RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

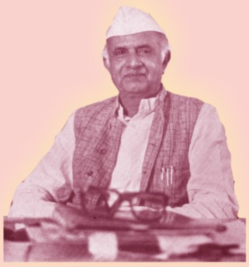
વર્ષ : 61 ઇ-આવૃત્તિ-6 સળંગ અંક : 311 ઓક્ટોબર 2023

For private circulation only

મુખપૃષ્ટ પરનો ગણિતજ્ઞ

જેમ્સ એલેક્ઝાંડર મેનાર્ડ
James Alexander Maynard

જન્મ: 10-06-1987



આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

email : suganitam2018@gmail.com

સંવર્ધક તંત્રી
ડૉ. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ.વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

અનુક્રમણિકા

સળંક અંક : 311 **ઈ-આવૃત્તિ-6** **ઑક્ટોબર- 2023**

સંપાદકીય

વર્ષ 2023નો સુગણિતમનો છેલ્લો અંક એટલે કે સળંગ અંગ 311 (E-અંક 6) આપ સમક્ષ મૂકતાં હર્ષની લાગણી અનુભવીએ છીએ. સુગણિતમ્ એ ગણિત વિષયનું કોઈક ચોક્કસ કક્ષાનું પાઠ્યપુસ્તક અંગેનું સામયિક નથી. તે ગણિતને સમર્પિત એવું સામયિક છે જેમાં લોકભોગ્ય શૈલીમાં લખાયેલા ગણિતના કોઈપણ વિષયાંગ વિશેના લેખો પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે. જુદી જુદી સંસ્થાઓમાં યોજાતી ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓના અહેવાલો, સુગણિતમાં છપાયેલા લેખોની સમીક્ષા અને વાચકોના પ્રતિભાવો, ટૂંકી પણ રસપ્રદ ગણિત કણિકાઓ, ગાણિતિક કોયડાઓ વગેરેનો પણ સમાવેશ સુગણિતમ્માં કરવામાં આવે છે. સુગણિતમ્ના લેખો ગણિતને વ્યાપક રીતે માણનારા વાચકોને અમૂલ્ય ભાથું પૂરું પાડે છે.

ગુજરાત ગણિત મંડળ અને તે સાથે સંલગ્ન સંસ્થાઓ - પ્રા. અરુણ મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન, પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન - ગણિતના અધ્યયન અને અધ્યાપનને પ્રોત્સાહન મળે તેવી ઘણી બધી પ્રવૃત્તિઓ કરે છે. વિદ્યાર્થીઓ માટે વિવિધ કસોટીઓનું આયોજન, ગણિત વિષયક નિબંધ સ્પર્ધાઓ, શિક્ષકો માટે સેમિનાર, વર્કશોપ, સજ્જતા શિબિર એ આ પ્રવૃત્તિઓની એક ઝલક છે. આ અંકમાં જ આવી કેટલીક પ્રવૃત્તિઓ વિષે અહેવાલ અને જાહેરાત જોઈ શકાશે.

ગાણિતિક વિષયો પર લેખનકાર્યને વેગ મળે, નવોદિત લેખકોને અને વિદ્યાર્થી લેખકોને પ્રોત્સાહન મળે, ઉપરાંત જે લેખકો સુગણિતમ્ માટે લેખો લખે છે તેમની કદર થાય તે માટે સારા એવા પ્રયત્નો કરવા જોઈએ એવું લાગે છે. આ લેખમાં જ અન્યત્ર આ પ્રયત્નોની થોડીક માહિતી આપવામાં આવી છે. આ શરૂઆત છે, બીજું ઘણું કરી શકાય તેમ છે. આપ પણ આપનાં સૂચનો પ્રધાન સંપાદકશ્રીને તેમના **E-mail** પર, પત્ર દ્વારા, **Whatsapp Massage**થી કે ફોન કરીને જરૂર જણાવશો, આપનાં સૂચનો ગુજરાત ગણિત મંડળને, પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશનને, પ્રા. અ.મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશનને અને સુગણિતમ્ના પ્રકાશનને જરૂર પ્રોત્સાહિત કરશે. અમે ખાત્રી આપીએ છીએ કે જેનો અમલ કરવો શક્ય હશે તેવાં તમામ સૂચનોને અમે કાર્યાન્વિત કરવાનો સંન્નિષ્ઠ પ્રયત્ન કરીશું.

સુગણિતમ્નો **e**-અંક ગુજરાત ગણિત મંડળના તમામ સભ્યો, રસ ધરાવતા તમામ વાચકો, શાળાઓ, કૉલેજો અને અન્ય શૈક્ષણિક સંસ્થાઓને **e-mail** અથવા અન્ય માધ્યમો દ્વારા નિઃશુલ્ક મોકલવામાં આવે છે. સર્વે વાચકોને વિનંતી છે કે આપની સંસ્થાના વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો, અધ્યાપકો તેમજ ગણિતમાં રસ ધરાવતા દરેકને સુગણિતમ્ના **e**-અંકો **e-mail** કે **whatsapp** જેવાં માધ્યમો દ્વારા મોકલો અને તેમને જણાવો કે તેઓ પોતાનું નામ અથવા સંસ્થાનું નામ, સરનામું, **E-mail** અને **Whatsapp Number** નીચેના સરનામે મોકલે કે જેથી સુગણિતમ્ સીધું જ તેમના **E-mail** પર મળે.

કેટલાંક વાચનાલયો, પુસ્તકાલયો પણ સુગણિતમ્ની **E-copy**નો લાભ લે છે. તેઓ સુગણિતમ્ની મુદ્રિત નકલ (**Printed Copy**) પોતાના પ્રિન્ટર પર કાઢી લાઈબ્રેરીમાં મૂકે તેવી નમ્ર વિનંતી છે.

- સંપાદકો

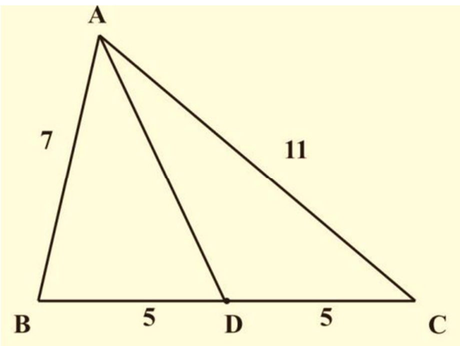
સો અંક પહેલાં

[સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 211મો અંક સપ્ટેમ્બર-ઑક્ટોબર 2004નો હતો. આ અંકમાં પ્રગટ થયેલ શ્રી સુરેશ ટી. ઠાકરનો લેખ 'જાદુઈ ત્રિકોણો' અત્રે પુનર્મુદ્રિત કરેલ છે - પ્રધાન સંપાદક]

જાદુઈ ત્રિકોણો

થોડાક સમય પહેલાં ગુજરાત સમાચારની "જ્ઞાનગમ્મત" કોલમમાં મુરબ્બી શ્રી એ.આર. રાવ સાહેબના આ શબ્દો પ્રગટ થયા હતા : "જો ગણિતનું જ્ઞાન રમકડાં રમાડતાં – રમાડતાં આપવામાં આવે તો ભણવાની કેવી મજા આવે !" ગણિતના વર્કશોપ વિશેના તે લેખમાંથી પ્રેરણા લઈને જાદુઈ ત્રિકોણો વિશેની એક ગમ્મત આજે હું ધોરણ 10ના વિદ્યાર્થીઓને અર્પણ કરું છું.

... ત્યારબાદ ધોરણ 10ના વર્ગમાં ગણિતશિક્ષક શ્રી તેજબુદ્ધિ બોલ્યા : "તો વિદ્યાર્થીમિત્રો, ગઈકાલે આપણે એપોલોનિયસના પ્રમેય ઉપરથી કેટલાક ભૌમિતિક પ્રશ્નો ઉકેલ્યા. આપણે જોયું કે અડસટ્ટે પસંદ કરેલી ત્રિકોણની બાજુઓ પરથી તેની મધ્યગાની લંબાઈ પૂર્ણાંક જ મળે તે શક્યતા ઘણી ઓછી છે. જેમ કે ΔABC માં AB=7, AC=11, BC=10 લઈએ. મધ્યગા AD શોધવા માટે એપોલિનિયસના પ્રમેયના આધારે :



આકૃતિ-1

$$AB^2 + AC^2 = 2[AD^2 + BD^2]$$

$$\therefore\ 7^2 + 11^2 = 2[AD^2 + 5^2]$$

$$\therefore\ AD = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}\ \text{(અસંમેય)}$$

'તેવી જ રીતે જો અડસટ્ટે AB=9, AC=15, BC=16 લઈએ તો મધ્યગા AD=$\sqrt{89}$ મળશે. આ બન્ને ઉદાહરણોમાં ત્રિકોણની બાજુઓ પૂર્ણાંક છે પરંતુ મધ્યગાની લંબાઇ પૂર્ણાંક મળતી નથી.'

"તો સર" ... પરેશ નામના વિદ્યાર્થીએ પૂછ્યું, "જેમાં કોઈ ચોક્કસ મધ્યગાની લંબાઈ પણ પૂર્ણાંક જ મળે તેવા પૂર્ણાંક બાજુઓ ધરાવતા ત્રિકોણો મેળવવા શું કરવું"

"આ એક સરસ પ્રશ્ન છે" શિક્ષકશ્રી બોલ્યા, "તે માટે હે જિજ્ઞાસુ વિદ્યાર્થીઓ ! તમે બધા તમારી નોટબુકમાં આ પ્રમાણે ચાર ખાનાં બનાવો :-

અહીં પ્રથમ ખાનામાં તમને મન ફાવે તેવી 5થી મોટી એકી સંખ્યા લખો. પછી તેમાં 1 ઉમેરીને જે બેકી સંખ્યા મળે તે બીજા ખાનામાં મૂકો. આ બે ખાનામાં જે સંખ્યાઓ ગોઠવાશે તેમનો સરવાળો કરી, તેમાંથી 6 બાદ કરી, જે મળે તે સંખ્યા ત્રીજા ખાનામાં લખો અને ચોથું ખાનું હમણાં ખાલી રાખો. દાખલા તરીકે કોઈ વિદ્યાર્થીએ એકી સંખ્યા 15 લીધી, તો ત્યારપછીની બેકી સંખ્યા = 16. આ બે સંખ્યાઓ 15 + 16 – 6 = 25 એટલે ખાનાં આ રીતે પૂરાશે."

15	16	25	

ઉપરોક્ત સૂચના પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓએ પોતપોતાની નોટબૂકમાં ફટાફટ ત્રણ ખાનાં પૂર્યાં. તેમાં પરેશ, સુનિલ અને કરિનાએ સંખ્યાઓ આ પ્રમાણે પસંદ કરેલી જેની શિક્ષકને ખબર નહોતી.

પરેશ	7	8	9	
સુનિલ	11	12	17	
કરિના	17	18	29	

[જેમાં પ્રથમ બે સંખ્યાઓનો સરવાળો – 6 = ત્રીજી સંખ્યા]

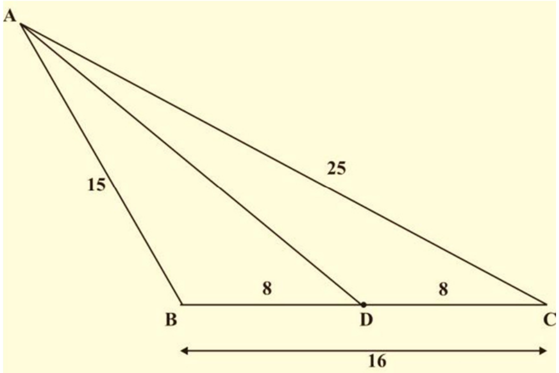
... ગણિતશિક્ષક તેજબુદ્ધિએ આગળ ચલાવ્યું, તો મિત્રો ! તમે બધાં હવે ચોથું ખાનું પૂરવાં આતુર થયાં છો, પણ સાવધાન ! ચોથું ખાનું તમારે પાક્કી ગણતરી કરીને પૂરવાનું છે. તમે બધાએ કઈ ત્રિપુટીઓ પસંદ કરી છે તેની મને કંઈ જ ખબર નથી. પરંતુ તમે બધાએ લગભગ ભિન્ન ભિન્ન ત્રિપુટીઓ પસંદ કરી હશે. ત્રિકોણો તમારે રફ આકૃતિ તરીકે તમારી નોટબુકમાં નીચે પ્રમાણે દોરવાના છે.

તમે પસંદ કરેલી ત્રણ સંખ્યામાંથી, વચ્ચેની બેકી સંખ્યા જેટલા સે.મી. જેનો પાયો BC હોય અને બાકીની બે એકી સંખ્યાઓ જેટલા સે.મી.ની લંબાઈ ધરાવતી જેની બે બાજુઓ AB અને AC હોય (AC > AB) તેવા ΔABCની માત્ર રફ આકૃતિ તમારે દરેકે તમારી નોટબુકમાં દોરવાની છે. ત્યારબાદ BCનું મધ્યબિંદુ ‘D’ લઈને AD જોડી દો. ત્યારબાદ એપોલોનિયસના પ્રમેયના આધારે મધ્યગા ADનું માપ શોધો. તમને બધાને ADની લંબાઈ પૂર્ણાંક જ મળશે. અર્થાત્ મધ્યગા ADની લંબાઇ અસંમેય નહીં જ મળે. દાખલા તરીકે વિદ્યાર્થીએ પ્રથમ ત્રણ ખાનાંઓમાં 15, 16, 25 સંખ્યાઓ લીધી હોય તો મધ્યગા ADની લંબાઈ આ પ્રમાણે મળે.

$AB^2 + AC^2 = 2\,[BD^2 + AD^2]$

$\therefore\ 15^2 + 25^2 = 2\,[8^2 + AD^2]$

$\therefore$ મધ્યગા AD = 19



આકૃતિ-2

હવે તમારું બાકી રહેલું ખાનું = ચોથું ખાનું મધ્યગા ADના પૂર્ણ અંક દ્વારા ભરી દો જેમ કે ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં

15	16	25	19

બધા વિદ્યાર્થીઓએ પોતપોતાની ત્રિપુટીઓ પ્રમાણે મધ્યગાઓ શોધી જેમકે શરૂના ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ:-

	AB	BC	AC	મધ્યગા AD
પરેશ	7	8	9	7
સુનિલ	11	12	17	13
કરિના	17	18	29	22

“આ તો સર, ગજબનું કહેવાય”, કરિના બોલી, “અમારા દરેકની નોટબુકમાં પૂર્ણાંક બાજુઓ ધરાવતા ત્રિકોણની મધ્યગા પણ પૂર્ણાંક મળે છે... આશ્ચર્ય !!!”

“હજુ તો બીજું આશ્ચર્ય જોવાનું તમારે માટે બાકી છે.” શ્રી તેજબુદ્ધિએ કહ્યું, “વિદ્યાર્થીમિત્રો, હમણાં તમે બધાં તમારી નોટબુકો બંધ કરી દો. મેં હજુ સુધી તમારામાંથી કોઈની પણ નોટબુક તપાસી નથી. કેટલી લંબાઈની બાજુઓવાળા ત્રિકોણો તમે દોર્યા છે ? તેની મને કશી ખબર નથી. છતાં તમારામાંથી થોડેક દૂર આ ટેબલ આગળથી તમારી બંધ કરેલી નોટબુકોમાં એક ‘ભેદી રહસ્ય’ હું જોઈ શકું છું. તમારી દરેકની નોટબુકમાં આજના ΔABC માટે

મધ્યગા + વચલીના અડધા – મોટી બાજુ = ૨

અર્થાત્ AD + DC – AC = 2

હવે તમે બધા તમારી નોટબુકો ખોલીને આ ભેદ તપાસી જુઓ.”

બધા વિદ્યાર્થીઓએ જીજ્ઞાસાથી પોતપોતાની નોટબુકોમાં ઉપરોક્ત ગણતરી કરી જોઈ, જેમકે

	AB	BC	AC	AD	DC	AD + DC – AC = 2
પરેશ	7	8	9	7	4	7 + 4 – 9 = 2
સુનિલ	11	12	17	13	6	13 + 6 – 17 = 2
કરિના	17	18	29	22	9	22 + 9 – 29 = 2

તે ભેદી રહસ્ય રૂપે બધા જ વિદ્યાર્થીઓનો અંતિમ જવાબ 2 આવ્યો. જ્યારે સુનિલકુમારે આવા જાદુઈ ત્રિકોણનું કારણ જાણવા માટે શિક્ષકશ્રીને પૂછ્યું ત્યારે ગણિતશિક્ષક શ્રી તેજબુદ્ધિએ મંદ મંદ હાસ્ય સાથે બ્લેક બોર્ડ ઉપર કોક ધનપૂર્ણાંક xની કલ્પના કરીને આ સૂત્ર લખ્યું :-

$$(2x + 1)^2 + (4x – 3)^2 = 2\,[(x + 1)^2 + (3x – 2)^2] \;\dots\; (A)$$

જેને અનુરૂપ

$$AB^2 + AC^2 = 2\,[DC^2 + AD^2]$$

જેમાં $AB=2x + 1 =$ એકી સંખ્યા (તમારું પ્રથમ ખાનું)

$2DC = BC = 2\ (x + 1) =$ બેકી સંખ્યા (તમારું બીજું ખાનું)

$AC = (2x + 1) + (2x + 2) – 6 = 4x – 3$ (તમારું ત્રીજું ખાનું)

$AD = 3x – 1$ (તમારું ચોથું ખાનું) … $(x > 1)$

$\therefore$ AD + DC – AC

$= (3x – 2) + (x + 1) – (4x – 3)$

$= 2$

= અંતિમ પરિણામ

= બધા વિદ્યાર્થીઓ માટે સમાન પરિણામ

વળી બધા વિદ્યાર્થીઓએ ઉપરોક્ત સૂત્ર [A] ના કૌંસનું વિસ્તરણ કરીને તપાસ્યું કે

ડાબી બાજુ = જમણી બાજું

$= 20x^2 – 20x + 10$

વિદ્યાર્થીઓ બોલી ઊઠ્યા : “વાહ ! આ તો ગજબના જાદુઈ ત્રિકોણો”

2004ની તંત્રીનોંધ : પ્રશ્ન એ થાય કે જ્યારે જ્યારે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ અને એક મધ્યગા પૂર્ણાંક લંબાઈની હોય ત્યારે ત્યારે હંમેશાં તેમની વચ્ચે AD + DC – AC = 2 એ સંબંધ હોય જ ?

ગણિત કણિકા

$$(1^2)\,[6\,(1) – 1] = 5\,(1^4)$$
$$(1^2 + 2^2)\,[6\,(1 + 2) – 1] = 5\,(1^4 + 2^4)$$
$$(1^2 + 2^2 + 3^2)\,[6\,(1 + 2 + 3) – 1] = 5\,(1^4 + 2^4 + 3^4)$$
$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)\,[6\,(1 + 2 + 3 + 4) – 1] = 5\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4)$$
$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)\,[6\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5) – 1] = 5\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4)$$

અને આ રીતે આગળ ....

- નટવર રોઘેલિયા (19-09-2023)

યુનિવર્સિ સાયન્સ ફોરમના ‘વિજ્ઞાન ચેતના’ના સૌજન્યથી (અંક 64 ઑગસ્ટ 2023)

બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ-5

ડૉ. દેવભદ્ર વી. શાહ
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત.
(M) 9898057891

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 304, 306, 309 અને 310માં વિવિધ બ્લેકહોલ સંખ્યાઓની માહિતી આપવામાં આવી હતી. લેખમાળાના આ અંતિમ મણકામાં અન્ય કેટલીક બ્લેકહોલ સંખ્યાઓની જાણકારી મેળવીએ.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 243 : કોઈ એક એવી ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો જેના અંકોમાં 0 ન આવતો હોય. એ પછી nના બધા જ અંકોનો ગુણાકાર કરો. આ જવાબના છેવાડે nના અંકોની કુલ સંખ્યા લખો અને નવી સંખ્યા n' બનાવો. હવે n' પર ફરીથી આ જ પ્રક્રિયા કરો અને મળતી સંખ્યાને n'' કહો. આ જ પ્રક્રિયા વારંવાર કરતાં થોડાંક પગલાં બાદ એવું જોવા મળશે કે કોઈક r માટે $n^{(r)}=243$ થશે.(જ્યાં $n^{(r)}$ એ n પર ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા r વખત કરતાં મળતી સંખ્યા છે). વળી 243 પર આ પ્રક્રિયા કરતા $n^{(r+1)}=243$ જ થશે, એટલે કે $n^{(r)} = n^{(r+1)} = \ldots = 243$ થશે !! આમ આ પ્રક્રિયા 243 પર આવીને અટકી જાય છે. આ કારણસર ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા માટે 243ને બ્લેકહોલ સંખ્યા ગણી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે $n=42$ લઈએ. હવે $4\times2=8$ થાય, અને n એ 2 -અંકની સંખ્યા છે. આમ $n'=82$ થશે, જે 2-અંકની સંખ્યા છે. વળી $8\times2=16$ થાય. આથી $n''=162$ થશે. એ જ પ્રમાણે $n'''=123$, $n^{iv}=63$, $n^{v}=182$, $n^{vi}=163$, $n^{vii}=183$, અને $n^{viii}=243$, થશે.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 153 : 3ની ગુણિત હોય એવી કોઈ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો. ત્યારબાદ તેના પ્રત્યેક અંકનો ઘન કરો અને તેમને ઉમેરીને નવી સંખ્યા n' બનાવો. હવે n' પર ઉપર્યુક્ત પ્રક્રિયા કરો અને n'' મેળવો. નવી મળતી સંખ્યા પર આ જ પ્રક્રિયા વારંવાર કરો. થોડાંક પગલાં બાદ કોઈક r માટે $n^{(r)}=153$ મળશે. વળી $1^3+5^3+3^3=153$ થાય. તેથી $n^{(r)}= n^{(r+1)} = \ldots = 153$ થશે !! આમ આ પ્રક્રિયા માટે 153 બ્લેકહોલ સંખ્યા બને છે.

ઉદાહરણ તરીકે ધારોકે $n=432$. આથી $n'=4^3+3^3+2^3 = 99$ થશે. એજ રીતે $n''= 9^3+9^3=1458$, $n'''=702$, $n^{iv}=351$, અને $n^{v}=153$.

અહીં એ નોંધીએ કે પસંદ કરેલ સંખ્યા n તથા n', n'',... વગેરે પણ 3ની ગુણિત છે.

ઉપરોક્ત પ્રક્રિયામાં nના તમામ અંકનો ઘન કરીને સરવાળો કરવાના બદલે જો તમામ અંકનો વર્ગ કરીને સરવાળો કરીએ તો પણ અન્ય એક બ્લેકહોલ સંખ્યા મળે છે, જે હવે જોઈશું.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 4 : કોઈ એક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો. nના પ્રત્યેક અંકનો વર્ગ કરીને તેમનો સરવાળો કરો અને મળતી નવી સંખ્યાને n' કહો. n' પર ફરી આ જ પ્રક્રિયા કરો અને n'' મેળવો. આ જ પ્રક્રિયા વારંવાર કરતાં થોડાંક પગલાં બાદ એવો r અવશ્ય મળશે જ કે જેથી $n^{(r)}=4$ થાય. વળી $n^{(r)}$ પર ફરી આ પ્રક્રિયા કરતાં $n^{(r+1)}=16$, $n^{(r+2)}=37$, $n^{(r+3)}=58$, $n^{(r+4)}=89$, $n^{(r+5)}=145$, $n^{(r+6)}=42$, $n^{(r+7)}=20$ અને $n^{(r+8)}=4$ મળશે ! આમ આ પ્રક્રિયામાં હરહંમેશ 4 મળે જ છે. આથી ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા માટે 4 બ્લેકહોલ સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ તરીકે n=72 પસંદ કરીએ. તો $n'=7^2+2^2=53$, $n''=5^2+3^2=34$, $n'''=25$, $n^{iv}=29$, $n^{v}=85$, $n^{vi}=89$, $n^{vii}=145$, $n^{viii}=42$, $n^{ix}=20$ અને $n^{(x)}=4$ મળે છે.

