RNI No. 9011/63 ISSN 0971-6475

સુગણિતમ્

ત્રિમાસિક

વર્ષ : 61 ઇ-આવૃત્તિ-4 સળંગ અંક : 309 એપ્રિલ 2023
For private circulation only

મુખપૃષ્ટ પરની ગણિતજ્ઞ મેરીના વિઆઝોવસ્કા

જન્મ: 12-12-1984

આદ્યતંત્રી
પ્રાધ્યાપક પ્ર.ચુ.વૈદ્ય

સંવર્ધક તંત્રી
ડૉ. અરુણ મ. વૈદ્ય

મુદ્રક અને પ્રકાશક : પ્રા. અ.મ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન – ગુજરાત ગણિત મંડળ

અનુક્રમણિકા

સળંગ અંક : 308 ઈ-આવૃત્તિ-3 જાન્યુઆરી - 2023

સંપાદકીય

આ સાથે સુગણિતમ્‌નો સળંગ અંક 309 (e-અંક 4) આપના હાથમાં મૂકતાં આનંદ અનુભવીએ છીએ. આ પહેલાના ત્રણ e-અંકોમાંથી e-અંક 2 (સળંગ અંક 307) 'સ્વ.પ્રાધ્યાપક નરેન્દ્ર આર. લાધાવાલા સ્મૃતિ અંક' તથા e-અંક 3(સળંગ અંક 308) 'સ્વ. પ્રાધ્યાપક ફાધર સી. જી. વાલેસ સ્મૃતિ અંક' તરીકે પ્રકાશિત થયા હતા. જ્યારે જુલાઈ 2022માં પ્રકાશિત e-અંક 1 (સળંગ અંક 306)માં સુગણિતમ્‌નાં નિયત કરેલ પાનાંઓની સંખ્યાની મર્યાદાને તોડીને 78 પાનાંઓનો અંક પ્રકાશિત કરવામાં આવ્યો હતો. હવે આ અંકથી વિશિષ્ટ સંજોગો સિવાય વધુમાં વધુ 50 પાનાંઓનો જ e-અંક પ્રકાશિત કરવાનું નક્કી કરેલ છે.

તા. 4-5 માર્ચ, 2023 દરમિયાન વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત તથા ગુજરાત ગણિત મંડળના સંયુક્ત ઉપક્રમે '4th Prof. P.C. Vaidya International Conference on Mathematical Sciences'નું સફળ આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. જેનો સંક્ષિપ્ત અહેવાલ આ અંકમાં સામેલ છે. આ આયોજન માટે યજમાન સંસ્થાને અભિનંદન

આ સામયિકની નીતિ મુજબ ગણિત સાથે સંકળાયેલ કોઈ પણ મૌલિક લેખ સુગણિતમ્‌ના હવે પછીના અંકોમાં શક્ય પ્રકાશન માટે આવકાર્ય છે, કે જે સુગણિતમ્‌ના વાચકો માટે રસદાયક બની શકે. આ ઉપરાંત સુગણિતમ્‌ને સમૃદ્ધ બનાવવા માટેનાં આપનાં સૂચનો અને અભિપ્રાયો આવકાર્ય છે.

આ અંકને તૈયાર કરવા માટે હરહંમેશની જેમ જહેમત ઉઠાવનાર પ્રા. પ્રહલાદભાઈ વ્યાસનો સંપાદક મંડળ ખાસ આભાર માને છે.

અત્યાર સુધી જે ઉમળકાભર્યો આવકાર સુગણિતમ્‌ને મળેલ છે તે આગળ પણ ચાલુ રહેશે એવી આશા સાથે આપણે અંક નં. 310માં ફરી મળશું.

- સંપાદકો

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

સો અંક પહેલાં

[સુગણિતમનો સળંગ અંગ 209 મે-જૂન 2004નો હતો. આ અંકમાં પ્રગટ થયેલ પ્રા. રમેશચંદ્ર ના. દેસાઈ એ લખેલો લેખ "સુવર્ણ ગુણોત્તરનાં વિવિધ રૂપો" અત્રે પુનર્મુદ્રિત કરેલ છે. - પ્રધાન સંપાદક]

સુવર્ણ ગુણોત્તરનાં વિવિધ રૂપો

સુવર્ણ ગુણોત્તર ગણિતમાં ખૂબ જાણીતો છે. આમ તો તે ગુણોત્તર એક અસંમેય સંખ્યા છે છતાં તે ખૂબ મહત્ત્વ ધરાવે છે. રેખાખંડ $\overline{AB}$ પર બિંદુ P એવું હોય કે

A P B

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$

તો P બિંદુ $\overline{AB}$નું સુવર્ણ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તેમ કહેવાય છે. અલબત્ત P $\overline{AB}$નું $\frac{AB}{AP}$ એ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તેથી $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$ હોય, તો $\frac{AB}{AP}$ સુવર્ણ ગુણોત્તર દર્શક સંખ્યા છે. આ સંખ્યા શોધવા માટે ધારો કે AP = x, PB = y અને તેથી AB = $x + y$ છે. એટલે

$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$ માંથી $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$

આમ જો સુવર્ણ ગુણોત્તર $\frac{x+y}{x}$ માટે λ મૂકીએ તો

$1 + \frac{y}{x} = \lambda$ તેથી $\frac{y}{x} = \lambda - 1$

અથવા $\frac{X}{y} = \frac{1}{\lambda - 1}$ મળે.

તેથી $\lambda = \frac{1}{\lambda - 1}$

એટલે કે $\lambda(\lambda - 1) = 1$

અથવા $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

આ સમીકરણનાં બે બીજ $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ છે. ગુણોત્તર λ ધન સંખ્યા છે એ ધ્યાનમાં રાખીએ તો $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ મળે.

આમ λ (સુવર્ણ ગુણોત્તર) અસંમેય છે અને $\lambda^2 = \lambda + 1$ થાય છે. λની આશરે પડતી કિંમત 1.618 .... છે.

હવે આ જ સંખ્યા λ માટે બે અન્ય સ્વરૂપો મેળવીશું. પહેલાં તો $\lambda^2 = 1 + \lambda$ પરથી $\lambda = \sqrt{1+\lambda}$ મળે.

અહીં જમણી બાજુએ λ છે તેને સ્થાને આ જ સમીકરણને આધારે $\sqrt{1+\lambda}$ લખીએ, તો

$\lambda = \sqrt{1 + \sqrt{1+\lambda}}$ મળે.

ફરી જમણી બાજુ આવતા λ માટે $\sqrt{1+\lambda}$ લખીએ અને આ વિધિ કર્યા જ કરીએ તો

$$\lambda = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

મળે જમણી બાજુ અનંત પ્રક્રિયા છે તે ધ્યાનમાં રાખીએ શું અનંત પદાવલિ

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

ને કોઈ કિંમત હોઈ શકે ખરી એવો પ્રશ્ન કરી શકાય. એને કિંમત છે તેમ ધારી લઈએ તો કિંમત શોધવાનું સહેલું છે, કારણ કે કિંમત x હોય તો

$$x = \sqrt{1 + \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}\right)}$$
$$= \sqrt{1 + x}$$

તેથી $x^2 \equiv x + 1$ અને આ સમીકરણનું ધન મૂળ તો સુવર્ણ ગુણોત્તર λ જ છે, માટે આપણી અનંત પદાવલિનું મૂલ્ય λ જ છે.

આમ સુવર્ણ ગુણોત્તરને એક પરંપરિત વર્ગમૂળના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ફરી પાછા સમીકરણ $\lambda^2 = \lambda + 1$ પર આવીએ બંને બાજુએ λ વડે ભાગતાં $\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}$ મળે. હવે જમણી બાજુએ જે λ છે તેને સ્થાને આ જ સમીકરણનો હવાલો આપી $1 + \frac{1}{\lambda}$ લખીએ, તો

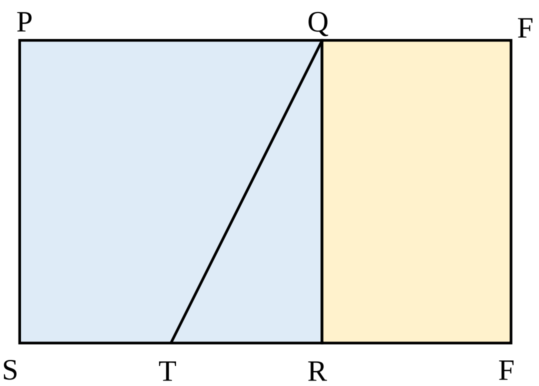
$$\lambda = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}$$

મળે. ફરી આ જ વિધિ ચાલુ રાખીએ તો

$$\lambda = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

એવો પરંપરિત અપૂર્ણાંક મળે.

