભાગના વિદ્યાર્થીઓની ટીમ દ્વારા શાળા-કોલેજના વિદ્યાર્થીઓને વ્યવહારિક જીવન સાથે કેવી રીતે ગણિતનો અનુબંધ બાંધી શકાય તે વિશે માહિતી આપી હતી. કાર્યક્રમનો લાભ શાળા-કોલેજના કુલ 1250 થી પણ વધુ વિદ્યાર્થીઓએ લીધો હતો.

સૌ પ્રથમ અનુસ્નાતક ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગના વિદ્યાર્થીઓ માટે તા. 9 ડિસેમ્બર, 2023 ના રોજ "વિઝ્યુઅલાઈઝેશન ઓફ મેથેમેટિક્સ" શીર્ષક હેઠળ સરકારી પોલીટેકનિક, ગાંધીનગરના ડૉ. સચિન ગજ્જર દ્વારા ગાણિતિક મોડેલને લગતા તાલીમવર્ગનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. ત્યારબાદ તા.18 થી 23 ડિસેમ્બર, 2023 દરમિયાન વિભાગના વિદ્યાર્થીઓએ વલ્લભ વિદ્યાનગરની અલગ-અલગ શાળા અને કોલેજ જેવી કે વી.પી. એન્ડ આર. પી.ટી.પી. સાયન્સ કોલેજ, વી.એન્ડ સી. પટેલ ઈંગ્લીશ મિડીયમ સ્કૂલ, કેન્દ્રીય વિદ્યાલય, એમ.એન. મિસ્ત્રી સ્કૂલ, આઈ.બી. પટેલ ઈંગ્લીશ સ્કૂલ, વગેરેની રૂબરૂ મુલાકાત લઈને મોડેલ્સની મદદથી વિદ્યાર્થીઓને ગણિત સરળ રીતે કેવી રીતે સમજાવી શકાય તે પ્રાયોગિક રીતે બતાવ્યું હતું.

વધુમાં, તા.22 ડિસેમ્બરનાં રોજ સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ ખાતે ઉજવણીના ભાગ રૂપે "ભારતનો ગણિતમાં ફાળો" વિષયને અનુરૂપ વિવિધ પ્રવૃત્તિઓ જેવી કે કોયડા, પોસ્ટર મેકિંગ સ્પર્ધા, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા વ્યાખ્યાન, રંગોળી, વગેરે સંખ્યાબંધ પ્રવૃત્તિઓનું ભવ્ય આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું, જેનો વિવિધ શાળા-કોલેજના વિદ્યાર્થીઓએ લાભ લીધો હતો. વિભાગના પૂર્વ અધ્યક્ષ પ્રા. રેખાબેન મહેતાએ રસપ્રદ વ્યાખ્યાન રજૂ કર્યું હતું. કાર્યક્રમનાં છેલ્લા ભાગમાં અમદાવાદના પ્રાધ્યાપક શ્રી એન.એન. રોઘેલિયા સાહેબે ગણિતને કેવી રીતે જોઈ શકાય, અનુભવી સકાય તેમજ વ્યક્ત કરી શકાય તેના પર સુંદર વ્યાખ્યાન આપ્યું હતું. આ કાર્યક્રમમાં અનુ. ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી; કોમ્યુનિટી સાયન્સ સેંટર, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી; પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન; પ્રા. એ.એમ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન; ગુજરાત ગણિત મંડળનો પણ ફાળો રહેલો હતો. આ સમગ્ર કાર્યક્રમનું સંચાલન ગણિત વિભાગના ડૉ. પ્રશાંત પટેલ દ્વારા સુંદર રીતે કરવામાં આવ્યું હતું.

**Dr. Prashant Patel**

**Sardar Patel University, Vallabh Vidyanagar.** **Email : prashant225@gmail.com**

## લેખક સન્માન

**સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થતા ગાણિતિક લેખોના લેખકો માટે સુગણિતમ્‌ના પ્રકાશક - પ્રા. અરૂણ મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ - નીચેના પુરસ્કારો જાહેર કરતાં આનંદ અનુભવે છે.**

(1) કોઈપણ કક્ષાએ અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા, સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત થયેલા, ગાણિતિક લેખ દીઠ રૂા.300/- લેખકને પુરસ્કારરૂપે આપવામાં આવશે.

(2) એક વર્ષ દરમિયાન પ્રગટ થયેલા, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા ગાણિતિક લેખો પૈકી સર્વશ્રેષ્ઠ લેખના લેખકને પુરસ્કાર રૂપે રૂા.500/- આપવામાં આવશે. (વર્ષ : 1-જાન્યુઆરીથી 31 ડિસેમ્બર ગણાશે.)

(3) જેમનાં લખાણો અગાઉના સુગણિતમ્‌માં ક્યારેય પ્રકાશિત ન થયાં હોય તેવા (નવોદિત) લેખકને તેમના પ્રથમ લેખ માટે રૂા.500/- પુરસ્કાર રૂપે આપવામાં આવશે.

(4) સુગણિતમ્ માટે લેખ લખતા લેખકો પોતાનો કિંમતી સમય લેખ તૈયાર કરવા માટે આપે છે. તેમનું લેખન કાર્ય અમૂલ્ય છે. આવા લેખનને કોઈ પુરસ્કાર આપી મૂલવવું યોગ્ય નથી. પણ ક્યારેક તો લેખકો લેખને ટાઈપ કરાવીને મોકલે છે. ટાઈપ કર્યા પછી કુરીયરથી મોકલે છે. ટાઈપ કરાવવાનો ખર્ચ, કુરીયર દ્વારા મોકલવાનો ખર્ચ તેઓ જાતે ભોગવે છે. લેખકે કરેલા પ્રયત્નને બિરદાવવા માટે અને તેમણે કરેલા ખર્ચને આંશિક રીતે ભરપાઈ કરવા માટે અમે નીચેની જાહેરાત કરીએ છીએ.

“દરેક ગાણિતિક લેખના, સુગણિતમ્‌માં છપાયેલાં પાનાં દીઠ લેખકને રૂા.100/- આપવા.
લખાણ એક પાનાથી ઓછું હોય તો લેખકને તે પાના માટે રૂા.50/- આપવા.”