અહીં એ નોંધીએ કે 1000 જેવી સંખ્યાઓ માટે ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા લાગુ પાડી શકાય નહીં.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 15 : કોઈ એક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા $n>1$ પસંદ કરો, અને 1 તથા n સહિત તેના તમામ ભાજકો લખો. આ સંખ્યાઓના તમામ અંકનો સરવાળો કરો અને મળેલ જવાબને n' કહો. ત્યારબાદ n' પર ફરી આ જ પ્રક્રિયા કરો અને n'' મેળવો. આ જ પ્રક્રિયા વારંવાર કરતાં કોઈક r માટે $n^{(r)}$ =15 મળશે ! વળી 15ના ભાજકો 1,3,5 અને 15 છે, અને 1+3+5+1+5 = 15 થાય. તેથી $n^{(r+1)}$=15 થશે, અને $n^{(r)}= n^{(r+1)}= .... = 15$ થશે ! આમ આ પ્રક્રિયા માટે 15 બ્લેકહોલ સંખ્યા બને છે.

ઉદાહરણ તરીકે n=20 લઈએ. 20ના ભાજકો 1, 2, 4, 5, 10, 20 છે. અને તે બધા જ ભાજકોનાં અંકોનો સરવાળો 1+2+4+5+1+0+2+0 = 15 થાય. આમ 15 બ્લેકહોલ સંખ્યા બને છે.

વધુ એક ઉદાહરણ તરીકે n=4 લઈએ. 4ના ભાજકો 1, 2 અને 4 છે, તથા 1+2+4=7 થાય. આમ, n'=7 થશે. વળી 7ના ભાજકો 1,7 છે. આથી n''=8. એજ રીતે 8ના ભાજકોના અંકનો સરવાળો 1+2+4+8=15. આમ n^{iii}=15 મળશે.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 11 : એવો એક ધનપૂર્ણાંક n પસંદ કરો જેના અંકની સંખ્યા બેકી હોય (ધારો કે $2m$). હવે nને મધ્યથી બરાબર બે સરખા ભાગમાં વિભાજીત કરો. આમ બન્ને ભાગમાં m અંક હશે. ત્યારબાદ પ્રત્યેક અર્ધ-ભાગમાં આવેલ અંકની સંખ્યાને બાજુ-બાજુમાં લખીને નવો અંક n' બનાવો (એટલે કે $n'=mm$). n' પર ફરીથી આ જ પ્રક્રિયા કરો અને n'' બનાવો. આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરતાં કોઈક r માટે $n^{(r)}$ = 11 મળશે. વળી 11 ના બે ભાગ 1/1 કરતા પ્રત્યેક ભાગમાં એક જ અંક આવે છે, એટલે કે $n^{(r+1)}$=11 થશે. આમ $n^{(r)}= n^{(r+1)}=... = 11$ થશે ! આમ સ્પષ્ટ રીતે આ પ્રક્રિયા માટે 11 બ્લેકહોલ સંખ્યા બનશે.

ઉદાહરણ તરીકે n=24309320 લો, જે 8 અંકથી બનેલ સંખ્યા છે. હવે તેને ચાર-ચાર અંકના બે ભાગમાં વિભાજીત કરતા 2430/9320 મળે છે. આ બન્ને ભાગમાં ચાર અંક આવેલાં છે. આમ n'=44 થાય. વળી 44ને બે ભાગમાં વિભાજીત કરતા 4/4 મળશે. આથી n''=11.

બ્લેકહોલ સંખ્યા 1 : કોઈ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો. હવે $n^{(r)}= \left[\sqrt{n^{(r-1)}}\right]; r \geq 1$ મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરો, જ્યાં $n^{(0)}=n$ તથા $[x]$ એ x નો પૂર્ણાંક ભાગ દર્શાવે છે. તો કોઈક r માટે એવું જોઈ શકાય કે $n^{(r)}=1=n^{(r+1)}$ થશે. આમ આ પ્રક્રિયા માટે 1 બ્લેકહોલ સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ તરીકે n=123 લઈએ. તો $\sqrt{n} \approx 11.09$ થશે.આથી n'=[11.09]=11 થાય. વળી $\sqrt{11} \approx 3.32$ છે, આથી n''=3 થાય. એ જ પ્રમાણે n^{iii}=1 થશે.

સહજ (trivial) બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ : કોઈ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા n પસંદ કરો.

(i) $n^{(r)} = \left[\frac{n^{(r-1)}}{2}\right]; r \geq 1$ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરો, જ્યાં $n^{(0)}=n$ તથા $[x]$ એ x નો પૂર્ણાંક ભાગ દર્શાવે છે. તો કોઈક r માટે $n^{(r)} = 0 = n^{(r+1)} = ...$ થશે. આમ આ પ્રક્રિયા માટે 0 બ્લેકહોલ સંખ્યા છે.

(ii) $n^{(r)} = 0 \times n^{(r-1)}$; $r \geq 1$, જ્યાં $n^{(0)}=n$ મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરો તો સ્પષ્ટ છે કે પ્રત્યેક r માટે $n^{(r)}$=0 થશે. આમ 0 બ્લેકહોલ સંખ્યા બને છે.

(iii) $n^{(r)} = k;\ r \geq 1$ (જ્યાં k કોઈક અચળ છે) પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરો તો $n^{(r)}=k; \forall r$ થાય. આમ કોઈપણ અચળ kને બ્લેકહોલ સંખ્યા બનાવી શકાય.

(iv) $n^{(r)} = (n^{(r-1)}$ ના અંકની કુલ સંખ્યા); $r \geq 1$, અને $n^{(0)} = n$ મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરો તો કોઈક r માટે $n^{(r)} = n^{(r+1)}=1$ મળશે. આમ 1 બ્લેકહોલ સંખ્યા બને છે.

આ સાથે બ્લેકહોલ સંખ્યાઓની લેખમાળા અહીં સમાપ્ત કરું છું. અહીં આ પ્રકારની સંખ્યાઓની સૂચિ સમાપ્ત થાય છે એવું કહેવાનો મારો ઈરાદો નથી. પરંતુ વાચકોને આવી અન્ય સંખ્યાઓ વિશે સુગણિતમ્ માટે લેખ લખવા પ્રેરવાનો મારો આશય છે.

અસ્તુ

....

વાચકો લખે છે

સુગણિતમ્‌ના અંક 310માં 'સંપાદકીય'માં સંપાદકોએ મારે માટે વ્યક્ત કરેલી લાગણી માટે તેમનો અત્યંત આભારી છું. 'સુગણિતમ્'માં લખવા માટે આગ્રહ કે વિનંતીનો પ્રશ્ન જ ન હોય. 'સુગણિતમ્' આપણા સૌનું છે અને તેને સમૃદ્ધ બનાવવા માટે પ્રયત્ન કરવા એ આપણા સૌની માત્ર જવાબદારી જ નહિ, ફરજ પણ છે. આમ છતાં સંપાદકોએ કંઈક ને કંઈક લખતા રહેવા માટે મને આમંત્રણ આપ્યું તેને હું તેમની મોટાઈ અને મારું સદ્‌ભાગ્ય સમજું છું.
આભાર, દેવભદ્રભાઈ અને અન્ય સંપાદક મિત્રો.

અંક 310માં પરજ મોદીનો જી.એચ.હાર્ડીના પુસ્તક 'A Mathematician's Apology'ની સમાલોચનાનો લેખ ગમ્યો. લેખમાં હાર્ડીનાં વિચારો અને લાગણીઓની છણાવટ સુંદર છે અને લેખિકાની પોતાની ભાષા પણ સુંદર છે. વધુ સારી વાત એ લાગી કે લેખ લખનાર તાજેતરમાં ધોરણ બાર પાસ થયેલ વિદ્યાર્થિની છે. બેન પરજને અને ગણિતનાં લોકભોગ્ય પુસ્તકો વાંચવા માટે તેને પ્રોત્સાહિત કરનાર તેના શિક્ષકને અભિનંદન !

Keep it up !

પ્રા. પ્રહલાદભાઈ વ્યાસનો પાપસ પ્રમેય વિશેનો લેખ પણ ગમ્યો. આ પ્રમેયનું પરિણામ સુંદર છે અને શાળા કક્ષાએ સમજાવી શકાય તેવું સરળ છે.

અંકમાંના અન્ય લેખો પણ રસપ્રદ અને માહિતીપૂર્ણ છે. લેખકો અને સંપાદકોને અભિનંદન !

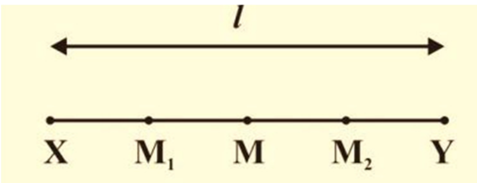
મહાવીર, વસાવડા,
વલ્લભવિદ્યાનગર
(M) 98246 69364

પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આચમન-6

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ.
(M) 9925837247

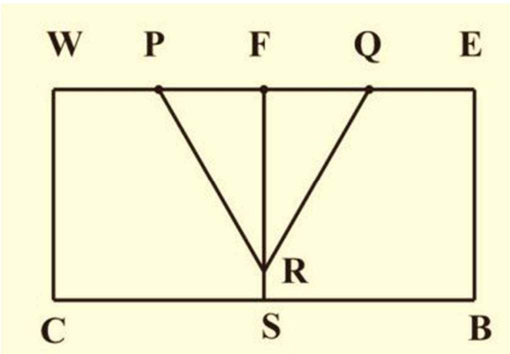
પાંચમા લેખમાં આપણે ચોરસ વેદિની રચના કરવાની બે રીતો જોઈ હતી. ત્રીજી રીત હવે જોઈએ જે આપસ્તંબ સૂલ્બસૂત્રમાં જણાવેલ છે. આ રીતમાં સમબાજુ ત્રિકોણ અને કાટકોણ ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો સરસ રીતે ઉપયોગ કર્યો છે એ અંતે વાચક સમજી શકશે.

<u>રીત-૩</u> જેટલી લંબાઈની બાજુવાળો ચોરસ રચવો હોય તેટલી લંબાઈની રજ્જુ (દોરી) લો. ધારો કે આ લંબાઈ $l = XY$ છે. XYના મધ્યબિંદુ M આગળ નિશાની કરો કે જેથી $XM=MY$. વળી XMના મધ્યબિંદુ આગળ નિશાની M_1 કરો અને MYના મધ્યબિંદુ આગળ નિશાની M_2 કરો. આમ, $XM_1 - M_1M = MM_2 = M_2Y\left(= l/4\right)$. દોરીના બંને છેડા પર – એટલે કે X અને Y આગળ ગાંઠ મારો.



આકૃતિ-1

(i) હવે જે જગ્યાએ વેદિની રચના કરવાની છે તેના બરાબર મધ્યભાગમાં પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં રહે તે રીતે આ દોરીને જમીન પર સીધી મૂકો અને X, M_1, M, M_2 અને Y બિંદુઓ જમીનને જ્યાં અડે ત્યાં એક-એક શંકુ જમીનમાં ઠોકીને સ્થિર કરો. નીચેની આકૃતિમાં જમીન પરનાં આ બિંદુઓ અનુક્રમે W, P, F, Q અને E છે. જ્યાં W (પશ્ચિમ) અને E (પૂર્વ) દર્શાવે છે.



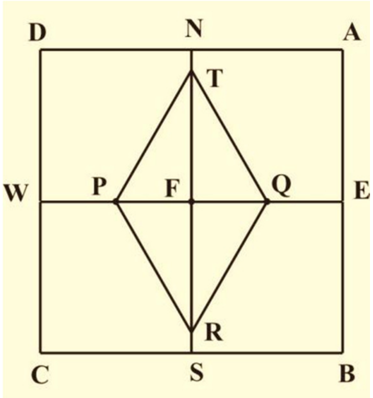
આકૃતિ-2

(ii) હવે X અને Y આગળની ગાંઠને અનુક્રમે P અને Q આગળના શંકુ સાથે સ્થિર કરો. અને XYના મધ્યબિંદુ M આગળની નિશાનીથી દોરીને દક્ષિણ તરફ ખેંચો અને દોરી ખેંચાયેલી રહે એ રીતે રાખતાં M, જમીન પર જે જગ્યાએ આવે ત્યાં જમીન પર નિશાની કરી તેને R કહો.

(iii) હવે બંને ગાંઠને P અને Q આગળથી છૂટા કરી બંનેને સાથે F આગળ શંકુ સાથે બાંધો અને દોરીને M આગળથી પકડીને દક્ષિણ તરફ ખેંચો અને એ રીતે ગોઠવો કે તે Rમાંથી પસાર થાય. આ સ્થિતિમાં M જે સ્થાને આવે તે સ્થાને જમીન પર નિશાની કરી તેને S કહો. આમ FS દક્ષિણ દિશા દર્શાવે છે. S આગળ શંકુ મૂકો.

(iv) હવે દોરીને F આગળથી છૂટી કરો અને તેના એક છેડાની ગાંઠને S આગળ અને બીજા છેડાની ગાંઠને E આગળ શંકુ સાથે બાંધો અને દોરીને મધ્યબિંદુ M આગળથી દક્ષિણ-પૂર્વ દિશામાં ખેંચો. ખેંચાયેલી રાખતાં, જમીન પર જે બિંદુએ M આવે ત્યાં શંકુ B મૂકો. આ જરૂરી ચોરસનો દક્ષિણ પૂર્વનો ખૂણો થશે.

(v) હવે S આગળની ગાંઠને રહેવા દો અને E આગળની ગાંઠને છોડીને W આગળના શંકુ સાથે બાંધો. ફરીથી દોરીને M આગળથી દક્ષિણ-પશ્ચિમ દિશામાં ખેંચો અને ખેંચાયેલી રાખતાં જે બિંદુએ M આવે ત્યાં શંકુ C મૂકો. આ જરૂરી ચોરસનો દક્ષિણ પશ્ચિમનો ખૂણો થશે.



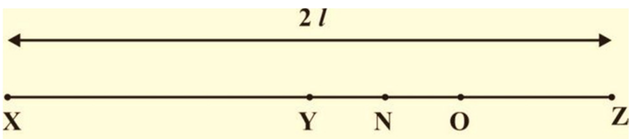
આકૃતિ-3

(vi) હવે ઉપર (ii)થી (iv)માં વર્ણવેલી ક્રિયા WE રેખાની ઉપર તરફ (ઉત્તર તરફ) કરો. આમ કરવાથી જરૂરી ચોરસના ઉપરના બે ખૂણાઓ D અને A મળશે. $ABCD$ જરૂરી ચોરસ થશે.

સમજૂતી : ΔPTQ અને ΔPRQ સમબાજુ ત્રિકોણો થશે. દોરીની લંબાઈ $XY=l=WE$ થાય.
$PQ=PR=QR=PT=TQ={}^{l}/_{2}$.

વળી પગલાં (iv) અને (v) પરથી $SB=BE=SC=CW={}^{l}/_{2}$. $\therefore$ $CB=l$. અને ΔSBE, ΔSCW અને ΔNAE સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણો છે. બાકીની સમજૂતી વાચકો કરી શકશે.

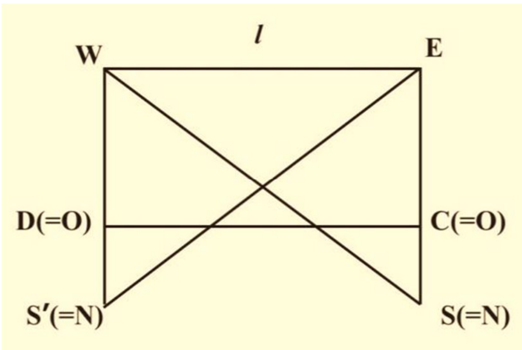
રીત-4 આ રીતની સમજૂતી અને રચના ''મૈત્રાયણીય સૂલ્બસૂત્ર''માંથી લીધી છે. જેટલી લંબાઈની બાજુવાળો ચોરસ રચવો હોય તેના કરતાં બમણી લંબાઈની રજ્જુ (દોરી) લો.



આકૃતિ-4

ધારો કે l લંબાઈની બાજુવાળો ચોરસ રચવો હોય તો દોરીની લંબાઈ $XZ=2l$ લો, તેના મધ્યબિંદુ Y આગળ નિશાની કરો, YZના મધ્યબિંદુ O આગળ નિશાની કરો. YOના મધ્યબિંદુ N આગળ નિશાની કરો. X અને Z આગળ ગાંઠ મારો.

(i) હવે જે જગ્યાએ વેદિની રચના કરવાની છે તેના મધ્યના ભાગે પૂર્વ-પશ્ચિમ રેખા WE લો. $WE=XY=l$.



આકૃતિ-5

(ii) હવે દોરીના X છેડાને W આગળ અને Z છેડાને E આગળ શંકુથી સ્થિર કરો.

(iii) દોરી પરના N બિંદુ આગળથી દોરીને પૂર્વ-દક્ષિણ તરફ ખેંચો અને ખેંચેલી રાખીને O બિંદુ જમીન પર જ્યાં આવે ત્યાં શંકુ C મૂકો.

(iv)આ જ રીતે દોરીને પશ્ચિમ દક્ષિણ તરફ N આગળથી ખેચીંને રાખીને O બિંદુ જ્યાં આવે ત્યાં શંકુ D મૂકો. C અને D, જરૂરી ચોરસનાં, તેની મધ્યરેખા WEની દક્ષિણે આવેલાં બિંદુઓ છે.

(v) આ જ રીતે WEની ઉત્તરે ક્રિયા કરતાં A અને B બિંદુઓ મળશે. $ABCD$ જરૂરી ચોરસ છે.

સમજૂતી : $AB=CD=l$

$WE=l,\ WS=5l/4,\ CS=\frac{l}{4}$

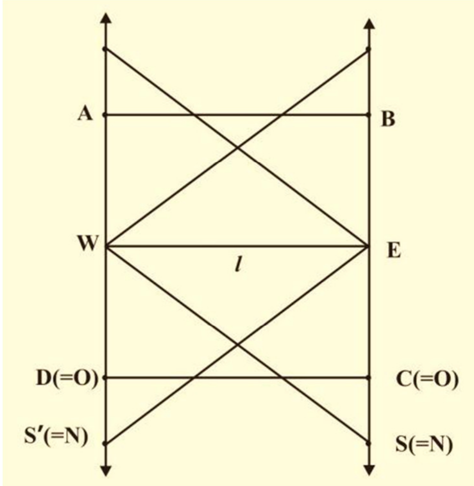
$WS^2\text{-}WE^2 = ES^2$

$\therefore \left(\frac{5l}{4}\right)^2 - l^2 = ES^2 = \frac{9l^2}{16} \quad \therefore ES=\frac{3l}{4}$

$\therefore EC = ES - SC = \frac{3l}{4} - \frac{l}{4} = \frac{l}{2}$

$\therefore BC = l.$

હવે પછીના લેખમાં કેટલીક વધુ વિશિષ્ટ રચનાઓનો અભ્યાસ કરીશું.



આકૃતિ-6

Ref. :

(1) Apastamba Sulbasutram by Dr. D.P. Kuleria & Rashmi Nandal, Abhishek Prakasham, Delhi.

(2) Maitrayaniya Sulbasutram by Dr. D.P. Kuleria, Abhishek Prakashan, Delhi

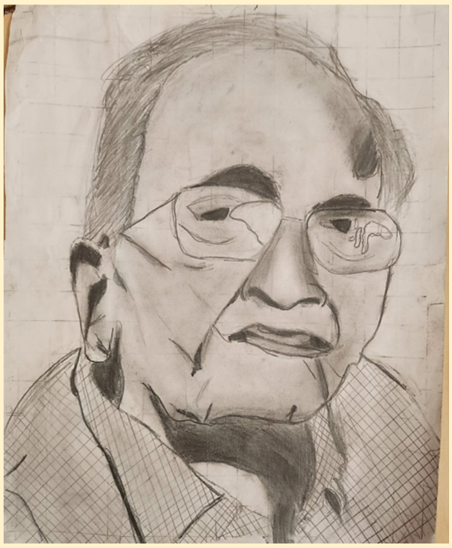
(3) The Sciene of Sulba by B. B. Data, Publ : University of Calcutta.

ગણિત સમાચાર

તા. 23 સપ્ટેમ્બર 2023 ના રોજ વિવેકાનંદ વિદ્યાલય, વડનગર મુકામે સેન્ચુરિયન મૅથેમૅટિશિયન પ્રો. એ.આર. રાવની 116મી જન્મ જયંતીની ઉજવણી કરવામાં આવી.

પ્રો.એ.આર.રાવ ગણિતમાં પ્રયોગશાળાના વિચારના પ્રણેતા હતા. ગણિત રસમય કેમ બને તે માટે જીવનના અંતિમ સમય સુધી પ્રયત્નશીલ રહ્યા.

શાળા આચાર્ય શ્રી કલ્પેશભાઈ અખાણીએ ગણિતના રસમય કોયડાની ચર્ચા કરી. બાબુભાઈ સોલંકી, રાજુભાઈ રાજદેવ, પૂર્વીબેન ચૌધરી, જેસંગભાઈ ચૌધરી, દિનેશભાઈ, હેતલબેન દેસાઈ, જીગરભાઈ પ્રજાપતિ એ માર્ગદર્શન આપ્યું. શાળાના ધોરણ 9ના વિદ્યાર્થી કનુ પંચાલે પ્રો. એ.આર.રાવનો સુંદર સ્કેચ બનાવ્યો હતો.



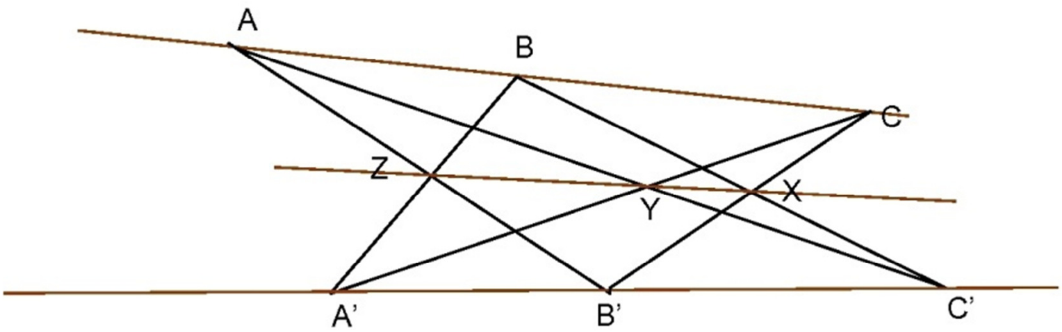
જાણીતાનું અજાણ્યું – 5 : અંતર્ગત ત્રિકોણો

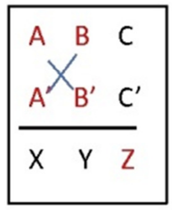
હેમા વસાવડા
વલ્લભ વિદ્યાનગર
(M) 9409157840

એક કોયડો કદાચ જાણતા હશો, તે લઈએ. આપણે એક જ સમતલમાં નવ રેખાઓ અને નવ બિંદુઓ એવી રીતે લેવાં છે કે દરેક રેખા પર ત્રણ બિંદુઓ હોય અને દરેક બિંદુમાંથી ત્રણ રેખાઓ પસાર થાય. આમ તો નવ રેખાઓ અને નવ બિંદુઓ Trial and error થી કરવા જઈએ તો કદાચ હેરાન કરી મૂકે તો નવાઈ નહીં !