જે લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈનો ગુણોત્તર λ હોય તેવા લંબચોરસને સુવર્ણ લંબચોરસ કહે છે. એક ચોરસમાંથી સુવર્ણ લંબચોરસ મેળવવાની નીચેની રચનામાં સૌને મજા આવશે.



આકૃતિ

PQRS ચોરસ છે. $\overline{RS}$નું મધ્યબિંદુ T રચો. T કેન્દ્ર અને TQ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ જો $\overrightarrow{SR}$ ને Fમાં છેદે અને લંબચોરસ PSFE પૂરો કરીએ તો તે સુવર્ણ લંબચોરસ થશે, એટલે કે $\frac{SF}{PS}=\lambda$. આ સાબિત કરવું જોઈએ.

સૌ લંબચોરસમાં સુવર્ણ લંબચોરસ આંખને સૌથી સુંદર લાગે છે માટે જ મોટાભાગનાં મકાનોમાં બારી, બારણાં, ટેબલ વગેરે સુવર્ણ લંબચોરસ રખાય છે. દવાનાં ખોખાં, દીવાસળીની પેટી વગેરે... બધાંમાં પણ સુવર્ણ લંબચોરસ રાખવાનો જ પ્રયત્ન કરાય છે. સ્ત્રી-પુરુષ વિશે એવું કહેવાય છે કે તેની ઊંચાઈ અને તેની નાભિની ઊંચાઈનો ગુણોત્તર જો λ હોય તો તેની દેહયષ્ટિ મનોહર લાગે છે.

ફિબોનાકી સંખ્યાઓ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... છે. તેમાંથી પ્રથમ બે 1 અને 1 છે અને તે સિવાયની દરેક આગલી બેના સરવાળા જેટલી છે. આમાંની દરેક સંખ્યાનો તેની આગળની સંખ્યા સાથે ગુણોત્તર લઈ તેની શ્રેણી બનાવીએ તો

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$

મળે, આ શ્રેણી 1, 2, 1.5, 1.66, 1.6, 1.625, 1.615, ... છે.

એમ સાબિત કરી શકાય છે આ શ્રેણીનું લક્ષ λ = 1.618.... છે.

$$\lambda = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

એ જ રીતે કોઈ પણ n માટે

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \cdots}}}}$$

નું મૂલ્ય પણ શોધી શકાય. તેનું મૂલ્ય $\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$ થાય તે સાબિત કરવાની મજા આવશે.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ-3

ડૉ. દેવેભદ્ર વી. શાહ
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત.
(M) 9898057891

આ લેખમાળાનાં પ્રથમ બે લેખમાં બ્લેકહોલ સંખ્યાઓ 123 તથા 1 વિશેની વિસ્તૃત માહિતી રજૂ કરવામાં આવી હતી. હવે ત્રીજા લેખમાં ખૂબ જ વિખ્યાત એવી કાપરેકર અચળ સંખ્યાઓને સંબંધિત જાણકારી પ્રસ્તુત કરવામાં આવશે, જે બ્લેકહોલ સંખ્યાની વ્યાખ્યામાં બંધબેસતી આવે છે.

કાપરેકરની બ્લેકહોલ સંખ્યાઓને સમજવા માટે સર્વપ્રથમ તો તેની સાથે સંકળાયેલ ખૂબ જ સરળ એવી ક્રિયા fની જાણકારી મેળવવી જરૂરી છે. તે માટે ધારો કે k અંકોની કોઈ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n આપેલ છે. nના અંકોને ઊતરતા અને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં મળતી સંખ્યા ધારો કે અનુક્રમે n' તથા n'' છે. હવે $f(n) = n' - n''$ની ગણતરી કરો. અહીં એ નોંધીએ કે જો n (અને n')માં 0 વાળા પદ (કે પછી પદો) આવતા હોય તો n''ની શરૂઆત તેટલા જ 0થી કરવાની રહેશે. આમ n' તથા n'' બંને કિંમત મેળવ્યા બાદ ફરીથી તેના અંકો માટે આ જ પ્રકારની પ્રક્રિયા કરીને $f(f(n)) = f^2(n)$ મેળવો. આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખતા પસંદ કરેલ k અંકોની સંખ્યા n પર આધારિત કોઈક ધનપૂર્ણાંક r માટે નીચેનામાંની કોઈ એક પરિસ્થિતિ ઉદ્ભવશે.

(i) $f^r(n) = 0$

(ii) $f^r(n) = f^{r+1}(n), = f^{r+2}(n) = \cdots =$ અચળ

(iii) $f^r(n), f^{r+1}(n), f^{r+2}(n), \ldots\ f^m(n)$ પ્રકારની કોઈક એવી શ્રેણી મળશે કે જેથી $f^{m+1}(n) = f^r(n);\ f^{m+2}(n) =\ f^{r+1}(n);$ વગેરે થાય.

જ્યારે nમાં આવેલા બધા જ k અંકો એક સમાન હોય (દા.ત. 333, 5555, 99999 વગેરે) ત્યારે $n = n' = n''$ હોવાથી $f(n) = 0$ થશે. આમ nની પસંદગી એવી રીતે કરવી જોઈએ કે જેથી તેના બધા જ અંકો એક સમાન ન હોય.

બીજા વિકલ્પમાં વિવિધ k માટે જે અચળ સંખ્યાઓ મળે છે તે સંખ્યાઓની શ્રેણીને કાપરેકર અચળોની શ્રેણી કહેવાય છે, તથા આ શ્રેણીનાં પદોને k કક્ષાના કાપરેકર અચળો (અથવા કાપરેકર સંખ્યાઓ) કહેવાય છે, દશાંશ પદ્ધતિમાં આ શ્રેણી 495, 6174, 549945, 631764, 63317664, 97508421, 554999445, ... પ્રકારની મળે છે. આ શ્રેણીની વધુ માહિતી સંદર્ભ 3 પરથી મળી રહેશે.

ત્રીજા વિકલ્પમાં આપેલ સંખ્યા n પર ઉપરોક્ત ક્રિયા f વારંવાર લાગુ પાડતાં અમુક પદો પછી જે ચક્રીય શ્રેણી મળે છે. તે શ્રેણી 53955, 59994, 61974, 62964, 71973, 74943, 75933, 82962, 420876, ... પ્રકારની મળે છે. આ શ્રેણીનાં પદોની જાણકારી સંદર્ભ 4 પરથી મળી શકે છે.

ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા તેના શોધક ડી. આર. કાપરેકરના નામ પરથી ‘કાપરેકર પ્રક્રિયા’ તરીકે જાણીતી છે. સંખ્યાઓના આ ગુણધર્મની શોધ મહારાષ્ટ્રના દેવલાલી ગામની શાળાના શિક્ષક શ્રી. દત્તાત્રેય રામચંદ્ર કાપરેકરે કરી. તેમના માનમાં બીજા વિકલ્પમાં મળતી સંખ્યાઓની શ્રેણીનાં પદોને કાપરેકર અચળો કહેવાય છે. શ્રી કાપરેકરનો જન્મ 17 જાન્યુ. 1905 ના રોજ મહારાષ્ટ્રના દહાણુમાં થયો હતો. તેમણે પ્રાથમિક શાળાનો અભ્યાસ મહારાષ્ટ્રના થાણેમાં

તથા તે પછીનો અભ્યાસ પુનાની ફર્ગ્યુસન કૉલેજમાં કર્યો હતો. વર્ષ 1927માં 22 વર્ષની ઉંમરે તેમને ગણિતશાસ્ત્રમાં મૌલિક કાર્ય માટે રેન્ગલર આર.પી. પરાંજપે પારિતોષિક એનાયત કરવામાં આવ્યું હતું. વર્ષ 1929માં મુંબઈ યુનિવર્સિટીમાંથી તેઓએ સ્નાતકની ઉપાધિ મેળવી હતી. વિદ્યાર્થીકાળ દરમિયાન તેમના પર સંખ્યાઓની ધૂન સવાર થઈ જતાં કેટલીક વાર અન્ય વિષયો તરફ દુર્લક્ષ સેવી રામાનુજનની જેમ પરીક્ષામાં નાપાસ પણ થયા હતા. તેમણે ક્યારેય અનુસ્નાતકનો અભ્યાસ કર્યો ન હતો. આખરે પોતાની સમગ્ર કારકિર્દી દરમિયાન તેઓ દેવલાલી (મહારાષ્ટ્ર)ની શાળાના શિક્ષક રહ્યા હતા.