ભૂમિતિમાં એક પ્રમેય છે, પાપસનું પ્રમેય (Pappus' theorem). આપણા અભ્યાસમાં ક્યાંય તે આવતું નથી પણ છે સરસ ને જાણવા જેવું. તે આ પ્રમાણે છે.

બે ભિન્ન રેખાઓ છે. એક ઉપર ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C તથા બીજી પર A′, B′ અને C′ છે.





આકૃતિ-1

અન્ય રેખાઓ A, B′ને અને A, C′ને, B, A′ને B, C′ને, C, A′ને અને C, B'ને જોડીને મેળવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ) (1)) બાજુના ચોરસમાં બતાવ્યા પ્રમાણે રેખાઓ AB′ અને BA′, AC′ અને CA′ તથા BC′ અને CB′નાં છેદબિંદુઓ અનુક્રમે Z, Y અને X વડે દર્શાવીએ તો X, Y અને Z સમરેખ થાય.

આ પરિણામ, એટલે કે X, Y, Zની સમરેખતા આકૃતિમાં તરત જ દેખાય છે. આપણે તેને સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીશું નહિ. કોયડાનો ઉકેલ પણ સાથે સાથે મળી ગયો દરેક બિંદુમાંથી ત્રણ રેખાઓ પસાર થાય અને દરેક રેખા પર ત્રણ બિંદુઓ હોય.

હવે આ પ્રમેયની આકૃતિમાં રહેલી એક સુંદર ખૂબી જોઈએ. આ નવ બિંદુમાંથી ત્રિકોણ બનાવતાં હોય તેવાં કોઈપણ ત્રણ બિંદુઓ લો. જેમકે A, B અને C′ આ ત્રિકોણનો આ નવ બિંદુઓમાંનાં ત્રણ વડે બનતો અંતર્ગત ત્રિકોણ લો. આપણે અંતર્ગત ત્રિકોણ મેળવવા માટે મૂળ ત્રિકોણની બાજુઓ પર આવેલ કોઈ બિંદુ લઈએ છીએ. અહીં જરા વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લઈશું. ત્રિકોણની બાજુ પર આવેલું બિંદુ ન મળે તો તે બાજુને સમાવતી રેખા પર બિંદુ લઈશું. જેમ કે Δ ABC′ માં $\overline{AC'}$ ઉપર Y, $\overline{BC'}$ ઉપર X મળશે. પણ $\overline{AB}$ ઉપર કોઈ બિંદુ નહિં મળે. આથી આપણે $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું બિંદુ C લઈશું. આમ ΔABC′માં અંતર્ગત ત્રિકોણ ΔCXY મળશે. હવે આનો અંતર્ગત ત્રિકોણ કયો ? એટલે કે ΔABC′ → ΔCXY → ? આનો જવાબ મળશે. Δ B′ZA′ અને આગળ ચાલીએ તો તેમાં અંતર્ગત Δ ABC′ !!! આ તો જેનાથી શરૂ કર્યું તે જ ત્રિકોણ છે ! આપણને કંઈક આવું પરિણામ મળે છે.

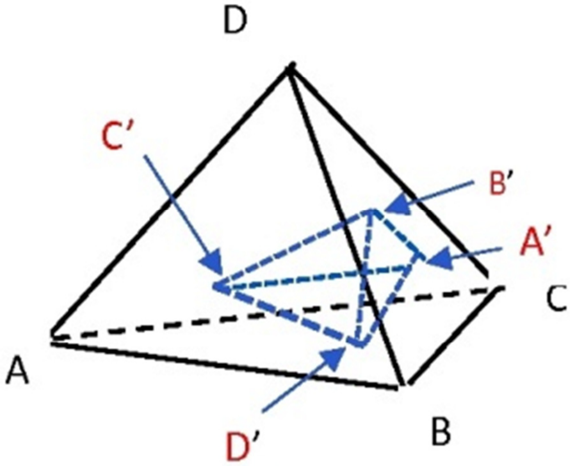
$\Delta\, ABC' \to \Delta\, CXY \to \Delta\, B'ZA' \to \Delta\, ABC'$

એ જ પ્રમાણે બીજો કોઈ ત્રિકોણ લઈએ. જેમ કે Δ BZX તો શું મળશે ?

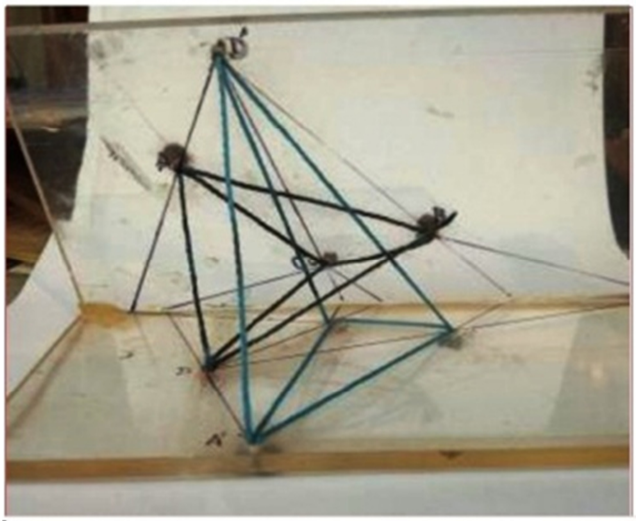
$\Delta\, BZX \to \Delta\, A'YC' \to \Delta\, CAB' \to \Delta\, BZX$

આવા બીજા ત્રિકોણોમાં પણ જોઇ જુઓ...એક ત્રિકોણમાં બીજો, તેમાં ત્રીજો, તેમ અંતર્ગત ત્રિકોણો લેતાં જઈએ, તો ત્રણ જ ત્રિકોણોમાં ચક્ર (cycle of three) પૂરું થશે.

આને અનુરૂપ કોઈ પરિણામ ત્રિપરિણામમાં મળે ખરું ? અહીં ત્રિકોણને બદલે હવે ચતુષ્કોણ લેવાના રહેશે.



આકૃતિ-2


આકૃતિ-3

અને એના દરેક ત્રિકોણીય ફલકમાં એક એક બિંદુ લેતાં બીજો ચતુષ્ફલક મળે, તો તેનો અંતર્ગત ચતુષ્ફલક.

અહીં પણ જરૂર પ્રમાણે વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લેતાં, બીજા ચતુષ્કોણ માટેનું બિંદુ ત્રિકોણીય ફલકની અંદર જ હોવું જરૂરી નથી. તે ફલકને સમાવતા સમતલમાં પણ લઈ શકાશે. ઉપર આકૃતિ - 2માં ABCD ચતુષ્ફલકમાં A′B′C′D′ એ તેનું અંતર્ગત ચતુષ્ફલક છે. (B′ એ ફલક ACDમાં, A′ ફલક BCDમાં ..... એમ આવેલાં છે.)

આ અંતર્ગત ચતુષ્ફલકોના પ્રશ્નનો ઉકેલ ગણિતશાસ્ત્રી મોબીઅસે (Mobius) આપ્યો કે માત્ર બે જ ચતુષ્ફલકો એકબીજામાં અંતર્ગત હોય તેવા મળી શકે. આકૃતિ-3માં તેના મોડેલનું ચિત્ર છે. જેમાં ચતુષ્ફલકો ABCD (કાળા રંગની ધારવાળો) અને A′B′C′D′ (વાદળી રંગની ધારવાળો) એ બંને પરસ્પર અંતર્ગત છે.... માત્ર બે નું ચક્ર ! આવા બે ચતુષ્ફલકોને મોબીઅસ ચતુષ્ફલકો કહે છે. અહીં આપણે જોઈ શકીએ કે A એ ΔB′C′D′ના સમતલમાં, B એ ΔA′C′D′ નાં સમતલમાં, C એ ΔA′B′D′ નાં સમતલમાં અને D અને ΔA′B′C′ નાં સમતલમાં આવેલાં છે. તે જ પ્રમાણે A′, B′, C′ અને D′ નું થશે. આ ગોઠવણી મોડેલમાં બહુ સ્પષ્ટતાપૂર્વક જોઈ શકાય છે.

અહીં પણ શિરોબિંદુઓ અને સમતલોની ગોઠવણી (Configuration) માં એક ખૂબી છે - દરેક બિંદુ ચાર સમતોલો પર આવેલ છે. બિંદુ જે ચતુષ્ફલકનું શિરોબિંદુ હો, તે ચતુષ્ફલકના તેમાંથી પસાર થતાં ત્રણ સમતલો તથા અંતર્ગત ચતુષ્ફલકના જે સમતલમાં આવેલું હોય તે જેમ કે A એ સમતલ ΔABC, ΔABD, ΔACD તથા ΔB′C′D′ને સમાવતા સમતલમાં આવેલું છે.) અને દરેક સમતલ પર ચાર બિંદુઓ આવેલાં છે. (સમતલ ચતુષ્ફલકના જે ત્રિકોણને સમાવતું હોય તે ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ તથા અંતર્ગત ચતુષ્ફલકનું એક બિંદુ જેમ કે, ΔABDને સમાવતા સમતલમાં A, B, D અને C′). આ ખૂબી આપણને પાપસના પ્રમેયના Configuration અને તેની ખૂબીની યાદ અપાવી દે છે.

આની ઉપરથી આપણે શરૂઆતમાં લીધેલા કોયડા જેવો કોયડો બનાવી શકીએ એવાં આઠ બિંદુઓ અને આઠ સમતલો મેળવો. કે જેથી દરેક બિંદુ આમાનાં ચાર સમતલો પર હોય અને દરેક સમતલ પર આમાનાં ચાર બિંદુઓ આવેલાં હોય.

ગણિતકણિકાનો ઉકેલ

રાજેશકુમાર મેર
(M) 9428263776; jignasamer123@gmail.com

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 310 (E–આવૃત્તિ 5)માં પાના નંબર 9 ઉપર નિલેશ માંડલિયાએ એક ગણિત કણિકા પ્રસ્તુત કરી છે.

a, b, c, d એ ક્રમિક ચાર ફિબોનાકી સંખ્યાઓ હોય તો $(ad)^2 + (2bc)^2 = (cd - ab)^2$

એટલે કે $(ad, 2bc, cd - ab)$ એ પાયથાગોરીય ત્રિપુટી છે. તેમણે ઉદાહરણો દ્વારા ઉપરોક્ત હકીકતની ચકાસણી પણ કરી છે અને છેલ્લે તેમણે આ હકીકતની વ્યાપક સાબિતી આપવાનું કહ્યું છે.

સાબિતી નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

(1) આપણે $a \le b < c < d$ લઈશું.

(2) a, b, c, d ક્રમિક ફિબોનાકી સંખ્યાઓ છે. તેથી ફિબોનાકી સંખ્યાશ્રેણીની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $c = a + b$ અને $d = b + c$ $(1, 1, 2, 3, 5, ...$ માં $f_1 = f_2 = 1$ અને $n \ge 3$ માટે $f_n = f_{n-1} + f_{n-2})$

(3) ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની ત્રિપુટી (p, q, r) માટે $p^2 + q^2 = r^2$ તો ત્રિપુટી (p, q, r)ને પાયથોગોરીય ત્રિપુટી કહેવામાં આવે છે. (સ્પષ્ટ છે કે $r > p$, $r > q$), (p, q, r) પાયથાગોરીય ત્રિપુટી છે તેમ દર્શાવવા માટે $p^2 + q^2 = r^2$ અથવા $r^2 - p^2 = q^2$ (અથવા $r^2 - q^2 = p^2$) સાબિત કરવું જોઈએ.

(4) આપેલ ત્રિપુટી $(ad, 2bc, cd - ab)$ માં ચાર અજ્ઞાત સંખ્યાઓ a, b, c, d છે. (2) માં આપેલા સંબંધો પરથી આ ચાર અજ્ઞાત રાશિમાંથી કોઈ બેનો આપણે લોપ કરી શકીએ. સ્વાભાવિક રીતે જ $c = a + b$ અને $d = b + c$, એટલે કે $d = a + 2b$ લઈ, c અને dનો લોપ કરવાનું મન થાય પણ તેમ કરતાં ગણતરી લાંબી અને કંટાળાજનક બનશે.

આપણે a અને d નો લોપ કરી ત્રિપુટીના ત્રણ ઘટકો ફરી લખીએ

$a = c - d$ અને $d = b + c$

તેથી $ad = (c - b)(b + c) = c^2 - b^2$

$2bc$ માં ફેરફાર કરવાની જરૂર નથી. (આપણે a અને dનો લોપ કરવો છે.)

$cd - ab = c(b + c) - (c - b)\,b$

$= bc + c^2 - bc + b^2 = c^2 + b^2$

આમ આપેલ ત્રિપુટી,

$(ad, 2bc, cd - ab) = (c^2 - b^2, 2bc, c^2 + b^2)$

હવે, $(c^2 - b^2)^2 + 4b^2c^2 = c^4 + 2b^2c^2 + b^4 = (c^2 + b^2)^2$

આમ, $(ad, 2bc, cd - ab)$ પાયથાગોરીય ત્રિપુટી છે.

સંપાદકીય નોંધ : આ લેખનાં પ્રૂફ વાંચતાં અમને લાગ્યું કે અમે ક્યાંક આ ગુણધર્મ વાંચ્યો છે. સુગણિતમ્‌ના થોડાક જૂના અંકો તપાસ્યા પણ આ ગુણધર્મ ક્યાંય મળ્યો નહિ. પછી ગુજરાત ગણિત મંડળનાં અધિવેશનો દરમિયાન પ્રગટ થયેલા સુવેનિર જોયાં. 2016માં ગણપત યુનિવર્સિટી કેમ્પસ ખાતે આયોજિત અધિવેશનમાં પ્રગટ થયેલ સુવેનિરમાં પ્રા. પ્રદીપ ઝા અને પ્રા. અમિત પરીખ દ્વારા લખાયેલ એક લેખમાંથી આ પરિણામ મળ્યું. જો કે તે સુવેનિરમાં પણ એક મુદ્રણદોષ હતો જે અત્રે રજૂ કરેલ પરિણામમાં નથી. **– પી. કે. વ્યાસ.**

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ક્ષેત્રીય યામોની એક ઝલક

પ્રા. બાબુભાઈ બી. કાસ્યથ
સુરત
(M) 9265028417

(સંપાદકીય નોંધ : અહીં જ્યાં ત્રિકોણ લખ્યા છે તે બધાજ જે તે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ છે તેમ સમજવું.)

ત્રિકોણ Δ ABCના સમતલમાં બિંદુ P ના ત્રિકોણ સાપેક્ષ ક્ષેત્રીય યામો નિમ્ન ગુણોત્તરો દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

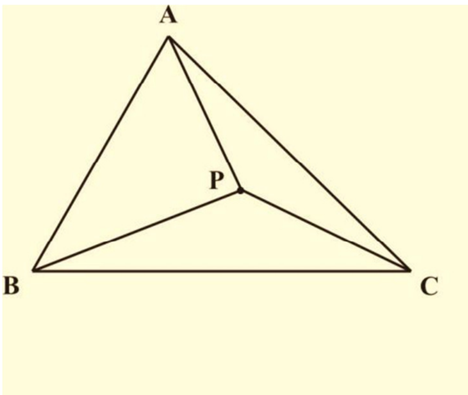
$$X = \frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}, Y = \frac{\Delta PCA}{\Delta BCA}, Z = \frac{\Delta PAB}{\Delta CAB}$$

X, Y, Zનાં ધન કે ઋણ ચિહ્નો નિમ્નવર્ણિત શરતો દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

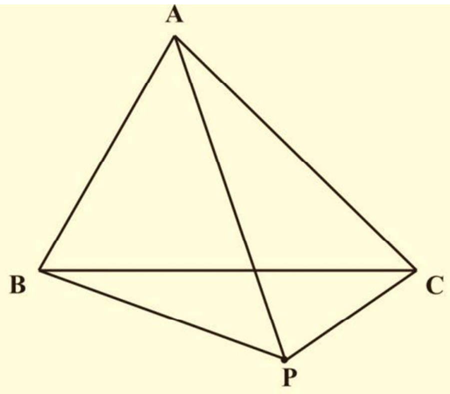
જો બિંદુ P તથા ત્રિકોણનું જે શિરોબિંદુ તે જ શિરોબિંદુની સામેની બાજુની એક જ તરફ હોય તે શિરોબિંદુ સંદર્ભે P નો ક્ષેત્રીય યામ ધન છે અન્યથા ઋણ છે.

બિંદુ P ABCની અંદર કે બહાર હોય તેવી સ્થિતિઓ આકૃતિ-1, આકૃતિ-2, આકૃતિ-3 તથા આકૃતિ-4 પ્રમાણે છે.

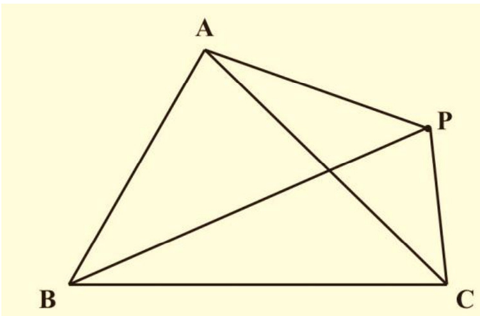
નોંધ : Δ ABC = Δ CAB = Δ BCA ધન છે. ક્ષેત્રીય યામોનાં ચિહ્નોની વ્યાખ્યા પ્રમાણે



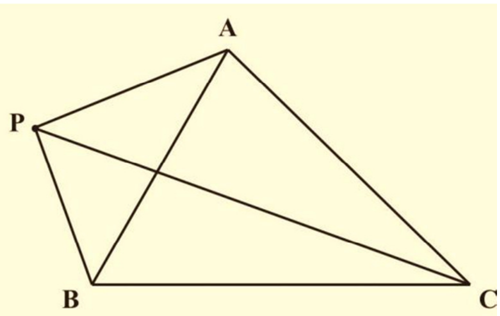
આકૃતિ-1



આકૃતિ-2



આકૃતિ-3



આકૃતિ-4

આકૃતિ-1 માટે X, Y, Z ત્રણેયના અંશ ધન છે.

આકૃતિ-2 માટે X નો અંશ ઋણ, આકૃતિ-3 માટે Y નો અંશ ઋણ છે. આકૃતિ-4 માટે Z નો અંશ ઋણ છે.
તેથી આકૃતિ-1 માટે X, Y, Z ત્રણેય ધન છે. આકૃતિ-2 માટે X ઋણ તથા Y, Z ધન છે. આકૃતિ-3 માટે Y ઋણ તથા X, Z ધન છે. આકૃતિ-4 માટે Z ઋણ તથા X, Y ધન છે.

આકૃતિ-1 માટે $X + Y + Z = \frac{\Delta PBC + \Delta PCA + \Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABC} = 1$ તેથી $X + Y + Z = 1$

આકૃતિ-2 માટે $X + Y + Z = \frac{-\Delta PBC + \Delta PCA + \Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABC} = 1$ તેથી $X + Y + Z = 1$

આકૃતિ-3 માટે $X+Y+Z=\dfrac{\Delta PBC-\ \Delta PCA+\Delta PAB}{\Delta ABC}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$ તેથી $X+Y+Z=1$

આકૃતિ-4 માટે $X+Y+Z=\dfrac{\Delta PBC+\ \Delta PCA-\Delta PAB}{\Delta ABC}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$

તેથી ત્રિકોણ ABC ના સમતલમાં બિંદુ P ની સર્વસ્થિતિ માટે X + Y + Z = 1 છે.

- ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેનાં શિરોબિંદુઓના ક્ષેત્રીય યામો :

જો P = A તો Δ PBC = Δ ABC તથા

Δ PCA = Δ PAB = 0

તેથી Δ ABC સાપેક્ષ શિરોબિંદુ Aના ક્ષેત્રીય યામો

$\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1,\qquad \dfrac{\Delta PCA}{\Delta ABC}=0,\qquad \dfrac{\Delta PAB}{\Delta ABC}=0$

તેથી Δ ABC સાપેક્ષ A (1, 0, 0) છે. તે જ પ્રમાણે B (0, 1, 0) તથા C (0, 0, 1) છે.

- ત્રિકોણ ABCની બાજુઓ $\overline{BC},\overline{CA}$ તથા $\overline{AB}$ મધ્યબિંદુઓ D, E, Fના તથા ત્રિકોણ ABCના મધ્યકેન્દ્રના ક્ષેત્રીય યામો :

ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ Dના ક્ષેત્રીય યામો

$\dfrac{\Delta DBC}{\Delta ABC},\dfrac{\Delta DCA}{\Delta ABC},\dfrac{\Delta DAB}{\Delta ABC},$ B, D, C સમરેખ બિંદુઓ છે

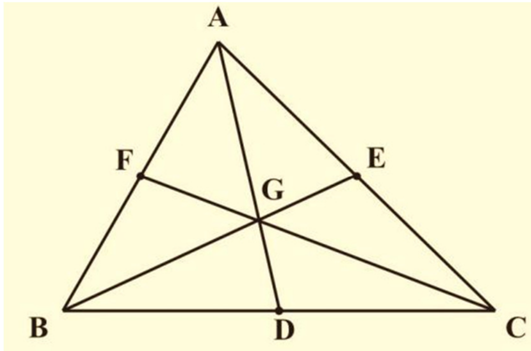
તેથી Δ DBC = 0, $\overline{AD},\overline{BD}$ પરની મધ્યગા છે, તેથી

$\Delta DCA=\Delta DAB=\frac{1}{2}\Delta ABC$

તેથી $\dfrac{\Delta DBC}{\Delta ABC}=0,\ \dfrac{\Delta DCA}{\Delta ABC}=\dfrac{\Delta DAB}{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}$

તેથી ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ $D\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ છે.

તે જ પ્રમાણે $E\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\ F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},0\right)$ છે.



આકૃતિ-5

ત્રિકોણ ABCની મધ્યગાઓ $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ સંગામી છે, તેમનું સંગમન બિંદુ G ત્રિકોણ ABCનું મધ્યકેન્દ્ર કહેવાય છે. શાળાભૂમિતિની માહિતી પ્રમાણે

$\Delta GBC=\Delta GCA=\Delta GAB=\frac{1}{3}\Delta ABC$

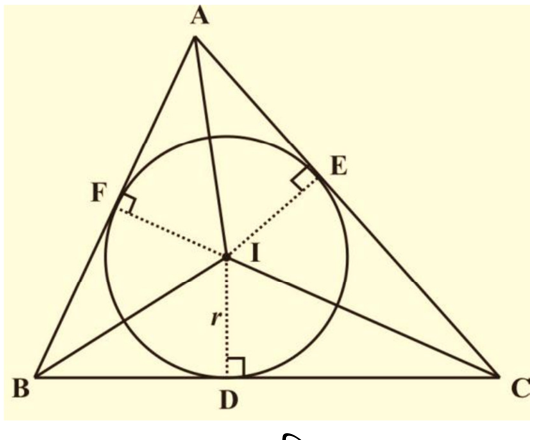
તેથી ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ G ના ક્ષેત્રીય યામો

$\dfrac{\Delta GBC}{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3},\qquad \dfrac{\Delta GCA}{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\qquad \dfrac{\Delta GAB}{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}$

તેથી ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેનું મધ્યકેન્દ્ર $G\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ છે.

- ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેના અંતઃકેન્દ્રના ક્ષેત્રીય યામો :

ત્રિકોણ ABCના ખૂણાઓ $\angle A,\ \angle B,\ \angle C$ના અંતઃદુભાજકો સંગામી હોય છે, તેમનું સંગમનબિંદુ I ત્રિકોણ ABCનું અંતઃકેન્દ્ર કહેવાય છે, તે ત્રિકોણની બાજુઓથી સમાન અંતરે હોય છે. આ અંતર r હોય તો I કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાનું વર્તુળ ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુને સ્પર્શે છે. જો ID⊥BC, IE⊥CA તથા IF⊥AB હોય તો ID = IE = IF = r થશે વર્તુળ (I, r) ત્રિકોણ ABCનું અંતઃવર્તુળ કહેવાય છે.



આકૃતિ-6

ત્રિકોણ ABCમાં BC = a, CA = b તથા AB = c લો,

હવે, $\Delta ABC = \Delta IBC + \Delta ICA + \Delta IAB$

$$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \quad = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેના અંતઃકેન્દ્ર Iના ક્ષેત્રીય યામો

$$\left(\frac{\Delta IBC}{\Delta ABC}, \frac{\Delta ICA}{\Delta ABC}, \frac{\Delta IAB}{\Delta ABC}\right)$$

હવે $\dfrac{\Delta IBC}{\Delta ABC} = \dfrac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}r(a+b+c)} = \dfrac{a}{a+b+c}$

તે જ પ્રમાણે $\dfrac{\Delta ICA}{\Delta ABC} = \dfrac{b}{a+b+c}, \quad \dfrac{\Delta IAB}{\Delta ABC} = \dfrac{c}{a+b+c}$

તેથી ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેનું અંતઃકેન્દ્ર $I = \left(\dfrac{a}{a+b+c}, \dfrac{b}{a+b+c}, \dfrac{c}{a+b+c}\right)$ છે.

- **ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેના પરિકેન્દ્રના ક્ષેત્રીય યામો :**

ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓ $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ ના લંબદ્વિભાજકો સંગામી હોય છે. તેમનું સંગમનબિંદુ P ત્રિકોણના ત્રણેય શિરોબિંદુથી સમાન અંતરે હોય છે, તેથી PA = PB = PC = R ત્રિજ્યાનું વર્તુળ ત્રિકોણ ABC નું પરિવર્તુળ કહેવાય છે તથા તે વર્તુળનું કેન્દ્ર P ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર કહેવાય છે. R પરિવર્તુળની પરિત્રિજ્યા કહેવાય છે.

આકૃતિ-7 માં ત્રિકોણ ABCના પરિવર્તુળનું કેન્દ્ર P છે. ત્રિકોણની બાજુઓ BC = a, CA = b, AB = c છે. ઉચ્ચતર માધ્યમિકની ભૂમિતિ તથા ત્રિકોણમિતિના નિમ્ન પરિણામો ઉપયોગમાં લેવાયા છે.

માપ $\angle BPC = 2A$, $\dfrac{a}{sinA} = \dfrac{b}{sinB} = \dfrac{c}{sinC} = 2R.$

ત્રિકોણ ABC ની અર્ધપરિમિતિ $\dfrac{a+b+c}{2}$

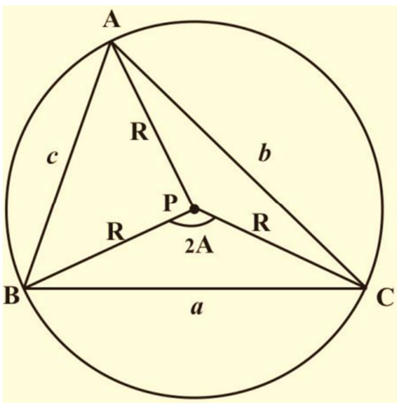
ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

sin 2A = 2sinAcosA

ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેના પરિકેન્દ્ર Pના ક્ષેત્રીય યામો

$$\left(\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}, \frac{\Delta PCA}{\Delta ABC}, \frac{\Delta PAB}{\Delta ABC}\right)$$

$$\begin{aligned}\Delta PBC &= \frac{1}{2}\,PB.PC\ \sin 2A \\ &= \frac{1}{2}R^2 \times 2\ \sin A\cos A \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2sinA}\right)^2 \cdot 2\sin A\cos A \\ &= \frac{1}{4}\frac{a^2}{sin^2A} \cdot \sin A\cos A \\ &= \frac{1}{4}a^2 \cot A\end{aligned}$$



આકૃતિ-7

તેથી $\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\cot A}{4\Delta}$, તે જ પ્રમાણે

$\dfrac{\Delta PCA}{\Delta ABC} = \dfrac{b^2\cot B}{4\Delta}, \dfrac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \dfrac{c^2\cot C}{4\Delta}$

તેથી ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેનું પરિકેન્દ્ર

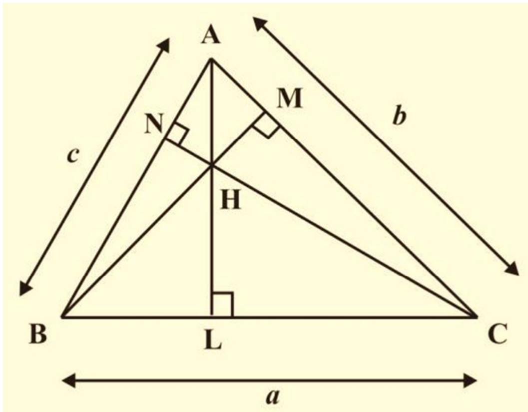
$P\left(\dfrac{a^2\cot A}{4\Delta}, \dfrac{b^2\cot B}{4\Delta}, \dfrac{c^2\cot C}{4\Delta}\right)$ છે.

● ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેના લંબકેન્દ્રના ક્ષેત્રીય યામો.

ત્રિકોણ ABCની બાજુઓ, $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$નાં માપ BC=$a$, CA=$b$ તથા AB=c લો. $\overline{AL} \perp \overline{BC}, \overline{BM} \perp \overline{CA}$, તથા $\overline{CN} \perp \overline{AB}$, છે, $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ ત્રિકોણની બાજુઓ પરના વેધ કહેવાય છે. આ વેધો સંગામી છે. તેમનું સંગમનબિંદુ H ત્રિકોણ ABCનું લંબકેન્દ્ર કહેવાય છે.

ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેના ક્ષેત્રીય યામો $\frac{\Delta HBC}{\Delta ABC}, \frac{\Delta HCA}{\Delta ABC}, \frac{\Delta HAB}{\Delta ABC}$ છે.

હવે $\frac{\Delta HBC}{\Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2} HL.BC}{\frac{1}{2} AL.BC} = \frac{HL}{AL}$



આકૃતિ-8

HL = BL tan ∠ HBL

= BL.tan (90° –C)

= BL cot C

= AB cos B cot C

= c cos B cot C

$= 2R \frac{SinC\ cosB\ cosC}{sinC}$

= 2 R cos B.cos C

$\frac{AL}{AB}$ = sinB.

∴ AL = c sin B

= 2R sin C . sin B

$\therefore \frac{HL}{AL} = \frac{2R\ cosB\ cosC}{2R\ sinB\ cinC}$

= cotB.cotC

$\therefore \frac{\Delta HBC}{\Delta ABC}$ = cotB cotC તે જ પ્રમાણે $\frac{\Delta HCA}{\Delta ABC}$ = cotC cotA તથા $\frac{\Delta HAB}{\Delta ABC}$ = cotA cotB

તેથી ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ તેનું લંબકેન્દ્ર : H (cotB·cotC, cotC·cotA, cotA·cotB)

● કાર્તેઝીય તથા ક્ષેત્રીયયામ સંબંધી સૂત્રો :

ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુઓ A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) તથા C(x_3,y_3) હોય તથા તે જ ત્રિકોણના સાપેક્ષ સમતલમાંનું બિંદુ P(x,y) લો તથા ત્રિકોણ સાપેક્ષ Pના ક્ષેત્રીય યામો X,Y,Z લો. ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ.

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ Δ લો. (અહીં Δ એ નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય છે, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ દર્શાવતું ચિહ્ન નથી)

હવે,

$X = \frac{\frac{1}{2}\Delta PBC}{\frac{1}{2}\Delta ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \div \frac{1}{2}\Delta$ તેથી

X Δ = $x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2y_3 - x_3\, y_2)$ તે જ પ્રમાણે

Y Δ = $x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3y_1 - x_1y_3)$,

Z Δ = $x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)$

ઉપરોક્ત ત્રણ પરિણામોને અનુક્રમે x_1, x_2, x_3 વડે ગુણીને ઉમેરી સાદુંરૂપ આપતા.

x Δ = Δ (x_1X + x_2Y + x_3Z) તેથી

$x = x_1X + x_2Y + x_3Z$ મળશે.

તે જ પ્રમાણે,

$y = (y_1X + y_2X + y_3Z)$ મળશે.

આ ઉપરોક્ત બે અગત્યના સૂત્રો : $x = (x_1X + x_2\,Y + x_3\,Z)$

$y = (y_1X + y_2Y + y_3Z)$નો નિમ્ન ચર્ચાઓમાં ઉપયોગ કરવાનાં છે.

નોંધ :

(1) કાર્તેઝીય યામ ભૂમિતિના પુસ્તકોમાં ત્રિકોણ ABC ના શિરોબિંદુઓ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ હોય તો

(1) તેની બાજુઓ $\overline{BC}, \overline{CA}$ તથા $\overline{AB}$નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે

$D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$, $E\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$ તથા

$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ તથા ત્રિકોણ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર

$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$નો ઉલ્લેખ હોય છે.

(2) BC = a, CA = b, AB = c હોય તો ત્રિકોણ ABC નું અંતઃકેન્દ્ર

$I\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$નો ઉલ્લેખ હોય છે.

A, B, Cના કાર્તેઝીય યામો તથા તેની બાજુઓનો ઉપયોગ કરી ત્રિકોણના પરિકેન્દ્ર તથા લંબકેન્દ્રના કાર્તેઝીય યામોનું અન્વેષણ સૈદ્ધાંતિક રીતે શક્ય છે. પણ ગણતરી અતિશય જટિલ રૂપમાં હોવાથી તેમનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવ્યો નથી.

(i) ક્ષેત્રીય યામોની ઉપરોક્ત ચર્ચામાં ત્રિકોણના ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં શિરોબિંદુઓ A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) બાજુઓ $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$નાં મધ્યબિંદુઓના ક્ષેત્રીય યામ $D\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ તથા ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના ક્ષેત્રીય યામરૂપ $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ સાબિત કરવામાં આવેલા છે.

(ii) BC = a, CA = b, AB = c હોય તો ત્રિકોણ ABCના અંતઃકેન્દ્રના ક્ષેત્રીય યામ

$I = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right)$ સાબિત કરવામાં આવેલા છે.

(iii)ત્રિકોણના પરિકેન્દ્ર Pના ક્ષેત્રીય યામ $P\left(\frac{a^2 cotA}{4\Delta}, \frac{b^2 cotB}{4\Delta}, \frac{c^2 cotC}{4\Delta}\right)$ સાબિત કરવામાં આવેલા છે.

(iv)તેના લંબકેન્દ્ર Hના ક્ષેત્રીય યામ H(cotBcotC, cotCcotA, cotAcotB) સાબિત કરવામાં આવેલા છે.

(v) ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુ $A(x_1y_1)$, $B(x_2y_2)$, $C(x_3y_3)$ હોય તથા ત્રિકોણ ABC નું બિંદુ $P(x, y)$ ત્રિકોણ ABC સાપેક્ષ ક્ષેત્રીય યામમાં P(X, Y, Z) હોય તો $x = x_1X + x_2Y + x_3Z$, $y_1X + y_2X + y_3Z$ અગાઉ સાબિત કરવામાં આવેલ છે.

હવે ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં A(1, 0, 0) છે તેમાં X = 1, Y = 0, Z = 0

તેથી કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $A(x_1X + x_2Y + x_3Z, y_1X + y_2Y + y_3Z) = A(x_1\ y_1)$

(1) આમ ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં, A(1,0,0) = કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $A(x_1y_1)$ તે જ પ્રમાણે

(2) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં B(0, 1, 0) = કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $B(x_2y_2)$ તથા

(3) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં C(0, 0, 1) = કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $C(x_3, y_3)$

તે જ પ્રમાણે $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$નાં મધ્યબિંદુઓ D, E, F માટે

(4) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં $D\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ = કાર્તેઝિય યામ રૂપમાં $D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

(5) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં $E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $E\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$

(6) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

(7) ત્રિકોણ ABCના મધ્યકેન્દ્ર ક્ષેત્રીય યામ રૂપ $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

= કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્ર I, પરિકેન્દ્ર P તથા લંબકેન્દ્ર H માટે

(8) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં $I = \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$

કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં $I\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

(9) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં પરિકેન્દ્ર $P\left(\frac{a^2cotA}{4\Delta}, \frac{b^2cotB}{4\Delta}, \frac{c^2cotC}{4\Delta}\right)$

કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં પરિકેન્દ્ર

$$P\left(\frac{a^2cotA}{4\Delta}\cdot x_1 + \frac{b^2cotB}{4\Delta}\cdot x_2 + \frac{c^2cotC}{4\Delta}\cdot x_3, \frac{a^2cotA}{4\Delta}\cdot y_1 + \frac{b^2cotB}{4\Delta}\cdot y_2 + \frac{c^2cotC}{4\Delta}\cdot y_3\right)$$

(10) ક્ષેત્રીય યામ રૂપમાં લંબકેન્દ્ર : H (cot B cot C, cot C cot A, + x_3 cot A cot B)

કાર્તેઝીય યામ રૂપમાં લંબકેન્દ્ર :

H ($x_1$cot B cot C+x_2 cot C cot A+x_3 cot A cot B, y_1 cot B cot C+y_2 cot C cot A+y_3 cot A cot B)

નોંધ : ઉપરોક્ત ચર્ચામાં જણાવેલું છે કે ત્રિકોણના પરિકેન્દ્ર P તથા લંબકેન્દ્ર Hના કાર્તેઝીય યામોનો ઉલ્લેખ નથી. તેનું કારણ તે માટે કરવામાં આવેલી ગણતરી ખૂબ જ જટિલ હોય છે. પણ P અને Hના ક્ષેત્રીય યામો પરથી પ્રાપ્ત તથા કાર્તેઝીય યામો સુગમતાથી પ્રાપ્ત થાય છે તથા સુંદર રૂપમાં પણ પ્રાપ્ત થાય છે.

સંપાદકીય નોંધ :

(1) ક્ષેત્રીય યામ માટે અંગ્રેજી શબ્દ છે Areal Coordinates જે ત્રિકોણના સંદર્ભમાં Barycentric coordinates છે. Barycentric coordinatesનો અભ્યાસ કરવા માટે ગુગલ પર, વાઈકીપીડિયામાં, વુલફ્રેમમાં અને બીજી ઘણી બધી વેબસાઈટ્સમાં પ્રાથમિક માહિતીથી શરૂ કરીને રિસર્ચ પેપર્સ સુધીનું સંદર્ભ સાહિત્ય ઉપલબ્ધ છે. જિજ્ઞાસુ વાચકો આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી શકે.

(2) એકંદરે લેખ સરસ છે. કાર્ટેઝીય યામ પધ્ધતિ સિવાય પણ બીજી યામ પધ્ધતિઓ છે તેનો ખ્યાલ આપવાનો અહીં સફળ પ્રયત્ન છે. લેખમાં ઘણી બધી પુનરોક્તિઓ છે જે નિવારી શકાઇ હોત. અમે થોડી ઘણી પુનરોક્તિઓ નિવારી છે. મૂળ લેખ ટાઇપ કરેલાં 13 પાનાંનો છે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ :

ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા જેમ્સ મેનાર્ડ (James Maynard)

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, VNSGU, સુરત. (M) 99742 30088

આબેલ પુરસ્કાર પછી સૌથી વધુ પ્રતિષ્ઠિત ગણાતો ફિલ્ડ્સમેડલ દર ચાર વર્ષે 40 વર્ષથી ઓછી આયુ ધરાવતા ગણિતશાસ્ત્રીને તેની વર્તમાનની ગાણિતિક સિદ્ધિઓને ઓળખ આપવાના હેતુથી એનાયત કરવામાં આવે છે. **'મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ'** લેખશ્રેણી હેઠળ આ વખતે આપણે વિશ્લેષણાત્મક સંખ્યા ગણિત (Analytic Number Theory)ના નિષ્ણાત અને 2022 ના ફિલ્ડ્સ મેડલ વિજેતા જેમ્સ એલેક્ઝાન્ડર મેનાર્ડ (James Alexander Maynard)નાં જીવન અને કાર્યોની વિસ્તૃત માહિતી મેળવીશું.

સદીઓથી ગણિતશાસ્ત્રીઓને મૂંઝવતા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના પ્રશ્નોના જવાબો મેળવી પોતાના ક્ષેત્રની ટોચ પર ઝડપથી પહોંચનાર જેમ્સ મેનાર્ડનો જન્મ 1987માં 10 જૂનના રોજ ઈંગ્લેન્ડના ચેમ્સફર્ડમાં થયો હતો. બાળપણથી જ જેમ્સ એમને કહેવાતી દરેક વાતને સ્વીકારવામાં માનતા નહોતા અને દરેક દલીલ પાછળનાં કારણો જાણવા ઉત્સુક જ નહીં, ઘણીવાર હઠીલા બનતા. જ્યારે તેઓ માત્ર ત્રણ વર્ષના હતા ત્યારે તેમના વિકાસની તપાસ કરવા માટે તેમના ઘરે આરોગ્ય મુલાકાતી આવ્યા હતા. નાનાં બાળકો માટે આવી મુલાકાતો ચેમ્સફર્ડમાં નિયમિત થતી. જેમ્સને આ મુલાકાતી અને તેમની પધ્ધતિ બરાબર ન લાગી. તેથી જ્યારે તેણીએ જેમ્સને Shape Sortingનું કામ આપ્યું, ત્યારે જેમ્સે હેતુપૂર્વક આકારોને આશ્ચર્યજનક ક્રમમાં મૂક્યાં અને પછી વિગતવાર સમજાવ્યું કે શા માટે તેમનો ઉકેલ વધુ રસપ્રદ હતો.

મેનાર્ડના સમગ્ર શાળા જીવન દરમિયાન આવા કિસ્સા બનતા રહ્યા. તેમનો શાળામાં આગ્રહ રહેતો કે ક્યાં તો એમને પોતાનું કામ કરવાની છૂટ આપો અથવા તેમના પ્રશ્નોનો વ્યાજબી જવાબ આપો. જેમ્સના મતે તેમના શિક્ષકો તેમનાથી હંમેશાં પરેશાન રહેતા.

કદાચ તેમના આ સ્વભાવને કારણે જ્યારે તેમણે 26 વર્ષની ઉંમરે Ph.Dની પદવી મેળવ્યા બાદ પોસ્ટડોક્ટરલ માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા વિશેનો સૌથી કેન્દ્રીય પ્રશ્નોમાંનો એક પસંદ કર્યો અને તે માટે તેમના સલાહકારે તેમને ચેતવણી પણ આપી કે આ પ્રશ્ન પાછળ જેમ્સ માત્ર પોતાનો સમય બગાડી રહ્યો છે, તો જેમ્સે તેમને જવાબ આપ્યો કે તે આ પ્રશ્ન અજમાવી તો જોશે જ અને પછી નક્કી કરશે કે આ પ્રશ્ન તેમને ક્યાં લઈ જઈ રહ્યો છે. આ પ્રશ્ન તેમને એક પ્રમેય સુધી લઈ ગયો, જેણે ગણિતશાસ્ત્રીઓ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ વચ્ચેના અંતર વિશે કેવી રીતે વિચારે છે તેના મુખ્ય પુનઃમૂલ્યાંકનને પ્રોત્સાહન આપ્યું.

વિશ્લેષણાત્મક સંખ્યા સિદ્ધાંત પર પુસ્તક લખી રહેલા બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી એન્ડ્ર્યુ ગ્રાનવિલ ફરિયાદ કરતાં કહે છે કે મેનાર્ડના કારણે તેમના પુસ્તક લેખનનું કાર્ય ધીમું પડી ગયું છે અને મેનાર્ડના કારણે જ તેમણે તેમનાં પુસ્તકમાં બીજા 150થી વધુ પૃષ્ઠો ઉમેરવાં પડ્યાં છે.

મેનાર્ડને જે પ્રશ્નમાં પોતાના પોસ્ટડૉક્ટરલ સમયે રસ પડ્યો હતો તે ગણિતજગતમાં તરીકે ઓળખાય છે. તેમને આ પ્રશ્નમાં રસ પડવાનું મુખ્ય કારણ એ છે કે, આ પ્રશ્ન જેટલો સરળ અને મૂળભૂત છે એટલો જ સંપૂર્ણપણે રહસ્યમય પણ છે.

જ્યારે બે સતત અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ વચ્ચેનો તફાવત બે હોય ત્યારે તે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ 'Twin Primes' તરીકે ઓળખાય છે. ગણિત શાસ્ત્રીઓ માને છે કે Twin Primes અનંત જોડીઓ છે અને આ માન્યતા જ Twin Primes Conjecture તરીકે જ ઓળખાય છે. આ Conjectureની સાબિતી માટે ગણિતશાસ્ત્રીઓ સદીઓથી પ્રયત્ન કરી રહ્યા છે. અને તે માટે 2013માં એક મોટી સફળતા ત્યારે મળી જ્યારે યિટાન ગ્નંગ નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ સાબિત કર્યું કે 70 મિલિયનથી અલગ પડતી અવિભાજ્ય સંખ્યાની જોડીઓ અસંખ્ય છે.

ગણિતશાસ્ત્રીઓ માટે આ એક મોટી સફળતા હતી. કારણ કે આ પહેલી વખત હતું જ્યારે તેમની પાસે કોઈ મર્યાદિત સંખ્યા અંતરનો પુરાવો હતો. ત્યાર બાદ જેમ્સે પોતાના પોસ્ટડૉક્ટર સમયે જે પ્રમેયની સાબિતી આપી તેના દ્વારા હવે આ સંખ્યા અંતર 600થી ઓછું થઈ ગયું છે. જેમ્સ આ પ્રમેયની સાબિતી આપતી વખતે યિટાનની સાબિતીની પદ્ધતિથી સાવ અલગ જ પદ્ધતિ અપનાવી હતી, જે તેમની નવીન વિચારસણી બતાવે છે. જ્યારે તેમણે આ પ્રમેયને પ્રકાશન માટે આપ્યું ત્યારે તેમના સલાહકારે તેમને સૂચિત કર્યું કે જેમ્સે એ રીતે સાબિતીનું લેખન કરવું જોઈએ જેથી કોઈને પાછળથી પ્રશ્નો ઉઠાવવાનો મોકો ના મળે. જેમ્સ તે વખતે વધુ પ્રચલિત ન હતા અને આ સૂચન પાછળનો હેતું તેમના કામની કોઈ અવગણના ના કરી શકે તે હતો.