ગણિત પ્રત્યે અપ્રતિમ લગાવ હોવાના કારણસર કાપરેકર ‘ગણિતાનંદ’ જેવા હુલામણા નામથી પ્રખ્યાત થયા હતા. તેઓએ પુનરાવર્તિત દશાંશ (Recurring decimals) જાદુઈ ચોરસ અને વિશિષ્ટ સંખ્યાગણિતીય ગુણધર્મો ધરાવતી અનેક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ પર મુખ્યત્વે એકલતામાં રહીને ગહન કાર્ય કર્યું હતું અને તેમણે આ કાર્ય પ્રકાશિત પણ કર્યું હતું. તેમણે કાપરેકર અચળ ઉપરાંત કાપરેકર સંખ્યાઓ, (Self numbers), હર્ષદ સંખ્યાઓ તથા ડેમ્લો સંખ્યાઓ (Demlo numbers)નો પણ ગણિતજગતને પરિચય કરાવ્યો હતો. શરૂઆતમાં તેમણે સામાન્ય સ્તરનાં ગણિતનાં સામયિકોમાં કે પછી ખાનગી પત્રવ્યવહારમાં તેમનું કાર્ય પ્રકાશિત કરાવ્યું હતું. આથી તેમનાં કાર્યોને ભારતીય ગણિતજ્ઞોએ ગંભીરતાપૂર્વક લીધાં ન હતાં પરંતુ વર્ષ 1975માં Scientific American સામયિકની Mathematical Games નામની કટારમાં વિખ્યાત લેખક માર્ટીન ગાર્ડનરે કાપરેકર અને તેનાં થોડાંક કાર્યો વિશેની જાણકારી આપી હતી. ત્યારબાદ તેમણે આંતરરાષ્ટ્રીય કક્ષાએ ખ્યાતિ પ્રાપ્ત કરી હતી. આ ઉપરાંત કાપરેકર અચળ 6174 એ પણ લોકોનું ધ્યાન ખેંચ્યું હતું. સમય જતાં તેમણે સ્થાપિત ગુણધર્મો પર ગુજરાત સહિત દેશવિદેશનાં કેટલાય સંશોધકોએ વધુ કાર્ય કર્યું હતું. વર્ષ 1986માં દેવલાલી મુકામે 81 વર્ષની ઉંમરે કાપરેકરનું અવસાન થયું હતું.

કાપરેકરનાં જીવન વિશેની માહિતી મેળવ્યા બાદ ફરીથી આપણું ધ્યાન કાપરેકર અચળોની શ્રેણી પર કેન્દ્રિત કરીએ કાપરેકર અચળોની શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 495 છે. કોઈ પણ ત્રણ અંકોની સંખ્યા પરથી 495 કઈ રીતે મળે છે તે સમજવા માટે એક ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે $n = 573$ (અહીં $k = 3$ થાય છે) nના અંકોને ઉતરતા તથા ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીને તેનો તફાવત લેતાં, એટલે કે ક્રિયા f લાગુ પાડતાં $f(n) = 753 – 357 = 396$ મળશે. હવે 396નાં પદો પર ફરીથી ક્રિયા f લાગુ પડતાં $f^2(n) = 963 – 369 = 594$ મળશે. એ જ પ્રમાણે $f^3(n) = 954 – 459 = 495$ મળશે. જો 495 પર ફરી એકવાર આ જ ક્રિયા લાગુ પાડીએ તો $f^4(n) = 954 – 459 = 495$ જ મળશે. અને ત્યારબાદ $f^4(n) = f^5(n) = f^6(n) = ... = 495$ જ મળશે. આમ ક્રિયા f ને 4 કે તેથી વધુ ગમે તેટલી વખત લાગુ પાડીએ તો પણ દરેક વખતે 495 જ મળે છે. આમ $k = 3$ માટે ઉપર દર્શાવેલ ક્રિયા f માટે 495ને બ્લેકહોલ સંખ્યા ગણી શકાય. સ્વાનંદ માટે વાચક જેના ત્રણેય અંકો સમાન ન હોય તેવી, કોઈ ત્રણ અંકોની સંખ્યા n લઈને ચકાસી શકાશે કે કોઈક r માટે $f^r(n) = 495$ અવશ્ય જ મળશે.

કાપરેકર અચળોની શ્રેણીનું બીજું પદ ચાર અંકોની સંખ્યા 6174 છે (એટલે કે $k = 4$) જે સામાન્ય રીતે કાપરેકર અચળ તરીકે વિખ્યાત છે. ચાર અંકોની કોઈપણ સંખ્યા પરથી 6174 કઈ રીતે મળશે તે સમજવા માટે જેના ચારેય અંકો સમાન ન હોય તેવી ચાર અંકોની કોઈક સંખ્યા પસંદ કરીએ. ઉદાહરણ તરીકે $n = 2021$ લઈએ. હવે nના અંકોને ઉતરતા તથા ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીને તેનો તફાવત લેતાં $f(n) = 2210 – 0122 = 2088$ મળશે. ફરીવાર આ જ પ્રક્રિયા કેટલીક વધુ વખત લાગું પડતાં $f^2(n) = 8820 – 0288 = 8532$ તથા $f^3(n) = 8532 – 2358 =$

6174 મળે છે. વળી $f^3(n)$ પર વધુ એક વખત ક્રિયા f લાગુ પાડીએ તો $f^4(n) = 7641 - 1467 = 6174$ જ મળે છે !! આમ એક વાર 6174 પર પહોંચ્યા પછી ગમે તેટલી વખત ક્રિયા f લાગુ પાડીએ તો પણ હંમેશા 6174 જ મળે છે. આમ $n = 2021$ પર ત્રણ વખત પ્રક્રિયા f લાગુ પાડતાં 6174 મળી જાય છે.

અન્ય એક ઉદાહરણ તરીકે $n = 2050$ પસંદ કરીએ તો $f(n) = 5200 - 0025 = 5175$, $f^2(n) = 7551 - 1557 = 5994$, $f^3(n) = 5355$, $f^4(n) = 1998$, $f^5(n) = 8082$, $f^6(n) = 8532$ અને $f^7(n) = 6174$ મળશે. આમ $n = 2050$ માટે કાપરેકરની પ્રક્રિયા 7 વખત કરતાં 6174 મળે છે.

આ તબક્કે એવો પ્રશ્ન ઉદ્‌ભવે કે શું ચાર અંકો દ્વારા બનતી ગમે તે સંખ્યા n (સંખ્યાઓ 1111, 2222, ... 9999 સિવાયની) પર ક્રિયા f ને પુનરાવર્તિત રીતે લાગુ પાડતાં અંતમાં હંમેશાં 6174 જ મળશે ? જો આવું થતું હોય તો કાપરેકર પ્રક્રિયા f માટે 6174 ને ચાર અંકોવાળી બ્લેકહોલ સંખ્યા કહી શકાય.