આ જ સમયગાળા દરમિયાન ઑગસ્ટ 2014માં જેમ્સે અવિભાજ્ય સંખ્યા વચ્ચેના મોટા અંતર પરના લાંબા સમયથી ચાલતા અનુમાનનું નિરાકરણ કર્યું અને અત્યાર સુધી આપવામાં આવેલું સૌથી મોટું મેળવ્યું. 2014માં જ તેમને પ્રખ્યાત રામાનુજ પુરસ્કાર એનાયત કરવામાં આવ્યું.

2015 માં તેમને લંડન મૅથેમૅટિકલ સોસાયટી દ્વારા યુવા ગણિતશાસ્ત્રીઓને પ્રોત્સાહિત કરવા માટે આપવામાં આવતું 'Whitehead Prize' એનાયત કરવામાં આવ્યું. 2016માં મેનાર્ડને Europien Methemetical Sosciety દ્વારા 35 વર્ષથી ઓછી આયું ધરાવતા યુવાન સંશોધકો દ્વારા ગણિતમાં ઉત્કૃષ્ટ યોગદાનને માન્યતા આપવા માટે એનાયત કરવામાં આવતું EMS Prize આપવામાં આવ્યું. આ જ વર્ષે તેમણે બતાવ્યું કે કોઈપણ આપેલા દશાંશ અંક માટે ત્યાં અનંતપણે ઘણી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે કે જે તેમના દશાંશ વિસ્તરણમાં તે દશાંશ અંક ધરાવતા નથી.

Number Theoryમાં નોંધપાત્ર સંશોધન કરવા બદલ અમેરિકન મૅથેમૅટિકલ સોસાયટી દ્વારા તેમને 2020માં Cole Prize એનાયત થયું.

2022માં જેમ્સને ફિલ્ડ્સ મેડલ એનાયત થયો આ મેડલની અધિકૃત Website મુજબ James Mayanard is awoaroled the fields Medal 2022 for contribution to analytic number theory, which have led to major advance in the unerstanding of the structure of prime numbers and in Diophantine approximation.

જેમ્સના પત્ની ઈલેનોર ગ્રાન્ટ એક મેડિકલ ડૉક્ટર છે અને તેમને એક સંતાન પણ છે. જેમ્સ ગેરહાજર માનસ ધરાવતા પ્રોફેસરની સ્ટીરિયોટાઈપને અનુરૂપ છે. તે પોતાની જાતને જરા પણ ફેશન-લક્ષી નથી માનતા અને લગભગ એક જ શૈલીનાં કપડાં, ખુલ્લા કોલરવાળાં સફેદ શર્ટ અને જીન્સ પહેરે છે. એક વખત તેમના પ્રવચનમાં ટીખળ કરવા હાજરી આપતા તમામ ગણિતશાસ્ત્રીઓ મેનાર્ડ યુનિફોર્મ પહેરીને આવ્યા હતા. મેનાર્ડ ખૂબ જ આનંદી, પ્રેમાળ અને આઉટગોઈંગ સ્વભાવના છે.

ગણિતની સાથે મેનાર્ડ ફોટોગ્રાફીના પણ શોખીન છે. કામ માટે તે જે શહેરોની મુલાકાત લે છે તેની સાથે વધુ જોડાણ અનુભવવા તેમણે થોડાં વર્ષો પહેલાં ફોટોગ્રાફી શરૂ કરી હતી, જે હવે ઘેલછામાં ફેરવાઈ ગઈ છે. મેનાર્ડના પિતા જણાવે છે કે જ્યારે જેમ્સને કોઈ વિષયમાં રસપડી જાય પછી જ્યાં સુધી તે તેની ક્ષમતાની મર્યાદા સુધી પહોંચી ન જાય ત્યાં સુધી તે રોકાતા નથી.પરંતુ તે હજુ સુધી ગણિતમાં તે બિંદુએ પહોંચ્યા નથી અને કદાચ એ જ વાત જેમ્સને દરેક વખતે કંઈક નવાં પરિણામો લાવવા માટે પ્રેરે છે.

સંદર્ભ

1. mathunion.org/imu-awardss/fields-medal
2. quatamagazine.org/james-maynard-solves-the-hardest-easy-math-problems-20200701/
3. en.wikipedia.org/wiki/James-Mayanard-mathematician

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ-6

કેટલાંક ભૌમિતિક નિરૂપણો-2

પી. કે. વ્યાસ

(M) 98255 77784 Email : vyaspk123@gmail.com

સુગણિતમ્ સળંગ અંક 310, E-Copy-5 માં આપણે ત્રિકોણીય સંખ્યાનાં કેટલાંક ભૌમિતિક નિરૂપણો જોયાં હતાં. એ લેખમાં શા માટે $\frac{n(n+1)}{2}$ પ્રકારની ઘનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ કહેવામાં આવે છે ? તે પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવામાં આવ્યો હતો. એ જ લેખમાં આગળ જતાં આપણે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના એક વિશેષ ગુણધર્મ : $9\Delta_n+1 = \Delta_{3n+1}$નું ભૌમિતિક નિરૂપણ જુદી જુદી ત્રણ રીતે આપ્યું હતું.

અહીં આ લેખમાં અમે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના બીજા એક બહુ અગત્યના ગુણધર્મનું ભૌમિતિક નિરૂપણ આપવાના છીએ. આ ગુણધર્મને અગત્યનો ગુણધર્મ એટલા માટે કહ્યો છે કે આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના વધારે જટિલ ગુણધર્મો સાબિત કરી શકાય છે. આ લેખશ્રેણીના પહેલા ત્રણ લેખોમાં આ ગુણધર્મની ગાણિતિક સાબિતી અને તેનું ઉપયોજન પણ કરવામાં આવ્યું છે.

ગુણધર્મ છે : $8\Delta_n+1 = (2n+1)^2$

એટલે કોઈપણ ત્રિકોણીય સંખ્યાનાં આઠ ગણાં કરી 1 ઉમેરવામાં આવે તો હંમેશાં ચોરસ સંખ્યા (પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા) મળે.

બીજી રીતે કહીએ તો $8\Delta_n+1 = \square_r$, જ્યાં r = $2n+1$ અને $\square$ એ ચોરસ સંખ્યા દર્શાવતો સંકેત છે.

આપણે એક વ્યાખ્યાથી શરૂઆત કરીએ.

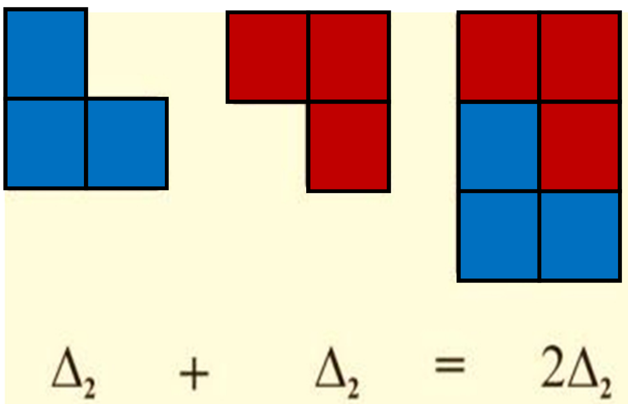
ઓબલોંગ સંખ્યા (Oblong Number)

અહીં ઓબલોંગ શબ્દનો ગુજરાતી પર્યાય નથી લખ્યો. અમારી પાસે જે અંગ્રેજી-ગુજરાતી ભાષાંતર કોષ છે તેમાં Oblong શબ્દનું ભાષાંતર 'લંબચોરસ' આપેલું છે. Rectangle શબ્દનું ભાષાંતર પણ લંબચોરસ આપેલું છે. અને 'લંબચોરસ' શબ્દ ગેરસમજૂતી ઊભી કરે છે. આપણે લંબચોરસ શબ્દ જ્યારે ઉપયોગમાં લઈએ છીએ ત્યારે આકૃતિની પાસપાસેની બાજુઓનાં માપ ઉપર કોઈ પ્રતિબંધ મૂકતાં નથી. 15×10 નો લંબચોરસ એટલે જેની લંબાઈ 15 અને પહોળાઈ 10 હોય તેવો લંબચોરસ. અહીં Oblong આકૃતિ પણ લંબચોરસ છે પણ તે એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો લંબચોરસ છે. Oblong લંબચોરસમાં પાસપાસેની બાજુઓનો તફાવત 1 હોય છે, જેમ કે 5×4 ; 13×12,

વ્યાપક રીતે $(n+1) \times n$ માપના લંબચોરસને આપણે ઓબલોંગ આકૃતિ (કે ઓબલોંગ લંબચોરસ) કહીશું.

ગુણધર્મ 1 : 2Δ એ ઓબલોંગ લંબચોરસ દર્શાવે છે.

સાબિતી સરળ છે : $2\Delta_n = \frac{2 \cdot n\,(n+1)}{2} = (n+1) \cdot n$



આકૃતિ-1

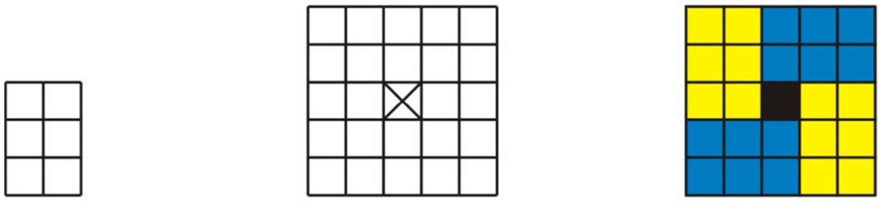
ભૌમિતિક રીતે જોઈએ તો n=2 લેતાં,

$2\Delta_2 = \Delta_2 + \Delta_2 = 3 + 3 = 3 \times 2$

હવે ચાર એકરૂપ ઓબલોંગ આકૃતિઓ લઈએ તો સ્પષ્ટ છે કે $4\,(2\Delta_n) = 8\Delta_n = 4n^2 + 4n$

અને 4 એકરૂપ ઓબલોંગ આકૃતિઓ લઈ 1 ઉમેરીએ તો $4\,(2\Delta_n) + 1 = 4n^2 + 4n+1 = (2n+1)^2$ = ચોરસ

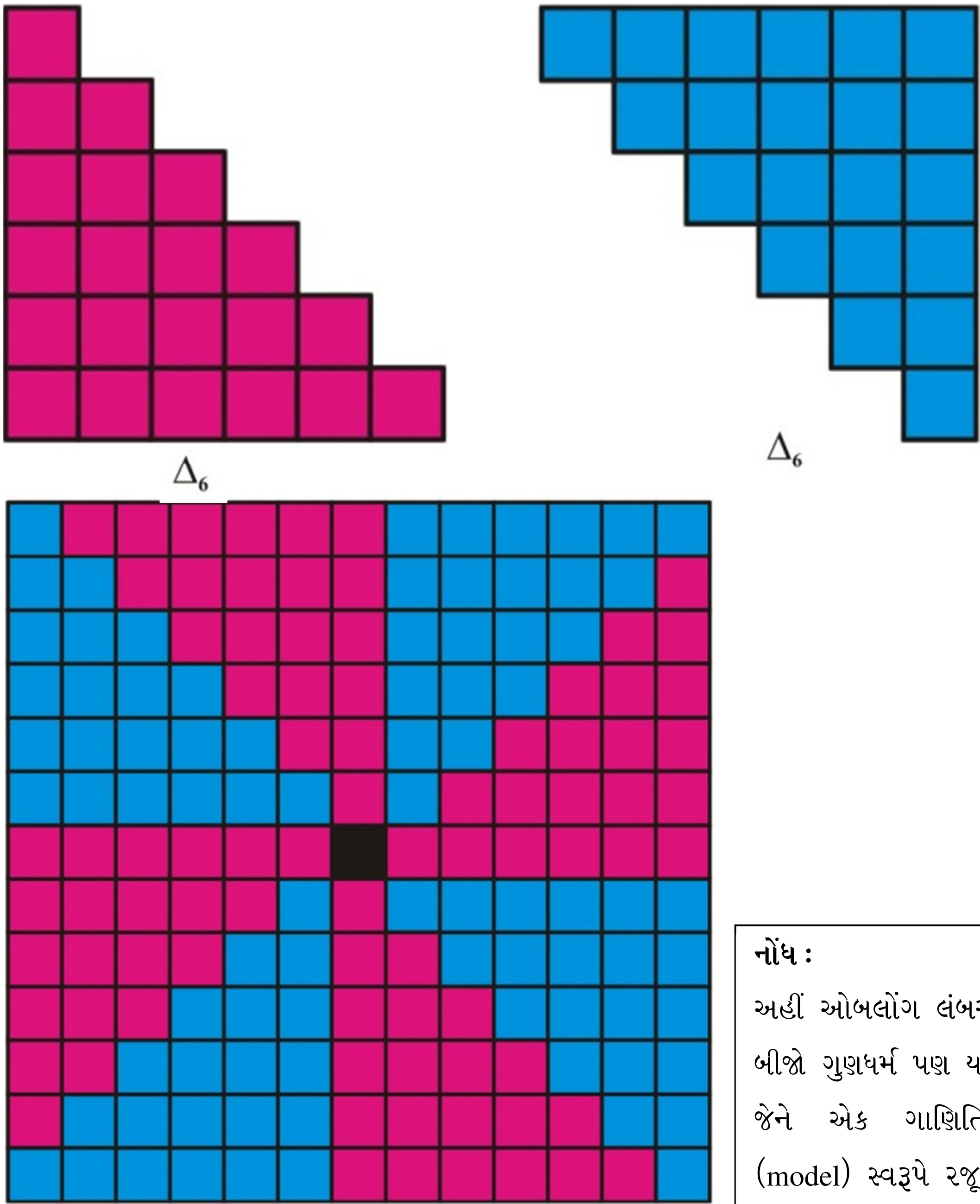
n=2 લઈ, ઉપરોક્ત ગુણધર્મનું ભૌમિતિક નિરૂપણ કરીએ. (આકૃતિ-2માં દર્શાવેલ ગોઠવણી મુજબ)



$2\Delta_2$ x 4 = $8\Delta_2$ $8\Delta_2 + 1 = (2 \times 2 + 1)^2$

આકૃતિ-2

ઓબલોંગ આકૃતિનો ઉપયોગ કર્યા વિના $8\Delta_n+1 = (2n+1)^2$ નું ભૌમિતિક નિરૂપણ $\Delta n = \Delta_6 = 21$ લઈ નીચે આપે આકૃતિ-3 મુજબ કરી શકાય.



×

$$8\,\Delta_6 + 1 = (2 \times 6 + 1)$$
$$8\,\Delta_n + 1 = (2 \times n + 1)^2$$

આકૃતિ-3

નોંધ :
અહીં ઓબલોંગ લંબચોરસનો એક બીજો ગુણધર્મ પણ યાદ આવે છે, જેને એક ગાણિતિક સંસાધન (model) સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય. પણ તે વિશે હવે પછીના કોઈ લેખમાં વાત કરીશું.

અંકો અને અક્ષરોની જુગલબંધી

નિલેશ માંડલિયા
(M) 9712346664

અહીં આપણે અંકો 1,2, 3, ... અને તેમનાં અંગ્રેજી નામમાં આવતા મૂળાક્ષરો (a, b, c, d, ...વગેરે) સાથે સંકળાયેલ પાંચ ગણિતકણિકાઓ આપીશું. દરેક અંકનો અંગ્રેજી શબ્દ (Spelling) અને તે શબ્દમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યા પણ મહત્ત્વની છે. તેથી તેની એક નાની યાદી પણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી છે.

અંક	અંગ્રેજી શબ્દ	અંગ્રેજી શબ્દમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યા
1	One	3
2	Two	3
3	Three	5
---------------	---------------	---------------
---------------	---------------	---------------
8	Eight	5
9	Nine	4
---------------	---------------	---------------
---------------	---------------	---------------
18	Eighteen	8
19	Nineteen	8
20	Twenty	6
---------------	---------------	---------------
---------------	---------------	---------------

આટલી યાદી પર્યાપ્ત નથી. જરૂર પડ્યે આપણે આ જ રીતે (ઉપરના કોષ્ટક મુજબ) યાદી લંબાવી શકીએ. દા.ત. 21 માટે Twenty One અને મૂળાક્ષરોની સંખ્યા 9 લઈશું.

હવે નીચેની સમતાઓ જુઓ.

(1) $1+2-3-4+5=1$

ઉપરની સમતાને શબ્દોમાં લખીએ પણ જમણી બાજુએ આવતા 1ને અંકમાં જ રહેવા દઈએ. (જમણી બાજુના 1ના બદલે One નહીં લખીએ.)

One + Two – Three – Four + Five = 1

હવે ઉપરના દરેક શબ્દને તે શબ્દમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યામાં તબદીલ કરીને સમતા ફરી લખીએ

$3 + 3 - 5 - 4 + 4 = 1$

જુઓ કે આ સમતા પણ સત્ય છે.

આવું જ એક બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

(2) અંકોમાં,

$1 + 2 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 + 12 - 13 - 14 = 5$

શબ્દોમાં,

One + Two – Three – Four + Five – Six + Seven + Eight + Nine – Ten + Eleven + Twelve – Thirteen – Fourteen = 5

દરેક શબ્દમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યામાં તબદીલ કરતા

3 + 3 – 5 – 4 + 4 – 3 + 5 + 5 + 4 – 3 + 6 + 6 – 8 – 8 = 5

ઉપરની બે સમતાઓમાં જમણીબાજુએ લખેલી સંખ્યાને આપણે શબ્દોમાં લખતા નથી. હવે નીચે આપેલ બે જુગલબંધીઓ જુઓ. અહીં સમતાઓની બંને બાજુએ સંખ્યાઓ છે;

(a) અંકોમાં (b) શબ્દોમાં અને (c) શબ્દોમાં આવતા મૂળાક્ષરોની સંખ્યામાં સમતાઓ લખી છે. આવી તબદીલી કર્યા પછી પણ સમતા સત્ય રહે છે તે વાંચકો ચકાસી શકે છે.

(3)

(a) 1 + 4 + 7 + 10 + 11 + 13 + 14 = 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 12 + 15

$\therefore$ [60 = 60]

(b) One + Four + Seven + Ten + Eleven + Thirteen + Fourteen = Two + Three + Five + Six + Eight + Nine + Twelve + Fifteen

(c) 3 + 4 + 5 + 3 + 6 + 8 + 8 = 3 + 5 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 7

$\therefore$ [37 = 37]

સમતા (a) માં 1 થી 15 સુધીના તમામ પૂર્ણાંકોનો એક અને માત્ર એક વાર સમાવેશ થાય છે.

(4)

(a) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 16 + 17 + 18 + 19 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15

(95 = 95)

(b) One + Three + Five + Seven + Nine + Sixteen + Seventeen + Eighteen + Nineteen = Two + Four + Six + Eight + Ten + Eleven + Twelve + Thirteen + Fourteen + Fifteen

(c) 3 + 5 + 4 + 5 + 4 + 7 + 9 + 8 + 8 = 3 + 4 + 3 + 5 + 3 + 6 + 6 + 8 + 8 + 7

(53=53)

સમતા (a) માં 1 થી 19 સુધીના તમામ પૂર્ણાંકોનો એક અને માત્ર એક વાર ઉપયોગ થયો છે.

(5)

(a) 1 + 3 + 6 + 9 + 10 + 12 + 13 + 15 + 17 + 19 = 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 11 + 14 + 16 + 18 + 20

[105 = 105]

(b) One + Three + Six + Nine + Ten + Twelve + Thirteen + Fifteen + Seventeen + Nineteen = Two + Four + Five + Seven + Eight + Eleven + Fourteen + Sixteen + Eighteen + Twenty

(c) 3 + 5 + 3 + 4 + 3 + 6 + 8 + 7 + 9 + 8 = 3 + 4 + 4 +5 + 5 + 6 + 8 + 7 + 8 + 6

[56=56]

અંકો અને અક્ષરોની જુગલબંધીનો આ લેખ અત્રે પૂરો કરીએ છીએ. કોઈને કદાચ એમ લાગે કે આમાં ગણિત જેવું ક્યાં છે? કોઈ વાચક પ્રયત્ન કરી આવી એકાદ રચના તૈયાર કરશે? ભલે ગણિત ઓછું હોય, પણ જેણે આવી રચનાઓ કરી છે તે ધન્યવાદને પાત્ર છે. અત્રે પ્રસ્તુત કરેલી ગણિતકણિકાઓ ઈન્ટરનેટ પરથી ગણિતપ્રેમીઓનાં એક ગ્રુપની વેબસાઈટ પરથી અમને મળી હતી. આ વેબસાઈટ હાલ બંધ છે.

અન્ય વિશેષ ગણિતકણિકાઓ લઈને અમે ફરી ક્યારેક સુગણિતમ્‌નાં પૃષ્ઠો પર હાજર થઈશું. એક વિનંતી છે કે આ કણિકાઓ વિશે કોઈક વાચકો પોતાના વિચારો-અભિપ્રાયો વ્યક્ત કરે. આશા રાખીએ છીએ કે અંકોમાં છુપાયેલી આવી સુંદરતા વાંચકોને પસંદ આવશે.

(નોંધ : આ લેખ તૈયાર કરવામાં શ્રી પી.કે. વ્યાસ સાહેબનો ફાળો બેનમૂન છે.)

‘પ્રશ્નાવલી’ના પ્રશ્નનો ઉકેલ

રાજેશકુમાર મેર
(M) 9537927040 / 9428263776
E-mail : jignasamer123@gmail.com

સુગણિતમ્‌ના સળંગ અંક 308 – E Copy 3-ના પાના નંબર 81 પર પ્રશ્નાવલી વિભાગમાં ત્રીજો પ્રશ્ન નીચે પ્રમાણે હતો.

"ક્રમિક સંખ્યાઓના સરવાળા વિશે પ્રશ્ન-2માં વાત કરી. આવું કાંઈ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળા વિશે મળે ? એક ઉદાહરણ તો ખ્યાલમાં આવે છે. $3^2 + 4^2 = 5^2$. અહીં બે ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગનો સરવાળો ત્યાર પછીની સંખ્યાના વર્ગ જેટલો થાય છે. ત્રણ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગનો સરવાળો ત્યાર પછીની બે ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો થાય એવું ઉદાહરણ મળે ? હા મળે. જૂઓ કે

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

હવે પ્રશ્ન તમે સમજી ગયા હશો. ચાર ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગનો સરવાળો ત્યાર પછીની ત્રણ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો થાય તેવું ઉદાહરણ આપો. આ દિશામાં કોઈ વ્યાપક પરિણામ ?"

આપણી પાસે બે ઉદાહરણો છે.

(1) $3^2 + 4^2 = 5^2$

(2) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

આપણને બે સમતાઓ આપેલી છે. ત્રીજી જે શોધવાની છે તે માટેની રીત ઉપર વર્ણવી છે. તે પરથી આપણને નીચેનાં તારણો મળશે.

(1) દરેક સમતામાં ડાબે-જમણે મળી પદોની કુલ સંખ્યા અયુગ્મ છે.

પહેલી સમતામાં ત્રણ પદ : 3^2, 4^2, 5^2 છે

બીજી સમતામાં પાંચ પદ : 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2 છે.

ત્રીજી સમતામાં બન્ને બાજુએ એક એક પદ ઉમેરીએ તો પદોની કુલ સંખ્યા 7 થશે.

આમ m ક્રમની સમતામાં પદોની સંખ્યા $2m+1$ હશે.

(2) પદોની કુલ સંખ્યા અયુગ્મ હોવાથી અને ડાબી બાજુએ, જમણી બાજુ કરતાં એક પદ વધુ હોવાથી ડાબી બાજુનું છેલ્લું પદ એ સમગ્ર સમતાનું મધ્યમ પદ થશે. આ પદની ડાબી બાજુએ સંખ્યાઓ ઊતરતા ક્રમમાં અને જમણી બાજુએ સંખ્યાઓ ચઢતા ક્રમમાં હશે.

(3) ડાબી બાજુના પહેલાં પદથી જમણી બાજુના છેલ્લા પદ સુધી બધી જ સંખ્યાઓ ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકો છે.

હવે પહેલાં, ત્રીજી સમતાનું મધ્યમ પદ n^2 ધારી લઈએ.

સાત પદો હોવાથી n^2ની ડાબી બાજુએ ત્રણ અને જમણી બાજુએ પણ ત્રણ પદો હશે.

આમ તે સમતા નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$

સાદું રૂપ આપતાં

$n^2 = [(n+1)^2 - (n-1)^2] + [(n+2)^2 - (n-2)^2] + [(n+3)^2 - (n-3)^2]$

$\therefore \quad n^2 = [4n] + [8n] + [12n]$

$\therefore \quad n^2 = 24n;$

$n \neq 0 \quad \therefore n = 24.$

સમતાનું મધ્યમ પદ 24^2 મળી ગયું. તેથી સમતાના બાકીનાં પદો સહેલાઈથી મળી જશે.

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

બન્ને બાજુએ સરવાળો કરવો સરળ છે. સરવાળો $25^2 + 26^2 + 27^2 = 625 + 676 + 729 = 2030$ મળશે.

હવે આ રીત જ અપનાવી આપણે વ્યાપક પરિણામ શોધીએ. ધારો કે m ક્રમની સમતામાં ડાબી બાજુનું છેલ્લું પદ (એટલે કે સમગ્ર સમતાનું મધ્યમ પદ) n^2 છે.

આ સમતામાં પદોની સંખ્યા $2m+1$ હશે. તે પૈકીનાં m પદ n^2ની ડાબી બાજુએ અને m પદ n^2ની જમણી બાજુએ હશે. આમ સમતા નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$(n-m)^2 + (n-m+1)^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$$
$$= (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+m-1)^2 + (n+m)^2$$

સાદું રૂપ આપતાં

$$n^2 = [(n+1)^2 - (n-1)^2] + [(n+2)^2 - (n-2)^2]$$
$$+ \dots + [(n+m-1)^2 - (n-m+1)^2] + [(n+m)^2 - (n-m)^2]$$
$$\therefore n^2 = 4n + 8n + 12n + \dots\dots\dots + 4nm$$
$$= 4n\,[1+2+3+\dots\dots m]$$
$$= \frac{4mn\,(m+1)}{2} = 2mn\,(m+1);$$

$\therefore n \neq 0$ હોવાથી

$$n = 2m\,(m+1) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

અને તેથી મધ્યમ પદ $n^2 = 4m^2\,(m+1)^2$

n^2 અને m વચ્ચેનો સંબંધ મળી ગયો.

હવે સમતાની જમણી બાજુનો સરવાળો કરીએ (ડાબી બાજુનો સરવાળો કરવો જરા કંટાળાજનક છે. જમણી બાજુએ પદોની સંખ્યા m છે.

સરવાળો : $(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+m-1)^2 + (n+m)^2$

$= (n^2 + n^2 + n^2 + \dots\, m$ વખત)

$+ n(2 + 4 + 6 + \dots + m$ પદ)

$+ (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\, m$ પદ સુધી)

$$= (n^2m + 2n\,(1 + 2 + 3 + \dots + m) + \left[\frac{m\,(m+1)(2m+1)}{6}\right]$$
$$= n^2m + mn\,(m+1) + \frac{m\,(m+1)(2m+1)}{6} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

હવે આપણી પાસે બે રસ્તા છે.

1. પંક્તિનો ક્રમ (m) પસંદ કરી, (1)નો ઉપયોગ કરી, મધ્યમ પદ n શોધો. ત્યારબાદ m અને n ના આ મૂલ્યો (2)માં મૂકી સરવાળો શોધો.
2. (1) અને (2)માંથી nનો લોપ કરી સરવાળો માત્ર સમતાના ક્રમ m ના સ્વરૂપમાં શોધો. જો બીજી રીત અપનાવીએ તો સરવાળા માટેનું બીજું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે મળશે. (વાચકો જાતે મેળવવાનો પ્રયત્ન કરે)

   સરવાળો $= 2m^2\,(m+1)^2\,(2m+1) + \frac{1}{6}\cdot m(m+1)\,(2m+1)$ .... (3)

   સૂત્ર 3ને 6 નો લ.સા.અ. લઈ વધુ ધારદાર બનાવી શકાય.

   સૂત્ર (1) મુજબ $m=3$ લઈએ તો ત્રીજી પંક્તિનું મધ્યમ પદ $n^2 = [2m\,(m+1)]^2 = (2\cdot3\cdot4)^2 = 24^2$ થશે.

(આ પદ આપણે આગળ શોધ્યું હતું તે જ છે) વળી ત્રીજી સમતામાં $2\cdot3+1 = 7$ પદો હશે જે પૈકીનાં ચાર પદ ડાબી બાજુએ અને ત્રણ પદ જમણી બાજુએ હશે.

તેથી સમતા : $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

હવે સૂત્ર (3) માં $m=3$ મૂકતાં,

સરવાળાનું મૂલ્ય :

$2m^2(m+1)^2\,(2m+1) + \frac{1}{6}\,m(m+1)\,(2m+1)$

$= 2{\cdot}3^2\,(4)^2\,(7) + \frac{1}{6}\,[3\,(4){\cdot}7]$

$= 2{\cdot}9{\cdot}16{\cdot}7 + 2{\cdot}7 = 2016 + 14 = 2030$

આ સરવાળો આપણે આગળ શોધ્યો તે જ છે.

(નોંધ : રાજેશભાઈએ 10 હાર સુધી આવી સંખ્યાનો પિરામિડ બનાવી, દરેક પંક્તિના સરવાળા સાથે મોકલ્યો છે.)

$3^2 + 4^2$	$= 5^2$	સરવાળો : 25
$10^2 + 11^2 + 12^2$	$= 13^2 + 14^2$	સરવાળો : 365
$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2$	$= 25^2 + 26^2 + 27^2$	સરવાળો : 2030
$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2$	$= 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$	સરવાળો : 7230

(ઉપરના પિરામિડમાં દસમી પંક્તિમાં કેટલાં પદ આવશે ? દસમી પંક્તિમાં ડાબી બાજુનું છેલ્લું પદ શું હશે ? તે જાણતા હોઈએ તો દસમી પંક્તિ લખી શકાય. ગણિત પ્રયોગશાળામાં ચાર્ટ બનાવી મૂકવા માટે આ બધું ઉપયોગી છે. પણ ગણિત માટે તો m=10, પદોની સંખ્યા $2m+1$ =21, તથા મધ્યપદ = $(2m(m+1))^2 = 220^2$. આટલું જ જરૂરી છે. બાકીનું બધું તો.... પી.કે. વ્યાસ)

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

લેખક સન્માન

સુગણિતમ્‌માં પ્રગટ થતા લેખોના લેખકો માટે સુગણિતમ્‌ના પ્રકાશક - પ્રા. અરૂણ મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ - નીચેનાં પુરસ્કારો જાહેર કરતાં આનંદ અનુભવે છે.

(1) કોઈપણ કક્ષાએ અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા, સુગણિતમ્‌માં પ્રકાશિત થયેલા, લેખ દીઠ રૂ.300/- લેખકને પુરસ્કારરૂપે આપવામાં આવશે.

(2) એક વર્ષ દરમિયાન પ્રગટ થયેલા, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા લખાયેલા લેખો પૈકી સર્વશ્રેષ્ઠ લેખના લેખકને પુરસ્કાર રૂપે રૂ.500/- આપવામાં આવશે. (વર્ષ : 1-જાન્યુઆરીથી 31 ડિસેમ્બર ગણાશે.)

(3) જેમનાં લખાણો અગાઉનાં સુગણિતમ્‌માં ક્યારેય પ્રકાશિત ન થયાં હોય તેવા (નવોદિત) લેખકને તેમના પ્રથમ લેખ માટે રૂ.500/- પુરસ્કાર રૂપે આપવામાં આવશે.

(4) સુગણિતમ્ માટે લેખ લખતા લેખકો પોતાનો કિંમતી સમય લેખ તૈયાર કરવા માટે આપે છે. તેમનું લેખન કાર્ય અમૂલ્ય છે. આવા લેખનને કોઈ પુરસ્કાર આપી મૂલવવું યોગ્ય નથી. પણ ક્યારેક તો લેખકો લેખને ટાઈપ કરાવીને મોકલે છે. ટાઈપ કર્યા પછી કુરીયરથી મોકલે છે. ટાઈપ કરાવવાનો ખર્ચ, કુરીયર દ્વારા મોકલવાનો ખર્ચ તેઓ જાતે ભોગવે છે. લેખકે કરેલા પ્રયત્નને બિરદાવવા માટે અને તેમણે કરેલા ખર્ચને આંશિક રીતે ભરપાઈ કરવા માટે અમે નીચેની જાહેરાત કરીએ છીએ.

“દરેક લેખના, સુગણિતમ્‌માં છપાયેલા પાના દીઠ લેખકને રૂ.100/- આપવા”

લખાણ એક પાનાથી ઓછું હોય તો લેખકને તે પાના માટે રૂ.50/- આપવા.

પ્રા. વી.આર ત્રિવેદી - એક તેજસ્વી તારક

એમ.એમ. વસાવડા
વલ્લભવિદ્યાનગર
(M) 9824669364

22મી જુલાઈ 2022ના રોજ પ્રા.વી.આર.ત્રિવેદીનું અવસાન થયું. એ સાથે ગુજરાતના ગણિતનો એક તેજસ્વી તારલો અસ્ત પામ્યો. પોતાનાં કાર્યો વિશે હો-હા કરવાનું ત્રિવેદી સાહેબના સ્વભાવમાં ન હતું. જે કંઈ કરવું તે કોઈ અપેક્ષા વગર પ્રામાણિક્તાથી ખંતથી કરવું એ તેમની રીત હતી. ગણિત એ તેમને માટે કારકિર્દી માટેની સીડી નહિ, ભક્તિ અને સેવા માટેનું ક્ષેત્ર હતું.

તેમનું પૂરુ નામ વિનોદપ્રસાદ રેવાશંકર ત્રિવેદી. 17મી નવેમ્બર, 1948ના રોજ ગોધરામાં તેમનો જન્મ થયો. ધોરણ 1થી 7 સુધીનું શિક્ષણ તેમણે દેવગઢ બારિયાની પ્રાથમિક શાળામાં લીધું. ધોરણ 8થી 11 સુધીનો અભ્યાસ આ જ ગામની એસ.આર હાઈસ્કૂલમાં કર્યો. એ વખતે 11મા ધોરણના અંતે એસ.એસ.સી ની બોર્ડની પરીક્ષા થતી. વિનોદભાઈ 1965માં બોર્ડની પરીક્ષામાં 81.5 % ગુણ મેળવી ગુજરાતમાં અગિયારમા ક્રમે અને પંચમહાલ જીલ્લામાં પ્રથમ ક્રમે ઉતીર્ણ થયા. દેવગઢ બારિયાના જયદિપસિંહે તેમનું સન્માન કર્યું અને ઉચ્ચ અભ્યાસ માટે શિષ્યવૃતિ આપી.

અમદાવાદની સેન્ટ ઝેવિયર્સ કૉલેજમાંથી સ્નાતક અને ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ગણિત વિભાગમાંથી અનુસ્નાતક કક્ષાનો અભ્યાસ કર્યા બાદ વિનોદભાઈ ડાકોરની ભવન્સ કોલેજમાં જોડાયા. થોડા વર્ષો અમદાવાદની એ.જી હાઈસ્કૂલમાં સેવાઓ આપી. 1986થી 2011માં નિવૃત્ત થયા ત્યાં સુધી અમદાવાદની ભવન્સ કૉલેજમાં કાર્યરત રહ્યા. અહીં અધ્યાપક અને વિભાગીય વડા તરીકેની એમની કારકિર્દી અત્યંત યશસ્વી રહી.

1973માં વિનોદભાઈ રજનીશજીના સંપર્કમાં આવ્યા અને સન્યસ્ત લઈ સ્વામી આનંદ વેદાન્ત બન્યા. તેમણે સન્યાસી ધર્મ પૂરેપૂરો પાળ્યો અને ઉજાળ્યો. આજીવન બ્રહ્મચારી રહ્યા. ધ્યાન અને રજનીશજીની વિચારધારાના વાચન, શ્રવણ, ચિંતન અને અધ્યયનમાં પ્રવૃત રહ્યા. ગેરુઆ રંગના કપડાં અને રોબનું વસ્ત્ર પરિધાન ધારણ કર્યું. કૉલેજના યુવાવર્ગ વચ્ચે કામ કરવાનું હોવા છતાં તેમણે તેમનાં વસ્ત્રોમાં કશી બાંધછોડ ન કરી. ત્રિવેદી સાહેબ સ્વામીજીના હુલામણા નામથી જાણીતા બન્યા અને વિદ્યાર્થીઓ અને સહકર્મીઓનું સન્માન પામ્યા.

ત્રિવેદી સાહેબ વિદ્યાર્થીઓને મદદરૂપ થવા માટે તત્પર એવા સન્નિષ્ઠ અધ્યાપક હતા. વિદ્યાર્થીનું હીર પારખવાની તેમનામાં દીર્ઘ દ્રષ્ટિ હતી. સારા વિદ્યાર્થીઓ શોધી કાઢી, તેમને કોયડાઓ અને ,કઠિન પ્રશ્નો પૂછી તેમની શક્તિનો તેઓને પરિચય કરાવી ગણિતમાં આગળ વધવા માટે તેમને તેઓ પ્રેરતા. તેમની પાસેથી પસાર થયેલા ઘણા વિદ્યાર્થીઓ તેમની પ્રગતિ 'સ્વામીજી' ના માર્ગદર્શન અને પ્રોત્સાહનને આભારી છે તે વાત સહર્ષ સ્વીકારે છે. ઓશો માર્ગના સમર્પિત યાત્રી હોવા છતાં ત્રિવેદી સાહેબે તેમની ગણિતયાત્રા અવિરત પણે ચાલુ રાખી હતી. તેઓએ એમ.ફીલ. ની ડિગ્રી મેળવી હતી. અન્ય યુનિવર્સિટી અને સંશોધન કેન્દ્રોની તેઓ મુલાકાત લેતા હતા. ગણિતની કાર્યશિબિરો અને પરિષદોમાં તેઓ હાજરી આપતા હતા. સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના ગણિત વિભાગ દ્વારા યોજાતા Problem Solving Workshopમાં રિસોર્સ પર્સન તરીકે તેમની સેવાઓ લેવાતી. 2012ના ગુજરાત ગણિત મંડળના અધિવેશનની સ્મરણિકામાં તેમણે સંખ્યાઓ વિશે માહિતીપૂર્ણ વિસ્તૃત લેખ લખ્યો છે.

વિનોદભાઈ ડાકોરની ભવન્સ કૉલેજમાં હતા ત્યારથી મારે તેમની સાથે પરિચય હતો. પરંતુ છેલ્લાં થોડાં વર્ષોમાં પ્રા.એ.આર.રાવ ફાઉન્ડેશનની પ્રવૃત્તિઓમાં તેમની સહભાગિતાને કારણે એ પરિચય ઘણો દઢ બન્યો. ફાઉન્ડેશનની પ્રવૃત્તિઓના સંચાલનમાં તો તેમની મદદ મળતી જ, પરંતુ આ પ્રવૃત્તિઓને અસરકારક બનાવવા માટે અને વિસ્તાર માટે તેમનાં મૂલ્યવાન સૂચનો પણ મળતાં. કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓ માટેની સ્પર્ધાના તેમના પ્રશ્નપત્રોમાં તાજગી અને નાવિન્ય જોવા મળતાં. તો નિબંધ સ્પર્ધા માટેના વિષયોમાં ઊંડાણ અને વિવિધતા નજરે ચડતાં. પ્રા.એ.આર.રાવ ફાઉન્ડેશનને પ્રા.વી.આર ત્રિવેદી સાહેબની ખોટ મોટી સાલશે ફાઉન્ડેશન વતી તેમની સેવાઓને બિરદાવી તેમને નમ્ર અંજલિ આપું છું.

વિનોદભાઈ અમદાવાદમાં પ્રા.એ.આર.રાવ સાહેબના સાનિધ્યમાં શરૂ થયેલા પ્રા.એ.આર. રાવ ભૂમિતિ ક્લબના સક્રિય સભ્ય હતા. ગણિતમાં તેમણે જે પ્રીતિ જાળવી રાખી હતી તેની આ એક વધુ પ્રતીતિ હતી. 18 મી જૂન 2022 ના રોજ ક્લબની મિટિંગમાં તેમને છેલ્લું મળવાનું થયું. 9મી જુલાઈએ તેમના બેન સુષ્માબેન તરફથી તેમને લકવાની બિમારી થયાના અને સારવાર માટે તેમને વડોદરા લાવ્યાના ખબર મળ્યા. 22મી જુલાઈએ તેમણે વિદાય લીધી. શિક્ષણ અને સાહિત્ય, ખગોળ અને તત્વજ્ઞાન, ધ્યાન અને ધર્મમાં રસ ધરાવનાર, ગણિતપ્રેમી, વિદ્યા વ્યાસંગી, આધ્યાત્મિક વ્યક્તિનો વિલય થયો. સંસારથી અલિપ્ત છતાં સમાજના ઉત્થાન માટે નિસ્બત ધરાવનાર બહુ ઓછી વ્યક્તિઓ આપણી આસપાસ જોવા મળે છે. વિનોદભાઈ આવી એક વ્યક્તિ હતા. તેમના સંપર્કમાં આવેલા સૌ કોઈ તેમને હંમશાં આદરપૂર્વક, ભાવપૂર્વક યાદ કરશે.

(આ લેખમાંની કેટલીક માહિતી ત્રિવેદી સાહેબનાં બેન સુ. શ્રી. સુષ્માબેન ત્રિવેદી પાસેથી મળી છે. આ માહિતી આપવા માટે હું તેમનો આભારી છું – એમ.એચ.વસાવડા)

પ્રા. એ. આર. રાવ ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

નિબંધ સ્પર્ધા - 2023

પ્રા. એ. આર. રાવ ફાઉન્ડેશન ગુજરાતની આટ્ર્સ, સાયન્સ, કોમર્સ, એન્જિનિયરીંગ તથા બી.એડ્. કૉલેજો તેમજ યુનિવર્સિટીઓના વિદ્યાર્થીઓને નિબંધ સ્પર્ધામાં ભાગ લેવા માટે આમંત્રણ આપે છે.

નિબંધ નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક વિષય પર અંગ્રેજી, હિંદી અથવા ગુજરાતી ભાષામાં 750થી 1000 શબ્દોમાં લખવાનો રહેશે.

(1) જ્યાં જુઓ ત્યાં સંખ્યા જ સંખ્યા. (Numbers, Numbers Everywhere.)

(2) ગણિત ઉપયોગી છે અને રસપ્રદ પણ છે. (Mathematics is both useful and interesting.)

(3) અવકાશ કાર્યક્રમમાં ગણિતનો ફાળો. (Role of Mathematics in Space Programme.)

સ્પર્ધામાં ભાગ લેનાર વિદ્યાર્થીએ નિબંધને ટાઈપ કરીને અથવા કાગળમાં એક બાજુએ સ્વચ્છ અક્ષરમાં લખીને ડિસેમ્બર 31, 2023 સુધીમાં નીચેના સરનામે કુરિયર, રજીસ્ટર પોસ્ટ અથવા સ્પીડ પોસ્ટથી મોકલવાનો રહેશે.

Prof. M. H. Vasavada
Sameep, Near Water Tank, Nana Bazaar
Vallabh Vidyanagar 388120 (Mob. No. 98246 69364)

સ્પર્ધામાં વિજેતા વિદ્યાર્થીઓને પ્રમાણપત્ર તેમજ પ્રથમ ક્રમે આવનાર વિદ્યાર્થીને રૂા.1200, દ્વિતીય ક્રમે આવનાર વિદ્યાર્થીને રૂા.1000 અને તૃતીય ક્રમે આવનાર વિદ્યાર્થીને રૂા.800 પારિતોષિક આપવામાં આવશે.

નિબંધ સાથે આપનું પૂરું નામ, સરનામું, સંસ્થાનું નામ, કયા વર્ગમાં અભ્યાસ કરો છો તે, આપનો મોબાઈલ નંબર તેમજ આપનું E-mail ID જુદા કાગળમાં અવશ્ય જણાવશો.

નિબંધ મોકલવા અંગેના ખબર Whatsapp (98988 38940) પર આપશો.

વલ્લભ વિદ્યાનગર
તા.05-10-2023

અરવિંદભાઈ બી. પટેલ
કન્વીનર
પ્રા. એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન

ત્રિવેદી સાહેબઃ એક અનોખું વ્યક્તિત્વ

પ્રો. દેવેન્દ્રનાથ સન્યાસી (જૂનાગઢ)
(M) 9722678199

પ્રા. વી. આર. ત્રિવેદી સાહેબ, કે જેમને ભવન્સ સાયન્સ કૉલેજ, અમદાવાદના બધા જ વ્યાખ્યાતા અને અન્ય કર્મચારી પ્રેમ અને સન્માનથી સ્વામીજી તરીકે સંબોધિત કરતા, એમના વિશે આજે જ્યારે વિચાર કરું છું અને એમની સાથે કરેલી અનેક રોચક ચર્ચાઓનો વિચાર આવે છે, ત્યારે મને વારંવાર એવી અનુભૂતિ થાય છે કે સ્વામીજી મારી સાથે જ છે. સ્વામીજી સ્વભાવથી સરળ, પણ દ્રઢ સંકલ્પવાળા હતા. તેમની આંખોથી હંમેશાં એક અનોખું તેજ ઝળકતું અને જ્યારે પણ એમની રૂબરૂ મુલાકાતે જતો, તો સંપૂર્ણપણે હકારાત્મક ઊર્જાથી ઓતપ્રોત થઈને પાછો ફરતો. મારાં જીવન અને કારકિર્દી ઘડતરમાં સ્વામીજીનું અતિ-વિશેષ સ્થાન છે.

વર્ષ 2002માં B.Sc. અભ્યાસક્રમમાં ભવન્સ સાયન્સ કૉલેજ, અમદાવાદમાં મને પ્રવેશ મળ્યો અને પ્રથમવાર સ્વામીજીનાં વ્યાખ્યાનોનો લાભ મળ્યો, ત્યારે એવો અનુભવ થયો કે એમની આભા, એમનું વ્યક્તિત્વ, એમની ગણિત ભણાવવાની શૈલી કંઈક અનોખી હતી. દરેક વ્યાખ્યાનના અંતે 2-4 સારા પ્રશ્નો દ્વારા વિદ્યાર્થીઓની અંદર રહેલ વિશિષ્ટ પ્રતિભાને જગાડવાનો પ્રયાસ કરતા.