આ પડાવ પર સંખ્યા 6174 ની પશ્ચાદ્‌ભૂમિકા પર નજદીકથી નજર કરીએ. ધારો કે n એ એવી ચાર અંકો વાળી સંખ્યા છે જેના તમામ અંકો એક સમાન નથી. ધારો કે nના અંકોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવતાં મળતી સંખ્યા $n' = abcd = 1000a + 100b + 10c + d$ છે અને તે જ અંકોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં તે સંખ્યા $n'' = dcba = 1000d + 100c + 10b + a$ બને છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ થશે. હવે n પર દર્શાવેલ પ્રક્રિયા કરતાં

$$f(n) = n' - n''$$
$$= (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a)$$
$$= 1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a)$$
$$= 999(a - d) + 90(b - c)$$

અહીં $1 \leq a - d \leq 9$ તથા $0 \leq b - c \leq 9$. આથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ પણ ચાર અંકની સંખ્યા પર પ્રક્રિયા f લાગુ કરતાં $f(n)$ માટે બરાબર 90 જેટલા ભિન્ન વિકલ્પો મળી શકે છે, જે કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે.

કોષ્ટક-1

999 (a–d)

90 (b-c)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
1	1089	2088	3087	4086	5085	6084	7083	8082	9081
2	1179	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
3	1269	2268	3267	4266	5265	6264	7263	8262	9261
4	1359	2358	3357	4356	5355	6354	7353	8352	9351
5	1449	2448	3447	4446	5445	6444	7443	8442	9441
6	1539	2538	3537	4536	5535	6534	7533	8532	9531
7	1629	2628	3627	4626	5625	6624	7623	8622	9621
8	1719	2718	3717	4716	5715	6714	7713	8712	9711
9	1809	2808	3807	4806	5805	6804	7802	8802	9801

હવે $a \geq b \geq c \geq d$ હોવાથી $a + c \geq b + d$ થશે અને તેથી $a - d \geq b - c$ મળશે. આમ કોષ્ટકમાં નીચે તરફ ડાબી બાજુ પર આવેલી 36 સંખ્યાઓ અર્થહીન બની જાય છે. હવે કોષ્ટકની 90 સંખ્યાઓમાંથી આ 36 સંખ્યાઓ કાઢી નાખતાં બાકી રહેતી 54 સંખ્યાઓ પર ફરીથી પ્રક્રિયા f લાગુ પાડવા માટે આ 54 સંખ્યાઓને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવતાં કોષ્ટક-૨ મુજબની સંખ્યાઓ મળે છે.

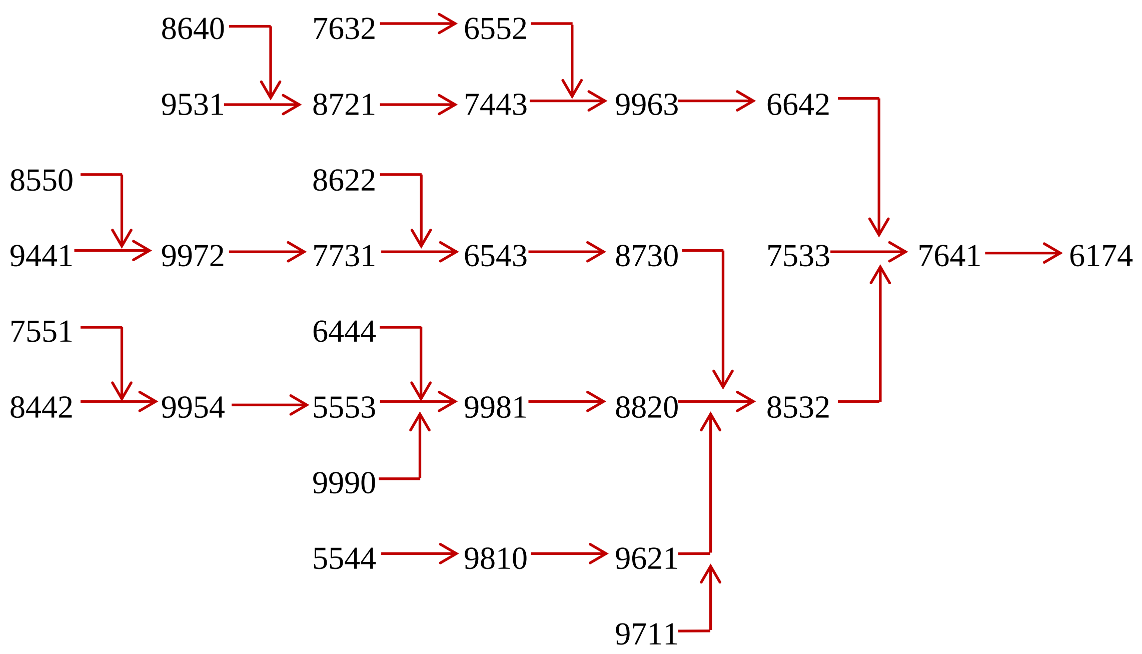
કોષ્ટક-૨

999 (a-d)

90 (b-c)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9990	9981	9972	9963	9954	9954	9963	9972	9981
1	9810	8820	8730	8640	8550	8640	8730	8820	9810
2		8721	7731	7641	7551	7641	7731	8721	9711
3			7632	6642	6552	6642	7632	8622	9621
4				6543	5553	6543	7533	8532	9531
5					5544	6444	7443	8442	9441
6						6543	7533	8532	9531
7							7632	8622	9621
8								8712	9711
9									9801

હવે આ કોષ્ટકની સંખ્યાઓનું બારીકાઈથી અવલોકન કરતાં એ માલુમ પડે છે કે આ સંખ્યાઓમાંથી 24 સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન થાય છે (જેમ કે 9954, 8640, 6543, ... વગેરે). આથી આ 24 સંખ્યાઓને કાઢી નાખતાં આ કોષ્ટકમાં હવે ફક્ત 30 સંખ્યાઓ બાકી રહી જાય છે. આ 30 સંખ્યાઓ પર વારાફરતી પ્રક્રિયા f એકથી વધુ વખત લાગુ પડતાં તે કઈ રીતે 6174 પર પહોંચે છે તે આકૃતિ 3માં યોજનાકીય રેખાકૃતિ દ્વારા દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ-3



આમ હવે એ સ્પષ્ટ થાય છે કે જેના બધા જ અંકો સમાન ન હોય તેવી કોઈ પણ ચાર અંકોની સંખ્યા પર વધુમાં વધુ 7 વખત પ્રક્રિયા f કરવાથી ચોક્કસપણે 6174 મળે જ છે.

ત્રણ અને ચાર અંકોના કાપરેકર બ્લેકહોલ અચંળાકોની જાણકારી મેળવ્યા બાદ સ્વાભાવિક જ એવો પ્રશ્ન ઉદ્ભવે છે કે શું 2 અંકો કે પછી 5 અંકો કે પછી તેથી પણ વધુ અંકો વાળી સંખ્યાઓ માટે આજ પ્રકારના કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળાંકો મળશે ?

ઉદાહરણ તરીકે સર્વપ્રથમ $k = 2$ (એટલે કે બે અંકોની બનેલ સંખ્યા) હોય તેવી સંખ્યા $n = 28$ પસંદ કરીએ તો સ્પષ્ટ છે કે $f(n) = 82 - 28 = 54$ થશે. તેજ રીતે $f^2(n) = 54 - 45 = 9$, $f^3(n) = 90 - 09 = 81$, $f^4(n) = 81 - 18 = 63$, $f^5(n) = 63 - 36 = 27$, $f^6(n) = 72 - 27 = 45$ અને $f^7(n) = 54–45=9$ થશે. આમ ઉદાહરણ માટે

$9 \to 81 \to 63 \to 27 \to 45 \to 9$

પ્રકારનું આવર્તન મળે છે. અન્ય કોઈપણ બે અંકોની સંખ્યા માટે પણ આજ પ્રકારનું કોઈક આવર્તન મળશે. આમ, $k = 2$ માટે કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળાંકનું અસ્તિત્વ નથી.

વળી, $k = 5$ (એટલે કે પાંચ અંકોની સંખ્યા) માટે એવું જોવામાં આવ્યું છે કે ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા f પરંપરિત રીતે લાગુ પાડતાં નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક આવર્તનમાં પરિણમે છે.

$71973 \to 83952 \to 74943 \to 62964$

$75933 \to 63954 \to 61974 \to 82962$

$59994 \to 53955$

$k \geq 6$ (એટલે કે 6 કે તેથી વધુ અંકોવાળી સંખ્યા) માટે ઉપરોક્ત પ્રક્રિયા f પરંપરિત રીતે લાગુ પાડતાં ગણતરી કંટાળાજનક અને નીરસ બની જાય છે અને કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળની શોધ માટે સમયનો ખૂબ જ વ્યય થાય છે.