મને આજે પણ સારી રીતે યાદ છે કે, 2004માં T.Y.B.Sc.માં પ્રવેશ મેળવવા માટે જ્યારે ભવન્સ કોલેજમાં આવેદનપત્ર ભરવાનું થયું ત્યારે હું અસમંજસમાં હતો કે ભૌતિકશાસ્ત્ર વિષયમાં સ્નાતક પૂર્ણ કરું કે પછી ગણિતશાસ્ત્ર વિષયમાં આવેદન ભરવાની છેલ્લી તારીખ નજીક આવી જતાં ભૌતિકશાસ્ત્ર વિષય પસંદ કરી આવેદનપત્ર કૉલેજના કાર્યાલયમાં જમા કરી દીધું. ત્યાર પછી સ્વામીજીના ધ્યાને આવ્યું કે મારું આવેદનપત્ર ભૌતિકશાસ્ત્ર વિષયના જથ્થામાં છે, તો મને તાત્કાલિક બોલાવીને ગણિતશાસ્ત્ર વિષયમાં સ્નાતક પૂર્ણ કરવાનો આગ્રહ કર્યો.

મૃદુલ, શાંત અને પ્રભાવશાળી એવા અદ્‌ભુત વ્યક્તિત્વવાળા સ્વામીજીનો આગ્રહ હોય તો ના પાડવાની મનોવૃત્તિ આપોઆપ નાશ થઈ જાય. બીજું એ કે આવા સજ્જન સત્‌પુરુષ જો મને મારા ભવિષ્ય માટે કોઈ આગ્રહ કરતા હોય તો જરૂર એમાં કંઈક સારું હોવું જ જોઈએ. એમ વિચારી મેં T.Y.B.Sc. ભૌતિકશાસ્ત્ર વિષય રદ્દ કરી ગણિતશાસ્ત્ર વિષયોમાં પ્રવેશ મેળવી લીધો. તે પછી સ્વામીજી અને ડૉ. રવિ બોરાણા સાહેબના માર્ગદર્શન હેઠળ ગણિત વિષય સંબંધિત સ્પર્ધાઓમાં પણ ભાગ લીધો, જેમાંની અમુક સ્પર્ધાઓનું ફોર્મ અને ફી બન્ને સ્વામીજી જાતે જ ભરી દેતા અને પરીક્ષાની તારીખ નજીક આવી જાય ત્યારે મને આ બાબતની જાણ કરતા.

વર્ષ 2005, જૂન માસની વાત છે. MTTS પ્રોગ્રામમાં (તા. 16-05-05થી 11-06-05) સુધી S.P. College, Pune હતો અને 16 જૂન 2005 થી મુંબઈમાં VSRP પ્રોગ્રામ શરૂ થવાનો છે. એ સ્વામીજીના ધ્યાને આવ્યું ત્યારે એમણે આવેદનની છેલ્લી તારીખ વીતી ગઈ હોવા છતાં આવેદન ભરવા જણાવેલ અને Recomendation Letter સ્પીડ પોસ્ટ મારફતે TIFR પહોંચતું કર્યું. આમ, સ્વામીજીના અથાગ પ્રયત્નને કારણે VSRP પ્રોગ્રામમાં છેલ્લી ઘડીએ મારી પસંદગી થઈ, પણ ત્યાં રહેવાની સગવડ છેલ્લી ઘડીમાં શક્ય નહોતી. આમ છતાં સ્વામીજીના આગ્રહને કારણે હું VSRP પ્રોગ્રામ માટે TIFR મુંબઈ પહોંચી ગયો અને રજિસ્ટ્રેશન સમયે મને રહેવાની સગવડ પણ મળી, જે બદલ હું પ્રો.ડૉ. રિદ્ધિ શાહ અને પ્રો.ડૉ. નિમિષ એસ. શાહનો આભારી છું, જેમણે સ્વામીજીના કહેવાથી મને અત્યંત વિશેષ સંજોગોમાં TIFRના Residential quartersમાં રહેવાની સગવડ પૂરી પાડી.

સ્વામીજી જીવન પ્રત્યે હંમેશાં સકારાત્મક રહ્યા. એમની સાથે મારી જ્યારે પણ વાત થતી ત્યારે આ સકારાત્મક ઊર્જા મને પણ પ્રભાવિત કરતી. સ્વામીજીએ જેમ મારા જીવનનું ઘડતર કર્યું, તેમ અનેકનાં જીવનમાં પણ પ્રકાશ અને ઊર્જાનો સંચાર કર્યો છે. આવાં બીજાં અનેક નામ પ્રા. ડૉ. રવિ બોરાણા સાહેબ પાસેથી પ્રાપ્ત થઈ શકશે.

ગુજરાત યુનિવર્સિટીમાં અભ્યાસ કરતા અનેક વિદ્યાર્થીઓ ગણિત પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવતા, સ્વામીજીના અમદાવાદના નિવાસ સ્થાને રૂબરૂ પણ જતા અને ગણિતના પ્રશ્નોના ઉકેલ તો મેળવતા જ, પરંતુ જીવનની ઊથલ પાથલનો હલ પણ

મેળવતા અને અત્યંત સકારાત્મક ઊર્જા, વિશ્વાસ અને સંતોષ સાથે પાછા ફરતા.

આમ મારા B.Sc., M.Sc. અધ્યયનકાળમાં સ્વામીજી એક અતિ વિશેષ પાઠ ભજવી ગયા. પણ આ તો બસ એક શરૂઆત જ હતી.

વર્ષ 2009માં ભાસ્કરાચાર્ય પ્રતિષ્ઠાન, પુણે દ્વારા આયોજિત એક ગણિત વર્કશોપમાં સ્વામીજી સાથે ભાગ લેવાની તક પણ મને મળી.

સ્વામીજીના જીવનમાં ધ્યાન હંમેશાં પ્રથમ સ્થાને રહ્યું. તે નિયમિતરૂપે ધ્યાન કરતા અને તે સિવાય ગણિતને લગતી પ્રવૃત્તિઓ માટે પણ સમય ફાળવતા. સ્વામીજી જ્યારે પ્રા.એ.આર.રાવ ગણિત સ્પર્ધા (F.Y.-S.Y.)ના કન્વીનર થયા ત્યારે મને પણ આ પ્રવૃત્તિમાં સાથે લઈ મારા જીવનનું ઘડતર સતત ચાલુ રાખ્યું પ્રા.એ.આર.રાવ ગણિત સ્પર્થા (F.Y.-S.Y.) ના પ્રશ્નપત્રો જ્યારે પી.કે.વ્યાસ સાહેબ અને એ.એમ.વૈદ્ય સાહેબને મોકલતા, તો પ્રશ્નપત્રો જોઈને આ ગણિતજ્ઞો Very good !! .... જેવી સારી Coment આપતા.

શ્રંદ્ધાંજલિ

શ્રી મધુસૂદન કે. વસાવડા

શ્રી મધુભાઈ કે. વસાવડાનું તા.5-10-2023ના રોજ અમદાવાદ મુકામે અવસાન થયું. પ્રા. મહાવીર વસાવડા સાહેબે અને શ્રી મેઘરાજ ભટ્ટ સાહેબે સ્વર્ગસ્થને આપેલ શ્રદ્ધાંજલિ અત્રે રજૂ કરીએ છીએ.

Madhubhai, though a few years senior to me, was a close friend. He too studied in Bahauddin college, was a student and ardent fan of Raosaheb. Extremely mild mannered and soft spoken Madhubhai, though he worked in administrative side of school education for most of his career, continued his interest in Mathematics education and in activities of GGM almost till the end. His passing away is a personal loss to me and a great loss to the mathematical community of Gujarat.

May his soul rest in peace

M. H. Vasavada

♦♦♦

શ્રી મધુભાઈ વસાવડા સાહેબ હવે આપણી વચ્ચે નથી ત્યારે એમને સાદર અંજલિ આપવાનો પ્રયત્ન કરું છું.

ગુજરાત ગણિત મંડળનાં અધિવેશનોમાં હું જતો થયો ત્યારથી એમનો પરિચય. શાળા વિભાગના કાર્યક્રમોમાં હાજર હોય અને વિદ્યાર્થીઓને પ્રોત્સાહન આપે. કોઈક વક્તાની રજૂઆત પછીની એમની પૂરક નોંધ પણ મહત્વની રહેતી. તેઓ બધાની જેમ સીધા વર્ગ શિક્ષણ સાથે સંકળાયેલા નહોતા કારણ કે જૂનાગઢની D.E.O. ઓફિસમાં અધિકારી હતા. તેમ છતાં વર્ગ શિક્ષણ સાથે જીવંત સંબંધ રાખ્યો હતો. બહાઉદ્દીન કૉલેજમાં સ્વર્ગસ્થ રાવ સાહેબના વિદ્યાર્થી હતા અને ત્યાર પછીના તેમના ચાહક રહ્યા. ખૂબ જ મૃદુભાષી, મીતભાષી અને સરળ સ્વભાવને કારણે એમનું વ્યક્તિત્વ વિશિષ્ટ હતું. ચાપરડા મુકામે ભરાયેલા અધિવેશન વખતે જૂનાગઢ એમના ઘરે આવવા અમને આમંત્રણ આપેલું અને અમે ગયા પણ હતા.

જીવનના ઉત્તરાર્ધમાં અમદાવાદ વસ્યા પછી એમની પાસેનાં ગણિતનાં પુસ્તકોનો સદુપયોગ થાય એ હેતુથી એમણે મારામાં વિશ્વાસ મૂકી લગભગ 80 જેટલાં પુસ્તકો મને સોંપ્યાં – શરત એટલી જ કે સ્વર્ગસ્થ રાવ સાહેબના નામે એની લાઇબ્રેરી કરવી. મને આનંદ અને સંતોષ છે કે વલસાડની શ્રી વિદ્યામૃતવાર્ષિણી પાઠશાળાની લાઈબ્રેરીમાં ગણિત મિલનની સાથે મળીને પ્રાધ્યાપક એ.આર. રાવ ગણિત વિભાગ શરૂ કરીને એમની ઇચ્છા હું પૂર્ણ કરી શક્યો. આજે વિદ્યાર્થીઓ એનો લાભ લે છે. અવસાનના એકાદ અઠવાડિયા પહેલાં શ્રી ધોળકિયા સાહેબે વીડિયો કોલ કરી એમનાં દર્શન કરાવેલાં એ હંમેશાં યાદ રહેશે. પ્રભુ સદ્‌ગતના આત્માને પરમ શાંતિ આપે એ જ પ્રાર્થના.

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ

સ્વામીજી : મારા પરમ ગુરુ અને સહકાર્યકર

પ્રા. રવિ બોરાણા
અમદાવાદ
(M) 9925016492

વિદ્વાન ગણિતજ્ઞ અને સન્નિષ્ઠ અધ્યાપક-જેમણે વર્ગખંડમાં અને અન્ય મંચો પર ગણિતનો રોમાંચ અનુભવ્યો અને અન્યોને ગણિતનો આનંદ લુટાવ્યો - એવા ત્રિવેદી સાહેબને ભાવભરી શ્રદ્ધાંજલિ.

ત્રિવેદી સાહેબ પહેલાં ડાકોર ભવન્સ કૉલેજમાં હતા. 1986માં તેઓ અમદાવાદની ભવન્સ કૉલેજમાં જોડાયા અને 2004માં આ કૉલેજમાં ગણિત વિભાગના અધ્યક્ષ બન્યા. 2011માં નિવૃત્ત થયા. પચ્ચીસ વર્ષના તેમના કૉલેજના શિક્ષણકાળ દરમિયાન તેઓએ ગણિત જ્ઞાનનાં અવિરત ઓજસ પાથર્યાં તેમની જ્ઞાનગંગામાં ડૂબકી મારી અનેક વિદ્યાર્થીઓ પુલકિત બન્યા.

1987થી 1990નાં વર્ષો દરમિયાન મને સ્વામીજીના વિદ્યાર્થી હોવાનો લહાવો મળ્યો હતો. સ્વામીજીના અક્ષર સુંદર, શીખવે પણ સુંદર અને એટલે વિદ્યાર્થીઓનો પ્રતિભાવ પણ તેમને સુંદર મળે. માત્ર Theory ભણાવીને કે દાખલા ગણાવીને સ્વામીજી સંતોષ ન માને. દરેક તાસને અંતે તેઓ કોઈને કોઈ પ્રશ્ન પૂછે અથવા ગૃહકાર્ય માટે પ્રશ્નો આપે. આ રીતે વિદ્યાર્થીઓમાં વિચાર શક્તિ જાગૃત કરવાનો અને તેમની વિચાર શક્તિને પડકારવાનો તેઓ હંમેશાં પ્રયત્ન કરે. સ્વામીજીની દૃષ્ટિ હંમેશાં વિદ્યાર્થીઓમાં રહેલી કોઈને કોઈ ક્ષમતાને શોધતી રહેતી. એક વાર કોઈ વિદ્યાર્થીમાં એવી શક્તિનો તેમને અણસાર આવી જાય પછી તેને એ જંપીને બેસવા ન દે. કોયડાઓ પૂછીને જુદું જુદું વાચન સૂચવીને જેમ સુવર્ણકાર આભૂષણ ઘડે કે શિલ્પકાર મૂર્તિ કંડારે તેમ સ્વામીજી વિદ્યાર્થીને ઘડવાનો પ્રયત્ન કરે. પ્રા.દેવેન્દ્રનાથ સન્યાસી અને ડૉ પ્રકાશ ડાભી જેવા અધ્યાપકોના ઘડતરમાં સ્વામીજીનો ફાળો મોટો છે.

મને Ph.D. અભ્યાસ માટે સ્વામીજીએ પ્રોત્સાહિત કર્યો SVNIT સુરતમાંથી ડૉ. વી.એમ.પ્રધાનસર અને ડૉ. એમ.એન.મહેતાસર જેવા નિષ્ણાત અધ્યાપકોનાં માર્ગદર્શન હેઠળ કાર્ય કરીને Ph.D. ડિગ્રી મળી તેને હું મારું સદભાગ્ય સમજું છું અને આ અભ્યાસ માટેની પ્રેરણા મને સ્વામીજી પાસેથી મળી હતી એ યાદ કરી તેમને વંદન કરું છું.

વિદ્યાર્થીકાળ પછી સ્વામીજી સાથે મારે સંબંધ વધુ દૃઢ બન્યા છે. કૉલેજના ગણિત વિભાગમાં હું તેમનો સહકાર્યકર બન્યો. મારી ખુરશી એમની ખુરશીની બાજુમાં જ હતી. ઘણા કાર્યક્રમોમાં તેમની સાથે જવાની મને તક મળતી હતી. 2007માં તામીલનાડુના વિરુદુનગરમાં Graph Theoryની International Conferenceમાં ડૉ. એચ.એમ.પટેલ અને મેં સ્વામીજી સાથે હાજરી આપી હતી. ત્યારે સ્વામીજી સાથે કેરાલા અને કન્યાકુમારીનો પ્રવાસ કર્યો હતો.

ત્રિવેદી સાહેબ રજનીશના શિષ્ય હતા અને સન્યાસી તરીકેનું તેમનું નામ સ્વામી આનંદ વેદાન્ત હતું. એકંદરે ગંભીર દેખાતા સ્વામીજી ખરેખર તો તેમના નામ પ્રમાણે હંમેશા આનંદિત રહેતા. ઘણીવાર તેમના મુખ પર મુક્ત હાસ્ય જોવા મળતું. જીવનને તેઓ એક ઉત્સવ તરીકે જોતા. અમારે પારિવારિક સંબંધ હતો. અમારે ઘેર આવી અમને સૌને તેઓ ધ્યાનમાં જોડાવા પ્રોત્સાહિત કરતા મારી પુત્રી હિમાની એ વખતે છ-સાત વર્ષની હતી. એ પણ ધ્યાનમાં જોડાતી અને ધ્યાનને અંતે મુક્ત મને નૃત્ય કરતી. નાની બાલિકાને નૃત્ય કરતી જોઈને સ્વામીજી બહુ પ્રસન્ન થતા. ચંદ્રગ્રહણ જેવી પરિઘટનાને પણ તેઓ ધ્યાન અને ઉત્સવ માટેનું પ્રકૃતિનું નિમંત્રણ સમજતા. થોડાં વર્ષો પહેલાં એક લાંબા સમયનું ચંદ્રગ્રહણ હતું. એ વખતે તેમણે મને બોલાવ્યો. કહે આવી જાઓ, આજે તો આપણે ધાબા પર જ ધ્યાન કરીશું, ઓશોનું પ્રવચન સાંભળીશું, નૃત્ય કરીશું અને ઉત્સવ મનાવીશું. એ રાત્રે સ્વામીજીએ ખગોળની વાતો કરી. સવારના સાડા-ત્રણ સુધી તેમની વાતો સાંભળતાં, ધ્યાન ધરતાં અને ઓશોનું પ્રવચન સાંભળતાં મેં ચંદ્રગ્રહણનો આનંદ માણ્યો.

સ્વામીજીનો જીવન પ્રત્યેનો અભિગમ એકદમ સકારાત્મક. તેમનું વ્યક્તિત્વ પ્રભાવશાળી અને જીવન પ્રેરણાદાયી હતા. આવી વિરલ વ્યક્તિના લાંબા સહવાસનો લાભ મળવો એ મારા જીવનની અત્યંત સુખદ ઘટના છે. સ્વામીજીને શત શત વંદન સાથે ફરી આદર ભરી અંજલિ.

એક કોયડો

ગુજરાતી ગણિતશાસ્ત્રી મગનલાલ નાથાલાલ ખત્રીએ નીચે મુજબનું એક પરિણામ આપ્યું છે.

$$\frac{336^2 + 337^2 + 338^2 + 339^2 + 340^2}{237^2 + 238^2 + 239^2 + 240^2 + 241^2} = 2$$

બીજી રીતે કહીએ તો પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાને બીજી કોઈ પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાથી ભાગતાં 2 મળે છે એવી અસંખ્ય સંખ્યાઓ છે.

અમે આવી અનેક રચનાઓ શોધી છે. જેમાંથી કેટલીક નીચે આપેલી છે.

$$(1)\ \frac{56^2+57^2+58^2+59^2+60^2}{39^2+40^2+41^2+42^2+43^2} = 2$$

$$(2)\ \frac{114239^2+114240^2+114241^2+114242^2+114243^2}{94638^2+94639^2+94640^2+94641^2+94642^2} = 2$$

$$(3)\ \frac{3027489309888^2+3027489309889^2+3027489309890^2+3027489309891^2+3027489309892^2}{2140758220991^2+2140758220992^2+2140758220993^2+2140758220994^2+2140758220995^2} = 2$$

આ રીતે પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાને બીજી કોઈ પાંચ ક્રમિક સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળાથી ભાગતાં 2 મળે તેવું અન્ય કોઈ ઉદાહરણ વાચકો મેળવશે?

કોઈ આ પ્રશ્નનો વ્યાપક ઉકેલ શોધશે ?

પ્રસ્તુત કર્તા : રાજેશ કુમાર મેર, રાજકોટ, 95379 27040

ગણિતની માયા

મેણાંના માર્યા મરીએ વાલીડા,
મેણાંના માર્યા મરીએ,
નેડો લગાડ્યો ગણિત સાથે રે.
માયા મુને એવી લાગી છે વાલીડા,
સપનામાં પણ ગણિત ભાળું વાલીડા.
નેડો લગાડ્યો........
ગુણાકાર કરતાં ગૂંચવાઈ ગઈ વાલીડા,
ઘડિયા સાથે નાતો જોડિયો વાલીડા.
નેડો લગાડ્યો.....
ભાગાકાર કરતાં ભટકી ગઈ વાલીડા,
શેષ તણા મોલ સમજાયાં વાલીડા.
નેડો લગાડ્યો......
સરવાળો કરી કરી થાકી ગઈ વાલીડા,
અનંત મે ક્યાંય દીઠું નહીં વાલીડા.
નેડો લગાડ્યો.......
ભૂમિતિ જોઈ ફરી ગઈ મતિ મારી વાલીડા,
પ્રમેય સાથે પ્રેમ કરી બેસી વાલીડા.
નેડો લગાડ્યો.......
રમેશ ગણિત ગણાવે છે વાલીડા,
વિના ગણિત સૂનો છે સંસાર વાલીડા.
નેડો લગાડ્યો ગણિત સાથે રે.

રમેશ કે.માલનિયા,
અમરેલી (M) 9727796934

ડૉ. સચિન ગજ્જર
અમદાવાદ (M) 99253 62754

(અત્રે આપેલા ત્રણે પ્રશ્નોના સાચા ઉકેલ શ્રી દયારામભાઈ ઠક્કર તરફથી મળ્યા છે.)

(4) If $f(x) = x^3 - x + 1$ and $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$, then find the vlaue of $\alpha^{16} + \beta^{16} + \gamma^{16}$.

Solution :

Here, α, β and γ are the roots of the equation $x^3 - x + 1 = 0$

$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = 0$ .... (i)

and $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 0 - 2(-1) \quad = 2$ .... (ii)

Now, $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha - 1 \quad \Rightarrow \alpha^n = \alpha^{n-2} - \alpha^{n-3}$ .... (iii)

Also,

$\alpha^3 = \alpha - 1$

$\therefore\ \alpha^{15} = (\alpha - 1)^5 \qquad \therefore\ \alpha^{16} = \alpha \cdot (\alpha - 1)^5$

$= \alpha^6 - 5\alpha^5 + 10\alpha^4 - 10\alpha^3 + 5\alpha^2 - \alpha$

$= (\alpha^4 - \alpha^3) - 5(\alpha^3 - \alpha^2) + 10(\alpha^2 - \alpha) - 10(\alpha - 1) + 5\alpha^2 - \alpha$ (From (iii))

$= \alpha^4 - 6\alpha^3 + 20\alpha^2 - 21\alpha + 10$

$= \alpha^2 - \alpha - 6\alpha + 6 + 20\alpha^2 - 21\alpha + 10$

$\therefore\ \alpha^{16} = 21\alpha^2 - 28\alpha + 16$

Similarly $\beta^{16} = 21\beta^2 - 28\beta + 16$ and $\gamma^{16} = 21\gamma^2 - 28\gamma + 16$

$\therefore\ \alpha^{16} + \beta^{16} + \gamma^{16} = 21(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 28(\alpha + \beta + \gamma) + 48$

$= 21(2) - 28(0) + 48$ (From (i) & (iii)

$= 90$

(5) Let $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ and $ac + bd = 0$. Prove that $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ and $ab + cd = 0$.

Solution :

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\qquad \therefore A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Now $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ **............ (1)**

Now $(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$

$\therefore\ (ad - bc)^2 + 0 = 1$

$\therefore\ (ad - bc)^2 = 1$

$\therefore\ (ad - bc) \neq 0 \qquad \therefore |A| \neq 0 \qquad \therefore\ A^{-1}$ exists

$\therefore$ From (1) $\quad A^{-1} = A^T \qquad \therefore\ A^{-1} \cdot A = I \qquad \therefore\ A^T \cdot A = I$

$\therefore \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ and $ab + cd = 0$.

(6) Let $x_1, x_2, ..., x_{10}$ be 10 numbers. Suppose that $x_i + 2\,x_{i+1} = 1$ for each i from 1 to 9. What is the value of $x_1 + 512x_{10}$?

Solution :

$$\begin{aligned} x_1 + 512\,x_{10} &= x_1 + 2x_2 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_3 + 8x_4 - 8x_4 - 16x_5 + 16x_5 + 32x_6 - 32x_6 - 64x_7 \\ &\quad + 64x_7 + 128x_8 - 128x_8 - 256x_9 + 256x_9 + 512x_{10} \\ &= (x_1+2x_2) - 2(x_2+2x_3) + 4\,(x_3+2x_4) - 8\,(x_4+2x_5) + 16\,(x_5+2x_6) \\ &\quad - 32\,(x_6+2x_7) + 64\,(x_7+2x_8) - 128\,(x_8+2x_9) + 256\,(x_9+2x_{10}) \\ &= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 \\ &\qquad\qquad (\text{ From } x_i + 2x_{i+1} = 1) \\ &= 341 - 170 = 171 \end{aligned}$$

પ્રા. પ્ર. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો : અંક-311

(7) Let a, b, c, x, y and z be real numbers which satisfy the three equations

$13x + by + cz = 0$, $ax + 23y + cz = 0$, $ax + by + 42z = 0$.

Suppose that $a \neq 13$ and $x \neq 0$. Find the value of $\frac{13}{a-13} + \frac{23}{b-23} + \frac{42}{c-42}$

a, b, c, x, y અને z વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે જે નીચેનાં સમીકરણોનું સમાધાન કરે છે.

$13x + by + cz = 0$, $ax + 23y + cz = 0$, $ax + by + 42z = 0$.

$a \neq 13$ અને $x \neq 0$ હોય તો $\frac{13}{a-13} + \frac{23}{b-23} + \frac{42}{c-42}$ ની કિંમત શોધો.

(8) The sequence $a_0, a_1, a_2,...$ satisfies the equation $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$, for every integer $n \geq 3$. If $a_{14} = 1$, $a_{19} = 10$ and $a_{24} = 100$, then find the value of a_{2021}.

શ્રેણી $a_0, a_1, a_2,...$ માટે $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$, $n \geq 3$. જો $a_{14} = 1$, $a_{19} = 10$ અને $a_{24} = 100$, હોય તો a_{2021} ની કિંમત શોધો.

(9) If z_1, z_2 and z_3 are three complex numbers such that $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ and $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, then prove that $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$.

જો સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ અને $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, તો સાબિત કરો કે $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

Beautiful Math : Music

પરજ મોદી

नृत्यं वाद्यानुगम प्रोक्तं गीतानुवर्ती च। *(Sangeet Ratnakar 1|21)*
Vocals, instrumentals, and dance collectively constitute music.

India has a rich tradition of Classical Music or *Shastriya Sangeet*. This system of music is not just an invaluable heritage, but also a timeless testimony, unifying arts with sciences and mathematics.

We shall try to explore mathematics in various aspects of music, such as

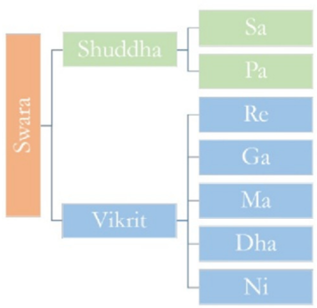
- *Swara* (vocals and stringed instruments)
- *Taal* (Percussion)
- *Nritya* (Dance)

1. Swara

Swara consists of various notes like *Sa, Re, Ga,* etc. that constitutes various ragas. *Swara(s)* can be classified into two basic streams: *Shuddh* and *Vikrit*. In a *saptak* (octave), there are 12 notes, including both the *shuddh* and *vikrit swara(s).*

Sr. No.	Name of Swara	Indian Symbol	Western Symbol
1	Shadaj	S / सा	C
2	Komal Rishabh	r / रे	C# / Db
3	Rishabh	R / रे	D
4	Komal Gandhaar	g / ग	D# / Eb
5	Gandhaar	G / ग	E
6	Madhyam	M / म	F
7	Madhyam Teevra	M# / मं	F# / Gb
8	Pancham	P / प	G
9	Komal Dhaivat	d / ध	G# / Ab
10	Dhaivat	D / ध	A
11	Komal Nishaad	n / नि	A# / Bb
12	Nishaad	N / नि	B

Shuddha swara(s) do not have alternate frequencies and hence, are also called *'Achal (immovable) Swara(s)'*. *Vikrit swara(s)*, on the other hand, may have alternate frequencies, either higher (*Teevra*) or lower (*Komal*) than the standard *swara*.

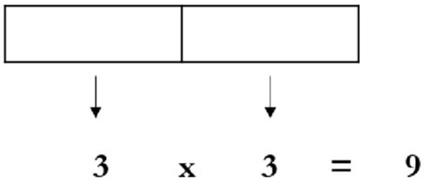


Ragas can be classified into various families, better known as '*thaat*'(s), having similar *swara(s)*. In Hindustani Classical Music, there are 10 *thaat*(s).

Mathematics is particularly useful in determining how many ragas can be created in of one *thaat*. The concept of permutation and combination functions here.

1.1 Classification of ragas

Ragas can be classified into three types based on their structure. The basic structure of a raga consists of *Aaroh* (ascending scale) and *Avroh* (descending scale). Depending on the number of notes in both *Aaroh* and *Avroh*, ragas can be classified into *Sampurna* (7 notes are included), *Shadav* (6 notes are included) and *Odav* (5 notes are included). These are known as the *Jaati*(s) of Ragas.

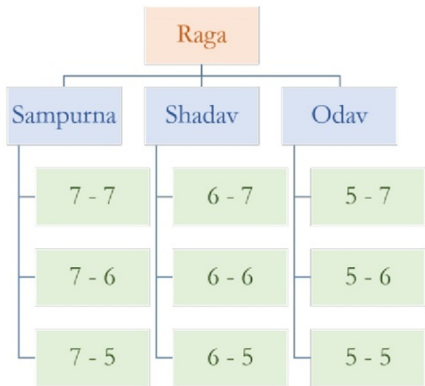


In order to determine how many *Jaati*(s) are possible, we can run a simple permutation.

Let us assume we have two vacant spots (*Aaroh* and *Avroh*). We can fill these up with 3 possibilities (*Aaroh* or *Avroh* can have a minimum of 5 *swara(s)* and maximum of 7 *swara(s)*, i.e., the possibilities are 5, 6, and 7 *swara(s)*). Thus, 9 *Jaati*(s) of ragas are possible.

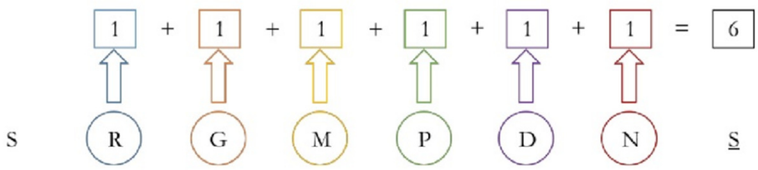
1.2 How many ragas can be created using permutation combination?

Sr. No.	Combination of Swaras	Number of Combinations
1	Sampurna – Sampurna (7 – 7)	1
2	Sampurna – Shadav (7 – 6)	6
3	Sampurna – Odav (7 – 5)	15
4	Shadav – Sampurna (6 – 7)	6
5	Shadav – Shadav (6 – 6)	36
6	Shadav – Odav (6 – 5)	90
7	Odav – Sampurna (5 – 7)	15
8	Odav – Shadav (5 – 6)	90
9	Odav – Odav (5 – 5)	225
Total Combinations		484

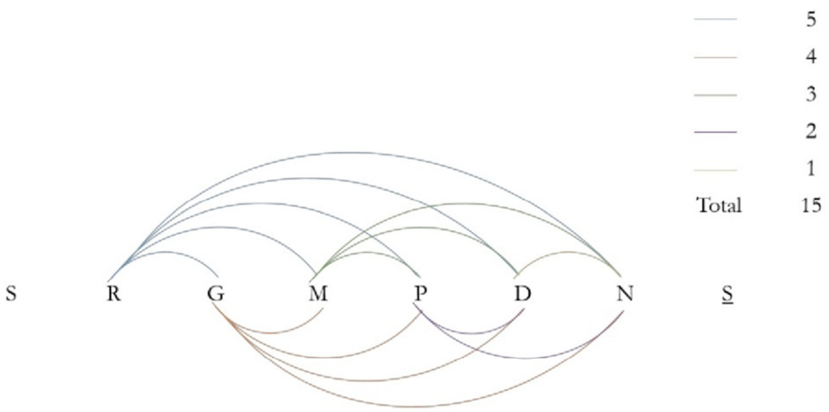


Different ragas can be created by combination of various *swara(s)*.

Consider the situation of *Sampurna – Sampurna*. Here, there are 7 *swara(s)* in both *aaroh* and *avroh* respectively. Only 1 combination is possible, i.e., *Sa-Re-Ga-Ma-Pa-Dha-Ni* and *Ni-Dha-Pa-Ma-Ga-Re-Sa.*



Let us consider *Sampurna – Shadav* or *Shadav – Sampurna*. We have 7 *swara*(s) on one hand and 6 on the other. Hence, we can skip 1 *swara* each (except Sa) during the 6 *swara aaroh* (ascent) or descent (*avroh*) respectively. Hence, we have 6 combinations.



Similarly, in case of *Odav* combinations, either in *Aaroh* or *Avroh,* 2 notes can be skipped together either in ascending or descending pattern, as shown in the diagram. This leaves us with 15 combinations.

	Aaroh **Combinations Possible (x)**	***Avroh*** **Combinations Possible (y)**	**Total Raga Combinations Possible (xy)**
Sampurna – Sampurna	1	1	1
Sampurna – Shadav	1	6	6
Sampurna – Odav	1	15	15
Shadav – Sampurna	6	1	6
Shadav – Shadav	6	6	36
Shadav – Odav	6	15	90
Odav – Sampurna	15	1	15
Odav – Shadav	15	6	90
Odav – Odav	15	15	225
Total Combinations			484

The total number of combinations including both *aaroh* and *avroh* can be calculated by multiplying *aaroh* and *avroh* combinations possible.

Thus, a total of 484 ragas can be created in one *thaat*.

Considering that there are 10 *thaat*(s), 4840 ragas can potentially exist.

1.3 Vaadi – Samvadi Swara(s)

Sa is the basic *swara* relative to which the entire *saptak* thrives. Let us consider the frequency of *Sa* to be 240 Hz in a particular scale. Mathematics comes in handy when we wish to know the frequency of one of the missing pairing *Vaadi - Samvadi Swara(s)*. *Vaadi swara* is the prominent *swara* of a raga, which is supported by the *Samvadi swara*.

Samvadi Swara, by convention lies at a frequency 1.5 times higher than that of *Vaadi Swara*.

Hence, if the *Vaadi Swara* is *Sa*, *Samvadi Swara* would have a frequency of 240 Hz x 1.5 = 360 Hz, which is the frequency of *Pa*. Hence, *Sa* and *Pa* form a pair of *Vaadi – Samvadi Swara*.

$$\boldsymbol{V = 1.5 \times S} \ \ (V = frequency\ of\ Vaadi\ Swara; S = frequency\ of\ Samvadi\ Swara)$$

Swara	Length of string (inches)	Frequency (Hz)
Sa	36	240
Re	32	270
Ga	30	288
Ma	27	320
Pa	24	360
Dha	21.33	405
Ni	20	450

1.4 Frequency and length of string

The data consists of length of string of a *Veena* corresponding to their rough experimental frequencies. In order to find frequency of a *swara* using the length of its string, we make use of simple ratios. Length of string is indirectly proportional to frequency pertaining to a *swara*.

For example, we know that the frequency of *Sa* is 240 Hz, length of string of *Sa* is 36 inches and length of string of *Ma* is 27 inches. How do we find frequency of Ma*?*

We equate ratios of lengths of strings of various *swara(s)* inverse to their respective frequencies. Let frequency of *Ma* be F. Hence,

$$\frac{36}{27} = \frac{4}{3} = \frac{F}{240}$$

$$F = 320\ Hz$$

$$\boldsymbol{F = \frac{36}{y} \times 240}$$

$$(F = frequency\ of\ any\ swara; y = length\ of\ string\ of\ that\ swara)$$

We can also perform back calculation and obtain length of string of a *swara* using its frequency.

For example, frequency of *Sa* is 240 Hz and frequency of *Ma* is 320 Hz. Length of string of *Sa* is 36 inches. Again we equate ratios of frequencies of *swara(s)* inverse to their length of strings.

$$\frac{320}{240} = \frac{36}{L}$$

$$L = 27\ inches$$

$$\boldsymbol{L = \frac{36}{\frac{z}{240}}}$$

$$(L = length\ of\ string\ of\ swara; z = frequency\ of\ that\ swara)$$

A basic conclusion can be drawn here:

$$\boldsymbol{Pitch} \propto \frac{\boldsymbol{Frequency}}{\boldsymbol{Length\ of\ String}}$$

1.5 Frequencies of semitones

There exist 12 semitones in an octave, i.e., there are 12 basic *swara(s)* (including *shuddha* and *vikrit*) in a *saptak*. These differ in frequency by a factor of $2^{1/12}$ = 1.0595 times the frequency of the *swara* preceding it.

$$\boldsymbol{f_n = f_b \times 2^{\frac{x}{12}}}$$

$$(f_n\ is\ the\ frequency\ of\ a\ particular\ swara;\ f_b\ is\ the\ frequency\ of\ base\ swara; x = difference\ in\ the\ semitones\ of\ n\ and\ x.)$$

Sr. No.	Swara	Ratio of Frequency w.r.t. S
1	S	1
2	r	16/15
3	R	10/9
4	g	6/5
5	G	5/4
6	M	4/3
7	M#	45/32
8	P	3/2
9	d	8/5
10	D	5/3
11	n	9/5
12	N	15/8
13	S (of the next octave)	2

Also, the frequencies of all *swara(s)* of a *saptak* have been determined with respect to their ratios with the *Sa* of the octave. It is given in the following table.

What is interesting is the ratio of a particular note in the preceding (*mandra saptak*), existing (*madhya saptak*) and succeeding (*taar saptak*) octave would be 1:2:3.

1.6 Merukhand

'*Meru*' means '*axis*' and '*khand*' means '*parts*'. It is a traditional practice wherein different *swara(s)* are arranged in different patterns. The number of patterns are the permutations possible with the given number of *swara(s)*. For example, if we take two swara(s) – Sa and Re. The number of swara(s) is 2.

2! = 2

Number of *swaras* = n	Number of unique combinations possible = n!	*Swaras* considered (here)	Combinations possible
3	3! = 3x2x1 = 6	S	SRG
			SGR
		R	RSG
			RGS
		G	GSR
			GRS

Hence the number of ways it can be sung is 'Sa-Re' and 'Re-Sa'.

Similarly, when we take 3 notes, number of permutations possible are 3! = 3x2x1 = 6.

$$\textbf{\textit{Number of merukhand patterns possible}} = \boldsymbol{n}!$$
$$(n \text{ is the number of swaras involved})$$

2. *Taal*

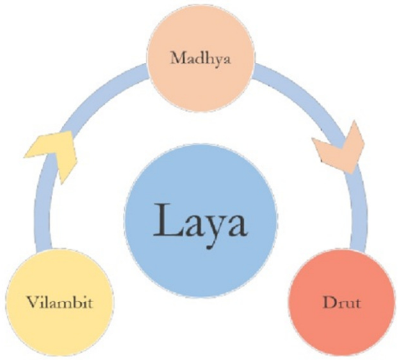
Indian Classical Music has rhythm as an integral part. These instruments are known as percussion instruments or *Taal Vaadhya*. Few of these include *Mridangam, Tabla*, *Dholak*, *Pakhawaj*, *Ghatam*, etc.

Let us consider the use of mathematics in *Tabla*. *Tabla* compositions form patterns within themselves. Even today, *Tabla* compositions tend to be delivered orally from a Guru to a *Shishya*. They are counted on fingers, spoken rhythmically with hand movements (*padhant*) and memorized.

2.1 Laya

Laya refers to the speed or tempo of a composition, it forms a backbone of any rendition in music. Mathematics constitutes the concept of *laya*. There are three fundamental types of *laya*: *vilambit* (slow), *Madhya* (medium), *Drut* (fast).

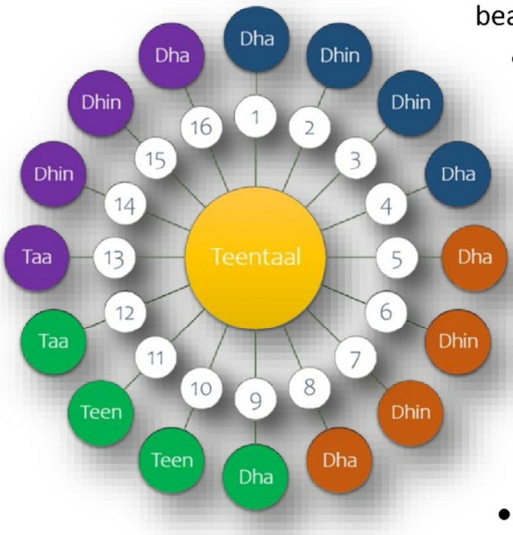
These can be visualized using a say '*Lay-ometer*' like an Odometer.



2.2 Taal Chakra

A *taal* refers to a cycle of fixed number of beats: '*maatraa*'(s), say 'n'.

A *taal* has the following basic components:



- *Maatraa*: number of beats
- *Khand*: Divisions in a *taal* consisting of sets of *maatraa*(s)
- *Bol*: Notations that constitute the *maatraa*(s)

Most common *taal*(s) include:

- *Teentaal* (16 beats)
- *Kehervaa* (8 beats)
- *Dadra* (6 beats)
- *Ektaal* (12 beats)
- *Jhaptaal* (10 beats)
- *Roopak* (7 beats)

A visual representation of *Teentaal* is shown. Here four different colors code four *khand*(s) in which the *taal* is divided.

Let us consider playing a *taal*, say *Teentaal* in four different *laya*(s).

While playing a composition, we try to accommodate *'n'* number of beats in one beat. Thus, the composition has to be played *'n'* times to arrive at the first beat back again.

X	1 Dha	2 Dhi	3 Dhi	4 Dha
2	5 Dha	6 Dhi	7 Dhi	8 Dha
0	9 Dha	10 Teen	11 Teen	12 Taa
3	13 Taa	14 Dhin	15 Dhin	16 Dha

Single Beat: The original *taal* is played once. Each cycle (*Aavartan*) takes 16 beats.

X	1 Dha Dhin	2 Dhin Dha	3 Dha Dhin	4 Dhin Dha
2	5 Dha Teen	6 Teen Taa	7 Taa Dhin	8 Dhin Dha
0	9 Dha Dhin	10 Dhin Dha	11 Dha Dhin	12 Dhin Dha
3	13 Dha Teen	14 Teen Taa	15 Taa Dhin	16 Dhin Dha

Double Beat (Dugun): The *taal* is played twice since two beats are accommodated in one beat. Color coding shows the *taal* played twice.

Each cycle (*Aavartan*) takes 8 beats.

X	1 Dha Dhin Dhin	2 Dha Dha Dhin	3 Dhin Dha Dha	4 Teen Teen Taa
2	5 Taa Dhin Dhin	6 Dha Dha Dhin	7 Dhin Dha Dha	8 Dhin Dhin Dha
0	9 Dha Teen Teen	10 Taa Taa Dhin	11 Dhin Dha Dha	12 Dhin Dhin Dha
3	13 Dha Dhin Dhin	14 Dha Dha Teen	15 Teen Taa Taa	16 Dhin Dhin Dha

Triple Beat (Trigun): The *taal* is played thrice, since three beats of the *taal* collectively occupy one beat.

Each cycle (*Aavartan*) takes roughly 5.3 beats.

Quad Beat (Chaugun): The *taal* is played four times, since four beats collectively occupy one beat.

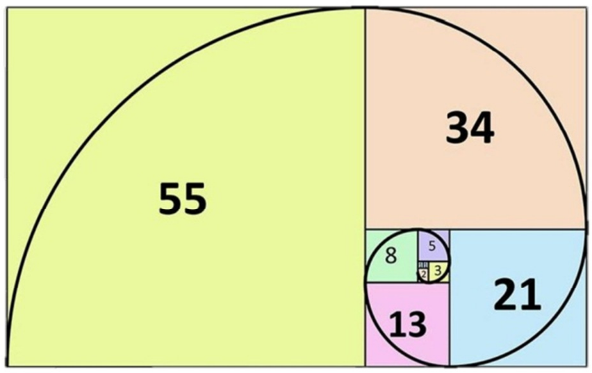
Each cycle (*Aavartan*) takes 4 beats.

2.3 The *Hemachandra* – Fibonacci Series

The *Hemachandra* numbers or Fibonacci series consists of numbers in which the successive terms are the sums of the preceding two consecutive terms. It is as follows:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610….

These are also visually represented as the Golden Ratio.



Let us consider two sets of *bol*(s) (notations) in *Tabla*, namely, '*Dha Tee'* and '*Na'*. The first one is a long syllable and the second one is a short syllable. Let us try to fill 8 beats using various combinations of these two *bol*(s).

Let the number of beats be 'n' = 8

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$$
$$H_n \ refers\ to\ n^{th}\ number\ in\ the\ Fibonacci\ Series$$
$$H_8 = H_7 + H_6$$
$$H_8 = 21 + 13\ (Refer\ the\ above\ Fibonacci\ sequence)$$
$$H_8 = 34$$

Thus, 34 combinations can be made by different combinations of these sets of notes. This method is used in elaborate compositions like *Kaayadaa*(s) in *Tabla* and ancient Sanskrit poetry.

3. Nritya

India has six major classical dance forms, namely:

- *Bharatnatyam*
- *Kathak*
- *Odissi*
- *Kuchipudi*
- *Manipuri*
- *Kathakali*

All these dance forms are uniquely beautiful and complex. Dancing relies on rhythm, thus, mathematics. Besides being used in compositions and tempo, mathematics can be clearly 'seen' in these dance forms.

3.1 Shapes and Symmetry

Lord *Nataraja's* picture can be seen inscribed within a circle and two congruent triangles, signifying importance of geometry in creating balance in various positions and mudra(s).

3.2 Lines and their significance

Various postures can be roughly portrayed using straight lines. These lines have their own significance.

Vertical lines have the nature of *'fire'*. They communicate *strength, stability and authority*. *Horizontal lines* have the nature of *'water'*. They convey calm, peace and passiveness. *Diagonal lines* have the nature of *'wind'*. They impart *movement, action and drama*.

Thus, a fundamental concept of geometry – a line segment – communicates various emotions in dance (here, *Bharatnatyam*).

Shapes formed by various poses can also be seen. Thus, geometry has a role to play in the formation and stability of these poses. These positions are symmetrical, thus, pleasing to the eyes.

References:

- Vasant, '*Sangeet Visharad*,' Sangeet Press, Hathras, December '89 [ISBN: 81-85057-00-1]
- Sushan Konar, '*The Sound of Music: Science of Musical Scales*,' Resonance, October 2019
    - *[Link: https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/024/10/1125-1135]*
- Urmi Battu, '*Merukhand*' Blog
    - *[Link: https://www.urmimusic.com/post/merukhand]*
- Shri Munjal Mehta, '*Tabla Vaadan Parikshan*,' 2010
- Manjul Bhargava, '*Poetry, Daisies and Cobras*,' YouTube video
    - *[Link: https://www.youtube.com/watch?v=siFBqH-LaQQ]*
- Jaikumar Ranganatham, '*Decoding the Principles of Design and Sacred Geometry*'

તંત્રી મંડળ :