વિખ્યાત ગણિત લેખક માર્ટીન ગાર્ડનરે 1 2 5 6 અને 7 અંકોની સંખ્યાઓ માટે કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળો શોધવાનું ભગીરથ કાર્ય કર્યું હતું. તેમણે દર્શાવ્યું હતું કે આ સંખ્યાઓ માટે કાપરેકર બ્લેકહોલ સંખ્યાનું અસ્તિત્વ નથી. કોષ્ટક 4માં kની ભિન્ન કિંમતો માટે તેને સંબંધિત કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળની માહિતી દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક-4

k	k અંકોવાળી બ્લેકહોલ અચળો
2	-
3	495
4	6174
5	-
6	549945, 631764
7	-
8	63317664, 97508421

આ કોષ્ટક દર્શાવે છે કે 6 અને 8 અંકોની સંખ્યાઓ માટે 2 કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળ સંખ્યાઓ મળે છે, તથા 2 5 અને 7 અંકોની સંખ્યાઓ હંમેશાં આવર્તનમાં પરિણમે છે. આ ઉપરાંત માર્ટીન ગાર્ડનરે 8, 9 અને 10 અંકોની

અનુસંધાન પાના 15 પર ....

પ્રાચીન ભારતના ગણિતજ્ઞાનનું આચમન-3

મેઘરાજ જ. ભટ્ટ
વલસાડ.
(M) 9925837247

આ લેખમાળાના ત્રીજા મણકાને અંતે જણાવ્યા પ્રમાણે આ મણકામાં પણ આપસ્તંબ સૂલ્બસૂત્રમાંથી બે બહુચર્ચિત રચનાઓની વાત કરીશું.

1. આપેલ ચોરસને સમક્ષેત્ર વર્તુળની રચના :

આ રચનાને અત્યારની પરિભાષામાં “Circling a Square” તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આધુનિક ગણિતમાં એ સાબિત થઈ ચૂક્યું છે કે આ રચના શક્ય નથી. તો પછી સૂલ્બસૂત્રકારે આ રચના કેવી રીતે કરી એવો પ્રશ્ન જરૂર થાય. હકીકતે આ રીતે બરાબર સમક્ષેત્ર નહીં પણ લગભગ સમક્ષેત્ર વર્તુળની રચના થાય છે.

આપસ્તંબ સૂલ્બસૂત્ર

પ્રથમભાગ-પ્રકરણ-3

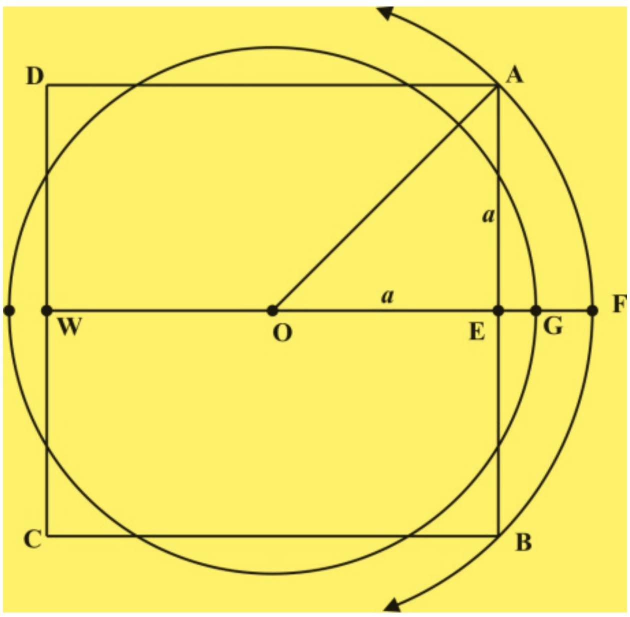
चतुरश्रं मण्डलं चिकीर्षन् मध्यात् कोट्यां निपातयेत् ।

पार्श्वतः परिकृष्यअतिशयतृतीयेन सह मण्डलं परिलिखेत् ।

सानित्या मण्डलं । यायद् हीयते तावदागन्तु ॥

અર્થ : જો તમે ચોરસને વર્તુળમાં પરિવર્તિત કરવા માગતા હો તો ચોરસના કેન્દ્રમાં દોરી બાંધીને તેને પૂર્વોત્તર ખૂણા સુધી ખેંચી લો અને (તેનાથી) ચોરસની (બહારની) બાજુ વર્તુળની ચાપ દોરો. ત્યારબાદ ચોરસની બાજુના અડધા માપ સાથે પૂર્વ-પશ્ચિમ રેખાના ચોરસ અને આ ચાપની વચ્ચેના ભાગના ત્રીજા ભાગનું માપ લઈને (તેટલી ત્રિજ્યાવાળું) વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ ચોરસના ક્ષેત્રફળ જેટલા (લગભગ) ક્ષેત્રફળવાળું વર્તુળ થશે. કારણ કે ચોરસના ખૂણાઓ આગળ જેટલો ભાગ નીકળી જાય છે તેટલો ભાગ તેની બાજુઓ પર ઉમેરાય છે.

સમજૂતી :



ABCD આપેલ ચોરસ છે જેની બાજુનું માપ ‘$2a$’ છે એમ ધારો

$\therefore$ ABCDનું ક્ષેત્રફળ = $4a^2$ ..... (i)

EW પૂર્વ-પશ્ચિમ રેખા છે, O ચોરસનું કેન્દ્ર છે A પૂર્વોત્તર ખૂણો છે.

આથી O આગળ દોરી બાંધી તેને A સુધી ખેંચીને OA ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોર્યું છે જે B માંથી પસાર થાય છે. પૂર્વ-પશ્ચિમ રેખાને આગળ લંબાવતા તે આ વર્તુળને Fમાં મળે છે. રેખાખંડ EFને ત્રિભાગતાં $EG = \frac{1}{3}\ EF$ થાય તેવું બિંદુ G મળે છે. O કેન્દ્ર અને OG ત્રિજ્યા લઈ દોરેલું વર્તુળ જરૂરી

વર્તુળ છે જેનું ક્ષેત્રફળ ચોરસ ABCD ના ક્ષેત્રફળ જેટલું (લગભગ) થશે.

ગણતરી :

OE = AE = a $\therefore$ OA = $\sqrt{2}\,a = OF$ $\therefore$ EF = $a\left(\sqrt{2}-1\right)$ $\therefore$EG = $\frac{a}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\therefore$જરૂરી વર્તુળની ત્રિજ્યા r = OG

$\therefore$r = OE + EG

$\therefore r = a + \frac{a}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\therefore r = \frac{a}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$

$\therefore r = \frac{a}{3}(2+ 1.41421)$

$\therefore r = \frac{a}{3}(3.41421)$

$\therefore$r = 1.13807xa

$\therefore$જરૂરી વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

$= 3.14159 \times (1.13807)^2 \times a^2$

$= 4.06898\, a^2$ .... (ii)

(i) અને (ii) ને સરખાવતાં જણાય છે કે મેળવેલા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ આપેલા ચોરસના ક્ષેત્રફળ કરતાં 0.06898 જેટલું વધારે છે. અહીં એ નોંધીએ કે આ ગણતરી $\sqrt{2}$ અને π ના પાંચ દશાંશ સ્થળ સુધી આસન્ન મૂલ્યો લઈને કરી છે.

અહીં ચર્ચાનો એક પ્રશ્ન એ ઉદ્ભવે છે કે સૂલ્બસૂત્રકારે કયા તર્કને આધારે આ રચના કરી હશે ? આ પ્રશ્નને આકૃતિના સંદર્ભમાં લખીએ તો જરૂરી વર્તુળની ત્રિજ્યા OE + $\frac{1}{3}$ EF થશે એવું શાના આધારે નક્કી કર્યું હશે ? સૂલ્બસૂત્રના ગ્રંથોનું અધ્યયન કરીને તેની સમજૂતી આપતાં ભાષ્યો લખનારા વિદ્વાનોમાં આ બાબતે કેટલીક ભિન્નતાઓ છે. સૌથી સરળ સમજૂતી આ પ્રમાણે આપી શકાય. સૂલ્બસૂત્રોમાં અન્ય ચર્ચામાં π નું આસન્ન મૂલ્ય 3.08 અથવા ક્યાંક 3.0 પણ લીધું હોવાનું જણાય છે. $\pi = 3$ લેતાં 0 કેન્દ્ર અને OE = (a) ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ 6a^2 મળે. આપણે 4a^2 ક્ષેત્રફળ મેળવવું છે. આથી બહારના વર્તુળ અને અંદરના વર્તુળની ત્રિજ્યાના તફાવતના ત્રીજા ભાગ જેટલું ઉમેરીને ત્રિજ્યા લેવાથી મળતા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ લગભગ 4a^2 થાય.

2. આપેલ વર્તુળને સમક્ષેત્ર ચોરસની રચના :

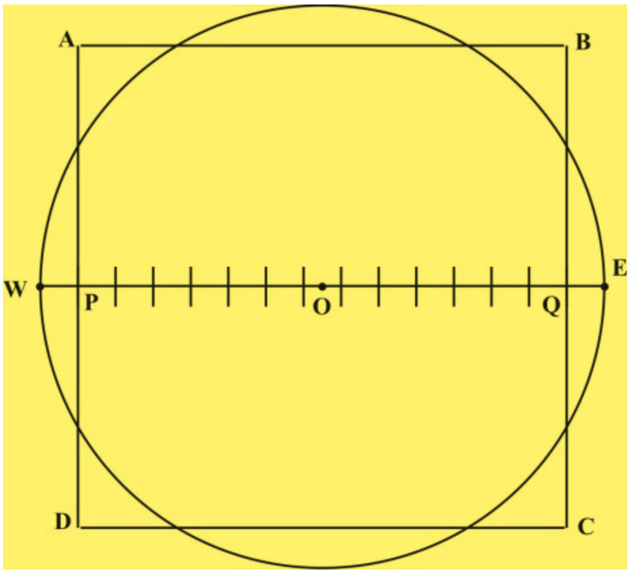
मण्डलं चतुरश्रं चिकीर्षन् विष्कम्भं पंचदशभागान् कृत्वा द्वावुद्धरेत् ।

त्रयोदशावशिष्यते । सानित्या चतुरश्रम् ॥

અર્થ :

જો વર્તુળને સમક્ષેત્ર ચોરસની રચના કરવી હોય તો વર્તુળના વ્યાસના 15 સરખા ભાગ કરો. બંને છેડેથી એક-એક ભાગ છોડીને વચ્ચેના 13 ભાગ જેટલી લંબાઈની બાજુવાળા ચોરસની રચના કરો તો તેનું ક્ષેત્રફળ આપેલા વર્તુળના ક્ષેત્રફળ જેટલું (લગભગ) થશે.

સમજૂતી :



ધારો કે આપેલા વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે અને EW તેની પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશાનો વ્યાસ છે. EW રેખાખંડને 15 સમાન ભાગમાં વિભાગો. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બંને છેડેથી એક-એક ભાગ છોડીને બાકીના રેખાખંડ પરથી ચોરસની રચના કરો.

ગણતરી :

વર્તુળની ત્રિજ્યા r લઈએ તો વ્યાસ $d = 2r$

$\therefore$ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $\dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3.14159}{4} d^2$

$= 0.78539\ d^2$.

હવે ચોરસની બાજુની લંબાઈ

$= AB \quad = PQ$

$= \dfrac{13}{15} WE \quad = \dfrac{13}{15} d$

$\therefore$ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{169}{225} d^2 = 0.75111\ d^2$ .... (ii)

આમ, (i) અને (ii) પરથી બંનેનાં ક્ષેત્રફળ લગભગ સમાન છે.

ફરીથી એ પ્રશ્ન તો થાય છે કે સૂલ્બસૂત્રના રચનાકારને વ્યાસના 15 ભાગ કરી 13 ભાગ લેવાનો વિચાર કેવી રીતે આવ્યો ? અગાઉની જેમ એની સમજૂતી નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

આપેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા r હોય અને $\pi = 3$ લીધા હોય તો વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 3r^2$ .... (iii)

હવે જો તેને સમક્ષેત્ર ચોરસની બાજુ $2a$ હોય તો

$(2a)^2 = 3r^2 \quad \Rightarrow 4a^2 = 3r^2$

$\Rightarrow 2a = \sqrt{3} \cdot r$

સૂલ્બસૂત્ર અનુસાર $\sqrt{3} = \dfrac{26}{15}$ (આશરે)

$\therefore \quad 2a = \dfrac{26}{15} \cdot r$

$\therefore \quad 2a = \dfrac{13}{15} \cdot d$

અહીં એક અવલોકન કરી આ લેખ પૂર્ણ કરીએ પ્રથમ રચનામાં આપેલા ચોરસના ક્ષેત્રફળ કરતાં મેળવેલા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ 0.06898 એકમ જેટલું વધારે થાય છે. જ્યારે બીજી રચનામાં આપેલા વર્તુળના ક્ષેત્રફળ કરતાં મેળવેલા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ 0.03428 જેટલું ઓછું થાય છે.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ અને πની અત્યારની માન્ય કિંમતો લઈને ગણતરી કરતાં ઉપરની રચનાઓમાં કેવા ફેરફાર કરવાથી આ તફાવતો હજુ પણ નાના કરી શકાય એવું રસપ્રદ સંશોધન કરવા વાચકોને આમંત્રણ છે.

હવે પછીના મણકામાં સૂલ્બસૂત્રોનું અધ્યયન ચાલુ રાખીશું.

મુખપૃષ્ઠ પરની ગણિતજ્ઞ :

મેરીના વિઆઝોવસ્કા (Maryna Viazovska)

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, VNSGU, સુરત. (M) 9974230088

ફિલ્ડ્સ મેડલનાં 86 વર્ષના ઇતિહાસમાં માત્ર બે જ મહિલા ગણિતજ્ઞો વિજેતા બની છે. 2014માં મરીયમ મિર્ઝાખાની તથા 2022માં મેરીના વિઆઝોવસ્કા. સુગણિતમનાં સળંગ અંક 300 માં ડૉ. દેવભદ્ર શાહ દ્વારા અને સળંગ અંક 285માં પ્રા. પી.કે. વ્યાસ દ્વારા મરીયમ મિર્ઝાખાનીના જીવન તથા કાર્યોની વિસ્તૃત જાણકારી 'મુખપૃષ્ઠ પરના ગણિતજ્ઞ' લેખશ્રેણી હેઠળ આપવામાં આવી હતી. આ લેખશ્રેણીમાં મારો આ પ્રથમ લેખ છે. હવે મેરીના વિઆઝોવસ્કા વિશે માહિતી રજૂ કરવા માંગું છું.

યુક્રેનના કીવ શહેરમાં કેમિસ્ટ પિતા તથા ઈજનેર માતાની કૂખે 12 ડિસેમ્બર 1984 ના દિવસે જન્મનાર મેરીના ત્રણ બહેનોમાં સૌથી મોટાં છે. શહેરની એક વિશિષ્ટ માધ્યમિક શાળા, કીવ નેચરલ સાયન્સ લિસિયમ નંબર 145, જે માત્ર વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલોજીમાં સિદ્ધિ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓ માટે ખોલવામાં આવી હતી, મેરીનાએ ત્યાંથી શાળાકીય અભ્યાસ પૂર્ણ કર્યો. આ શાળામાં તેણી આન્દ્રે કન્યાઝ્યૂક નામક શિક્ષકથી ખૂબ પ્રભાવિત હતા. કન્યાઝ્યૂક પોતે આ શાળાના ભૂતપૂર્વ વિદ્યાર્થી તથા એક સફળ ગણિતશાસ્ત્રી રહી ચૂક્યા હતા. ગણિતમાં ઊંડો રસ તથા આવા શિક્ષકના સથવારાથી મેરીનાનો આ વિષયમાં આધાર મજબૂત બન્યો.

2001માં મેરીના શાળાકીય અભ્યાસ પૂર્ણ કરી તારાસ શેવચેન્કો નેશનલ યુનિવર્સિટી ઓફ કીવમાં ગણિતમાં આગળ અભ્યાસ કરવા માટે જોડાયા તેણીના મતે આ સંસ્થા ગણિતનો અભ્યાસ કરવા માટેનું શ્રેષ્ઠ સ્થળ છે આ સંસ્થામાં અભ્યાસ કરતી વેળાએ તેણીએ ઘણી વખત ગણિતની ઓલિમ્પિયાડ સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો હતો. ત્યાંના અભ્યાસના અંતિમ વર્ષમાં 21 વર્ષની ઉંમરે મેરીનાએ પોતાનું પ્રથમ સંશોધન પત્ર 2005ની સાલમાં સહલેખિત કર્યું.

મેરીનાએ 2007માં યુનિવર્સિટી ઓફ કૈઝરસ્લાઉટર્નમાંથી સ્નાતક, 2010માં યુક્રેનની નેશનલ એકેડેમી ઓફ સાયન્સમાંથી પીએચ.ડી અને 2013માં યુનિવર્સિટી ઓફ બોનમાંથી ડૅક્ટરેટ (ડૉ. રેર. નેટ) ની પદવી મેળવી છે. તેણીનો ડૉક્ટરલ શોધ નિબંધ "મોડ્યુલર ફંક્શન તથા સ્પેશિયલ સાયકલ", વિશ્લેષણાત્મક સંખ્યા સિદ્ધાંત (Anlaytic Number Theory) સાથે સંકળાયેલ છે.

બર્લિન મૅથેમૅટિક્સ સ્કૂલ અને હમ્બોલ્ટ યુનિવર્સિટી ઓફ બર્લિનમાં પોસ્ટ ડૉક્ટરલ સંશોધક તથા પ્રિન્સ્ટનના યુનિવર્સિટીમાં મિનરવા ડીસ્ટીન્ગ્યુસ વિઝિટર રહી ચૂક્યા બાદ હાલમાં મેરીના સ્વિટ્ઝર્લૅન્ડની Ecole Polytechnique Federale de Lousanneમાં પ્રોફેસર તરીકે સંખ્યા ગણિત (Number Theory) ની અધ્યક્ષતા સંભાળી રહ્યા છે.

2016માં મેરીનાએ 8 પરિમાણમાં 'Sphere Packing Problem'નું નિરાકરણ કરી બતાવ્યું. તેણીએ શોધ્યું કે યુક્લિડિયન અવકાશ $\mathbb{R}^8$માં એકમ ગોળાનું પેકિંગ E_8ના લેટિસ પેકિંગથી વધારે ઘનતા ક્યારેય પણ ધરાવી શકે નહિ. તેણીના પરિમાણ-8 નું નિરાકરણ તેણીને ઝડપથી અન્ય લોકો સાથે સહયોગ તરફ દોરી ગયું અને તેમણે મળીને પરિમાણ 24માં પણ ઉકેલ શોધી બતાવ્યો.

અગાઉ માત્ર 3 કે તેથી ઓછા પરિમાણ માટેના ઉકેલ સાહિત્યમાં હાજર હતા અને તે પણ લાંબી કમ્પ્યૂટર ગણતરીને સામેલ કરતા હતા. જ્યારે મેરીનાના પરિમાણ 8 અને 24 માટેના ઉકેલ અદ્ભુત રીતે સરળ છે.

મેરીનાના ફિલ્ડસ મેડલની ઉજવણીના કાર્યક્રમમાં સત્તાવાર વ્યાખ્યાન આપતી વખતે ગણિતશાસ્ત્રી હેનરી કોહને જણાવેલું કે મેરીના ખૂબ જ સરળ, કુદરતી, ગહન રચનાઓ એવી વસ્તુઓને ઉજાગર કરીને કરે છે, જેની કોઈએ અપેક્ષા ન કરી હોય અને જે અન્ય કોઈ શોધી શક્યું ન હોય.

મેરીનાને 'Sphere Packing' અને Spherical Designs'માં તેણીની નોંધપાત્ર સિદ્ધિઓ માટે ઘણા પ્રતિષ્ઠિત પુરસ્કારો પ્રાપ્ત થયા છે. 2016માં તેણીના પરિમાણ 8 વિશેના સંશોધન પેપરના પ્રકાશન પહેલાં જ તેણીને બર્લિન મૅથેમૅટિકલ સ્કૂલ અને બર્લિનની હમ્બોલ્ટ યુનિવર્સિટી દ્વારા 'The Salem Prize' આપવામાં આવ્યું જે રાફેલ સાલેમની યાદમાં વિશ્લેષણ (Analysis)ના ક્ષેત્રમાં ઉત્કૃષ્ટ યોગદાન માટે યુવા સંશોધકને વાર્ષિક ધોરણે એનાયત કરવામાં આવે છે.

2017માં મેરીનાને તેણીના 'Spherical Designs'માં ઊંડા યોગદાન માટે 'The European Prize of Combinatorics' આપવામાં આવ્યું તે જ વર્ષે તેણીને ઓક્સફર્ડની ક્લે મૅથેમૅટિક્સ દ્વારા આપવામાં આવતો 'Clay Research Award' પણ પ્રાપ્ત થયો તે વર્ષના અંતમાં તેણીને શ્રીનિવાસ રામાનુજનના વતન કુંભકોણમ નજીક આવેલ શન્મુધા આર્ટસ, સાયન્સ, ટેક્નોલોજી એન્ડ રિસર્ચ એકેડમી (SASTRA) દ્વારા આપવામાં આવતો પ્રતિષ્ઠિત 'રામાનુજન પુરસ્કાર' એનાયત થયો, જે રામાનુજનનાં રસનાં ક્ષેત્રોમાં ઉત્કૃષ્ટ કાર્ય કરવા બદલ દર વર્ષે એક યુવાન ગણિતશાસ્ત્રીને એનાયત કરવામાં આવે છે. આ પુરસ્કાર માટેની વય મર્યાદા 32 વર્ષ નક્કી કરવામાં આવી છે જે ઉંમરે રામાનુજનનું અવસાન થયું હતું.

2018માં તેણીને 'The New Horizons in Mathematics Prize' આપવામાં આવ્યું જે આશાસ્પદ કારકિર્દી ધરાવતા પ્રારંભિક સંશોધકને એનાયત કરવામાં આવે છે જેમણે પહેલેથી જ મહત્ત્વપૂર્ણ કાર્યનું નિર્માણ કર્યું હોય. તે જ વર્ષે મેરીના પ્રતિષ્ઠિત ઇન્ટરનેશનલ કોંગ્રેસ ઓફ મૅથેમૅટિક્સ (ICM)ના આમંત્રિત વક્તા બન્યા.

2019માં અમેરિકન મૅથેમૅટિક્સ સોસાયટી (AMS) દ્વારા મહિલા ગણિતશાસ્ત્રીના ઉત્કૃષ્ટ યોગદાન માટે આપવામાં આવતું 'Ruth Lyttle Sattex Prize in Mathematics' મેરીનાને એનાયત થયું. તે જ વર્ષે તેણીને 'Fermat Prize' એનાયત કરવામાં આવ્યું કે જે એવા સંશોધકોને આપવામાં આવે છે કે જેમણે એવાં ક્ષેત્રોમાં સંશોધન કર્યું હોય જેમાં પિયર ડી ફર્માનું યોગદાન નિર્ણાયક રહ્યું હોય.

મેરીના યુરોપિયન મૅથેમૅટિકલ સોસાયટી દ્વારા આપવામાં આવતા 'EMS Prize'ના 2020ના વિજેતાઓમાંથી એક છે. 2020માં તેણીને લેટીસ ફાઉન્ડેશન દ્વારા આપવામાં આવતો 'રાષ્ટ્રીય લેટીસ પુરસ્કાર' પણ એનાયત થયો.

2021માં મેરીના એકેડેમીયા યુરોપીયનના સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા તથા 2022માં તેણી ક્લે મૅથેમૅટિક્સ ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં વરિષ્ઠ વિદ્વાન તરીકે ચૂંટાયાં.

2022માં મેરીનાને વિખ્યાત ફિલ્ડ્સ મેડલ એનાયત કરવામાં આવ્યો. આ પુરસ્કાર મેળવનાર તે બીજી મહિલા, યુક્રેનિયન SSRમાં જન્મેલી બીજી વ્યક્તિ તથા યુક્રેનિયન યુનિવર્સિટીમાંથી ડિગ્રી મેળવનારી પ્રથમ વ્યક્તિ બની હતી, 2022ના અંતમાં

તેણીને BBC 100 મહિલા તરીકે સન્માનિત કરવામાં આવ્યા.

હાલમાં મેરીના સ્વિટ્ઝર્લૅન્ડમાં પ્રોફેસર તરીકે કામ કરી રહ્યાં છે. તેણી આનાથી મોટી સફળતાની આશા રાખે છે અને માને છે કે તેમની પાસે હજુ એક તક છે કે તે ફરી ફિલ્ડ્સ મેડલ જીતી શકે. આપણે સર્વે ગણિતપ્રેમી એમના આ સપના માટે એમને શુભેચ્છા પાઠવીએ. અંતે તેણીના શબ્દોથી પ્રેરણા લઈએ : 'The most incredible results come from ideas about problems, that no one had before questions, that no one even thought to ask.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

અનુસંધાન પાના 9 પરથી....

સંખ્યાઓ માટે કાપરેકર-બ્લેકહોલ અચળો મેળવ્યા હતા. તેમની ગણતરી મુજબ $k = 8$ માટે 97508421, $k = 9$ માટે 864197532 તથા $k = 10$ માટે 9753086421 એ કાપરેકર-બ્લેકહોલ અચળો છે. આ ઉપરાંત $k = 8$ માટે 63317664, $k = 9$ માટે 554999445 તથા $k = 10$ માટે 6333176664 અને 9975084201 અન્ય કાપરેકર બ્લેકહોલ અચળો છે.

રસ ધરાવનાર વાચકો દશાંશ પદ્ધતિને બદલે દ્વિઅંકી, અષ્ટાંકી વગેરે પદ્ધતિઓની સંખ્યાઓ માટે કાપરેકર બ્લેકહોલ સંખ્યા મેળવવાનું કાર્ય કરી શકે છે.

સંદર્ભ :

1. https:.//mathworld.wolfram.com/kaprekarRoutine.html
2. Yutaka Nishiyama : The weirdness of number 6174, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 80, No.3, 2012, 363-373.
3. oeis.org/A099010
3. oeis.org/A099009

પ્રિન્સિપિયાનું અગત્યનું પરિણામ

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
શેરથા
(M) 9428019042

❖ **પ્રસ્તાવના :**

ગીતા આપણે સમજી શકીએ કે ન સમજી શકીએ તો પણ ખૂબ જ અગત્યનો ગ્રંથ ગણાય. તે જ રીતે ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ માટે 'ન્યૂટનનો પ્રિન્સિપિયા' ગ્રંથ અગત્યનો ગણાય. મારે પોતાને ગીતામાંથી કંઈક શીખવા જેવું હોય તો

कर्मण्येवाधिकारस्ते मा फलेषु कदाचन ।

मा कर्मफलहेतुर्भूर्मा ते सङ्गोडस्त्वकर्मणि ॥ ४७ ॥

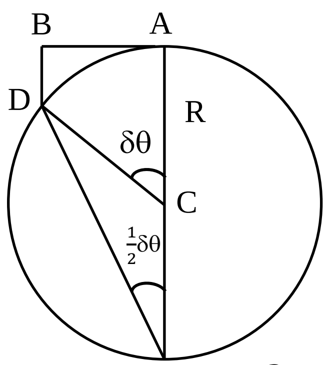
અનુવાદ

તને તારું નિયત કર્તવ્યકર્મ કરવાનો અધિકાર છે, પરંતુ તને કર્મનાં ફળો પર અધિકાર નથી, તું પોતાની જાતને કદાપિ પોતાનાં કર્મનાં ફળોનું કારણ માનીશ નહિ અને સ્વકર્મ ન કરવામાં પણ કદી આસક્ત થઈશ નહીં.

આના જેવું જ મારી દૃષ્ટિએ ખૂબ જ અગત્યનું પ્રિન્સિપિયાનું પ્રમેય પુસ્તક III નું પ્રમેય 4 છે જે પ્રમેય 4 : That the moon gravitates towards the earth, and is always drawn back from rectilinear motion, and held back in its orbit by the force of gravity.

તે ચંદ્ર પૃથ્વી તરફ આકર્ષાય છે, અને કાયમના માટે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ તેને સીધી રેખાની ગતિમાંથી ખેંચી લઈને તેની ભ્રમણકક્ષામાં ખેંચી રાખે છે.

સાબિતી : ન્યૂટને સાબિતી માટે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે ચંદ્ર એક મિનિટમાં સીધી રેખાથી કેટલો નીચે આવશે તે ગણી બતાવ્યું છે.



કેન્દ્ર C એ પૃથ્વી છે અને A બિંદુએ ચંદ્ર છે. ન્યૂટનના ગતિના પહેલા નિયમ પ્રમાણે જો ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ન હોય તો ચંદ્ર Aથી B સીધી રેખામાં મુસાફરી કરે છે, પણ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ જેનું કેન્દ્ર C છે તે ચંદ્ર A ઉપર લાગતું હોઈને ચંદ્રની ભ્રમણકક્ષા AD બને છે. ટૂંકમાં ચંદ્ર Bથી નીચે D એ આવે છે. આપણે BDની લંબાઈ શોધવી છે. ધારો કે ચંદ્ર એક મિનિટમાં કોણીય ચાપ (Angular Arc) $\delta\theta$ બનાવે છે. ચંદ્ર પૃથ્વીની આસપાસ 27 દિવસ, 7 કલાક, 43 મિનિટમાં એક ચક્કર મારે છે. આથી

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{27 \text{ દિ. } 7 \text{ ક. } 43 \text{ મિ.}} = \frac{2\pi}{39{,}343} \text{ Radian છે.}$$

Δ ABDમાં આપણે $\angle BAD = \alpha$ લઈએ તો $\angle DAC = 90^o - \alpha$ છે. AC = CD હોઈને $\angle CDA = \angle CAD = 90^o - \alpha$ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે

$$\angle CDA + \angle DAC + \angle ACD = (90^o - \alpha) + (90^o - \alpha) + \delta\theta = 180^o$$

$$\therefore \delta\theta = 2\alpha \qquad \therefore \alpha = \frac{\delta\theta}{2} = \angle BAD$$

Δ ABD માં $\angle$ DBA = 90^o હોઈને

Sin $\angle$ BAD = $\frac{BD}{AD}$ = Sin $\frac{\delta\theta}{2}$, $\delta\theta$ ખૂબ જ નાનો હોઈ

Sin $\frac{\delta\theta}{2}$ = $\frac{\delta\theta}{2}$ = $\frac{BD}{AD}$ $\therefore$ BD = $\frac{1}{2}$ AD $\delta\theta$ = $\frac{1}{2}$ R $(\delta\theta)^2$ (વર્તુળમાં ચાપ લંબાઈ AD= R $\cdot$ $\delta\theta$)

R = AC એ ચંદ્રનું પૃથ્વીના કેન્દ્ર C થી અંતર છે જેના બરાબર 60 R_E છે. જ્યાં R_E એ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા છે. એટલે કે AC = 60 R_E છે.

પૃથ્વીનો પરિઘ = 2π R_E = 1.232496×10^8 Paris Feet. (1 Paris Foot = 1.07675 Feet)

$\therefore R_E = \frac{1.232496 \times 10^8}{2\pi}$

$\therefore BD = \frac{1}{2} R (\delta\theta)^2 = \frac{1}{2} (60 R_E) (\delta\theta)^2$

$= \frac{1}{2}\left\{60 \times \frac{1.232496 \times 10^8}{2\pi}\right\}\left\{\frac{2\pi}{39,343}\right\}^2$

$= 60\,\pi \frac{1.232496 \times 10^8}{(39,343)^2} = 15\frac{1}{120}$ Paris Feet $= 15\frac{1}{120} \times 12 \times 2.707 = 487.5$ cm.

પૃથ્વી ઉપર જે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ લાગે છે તે જ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ચંદ્ર ઉપર લાગતું હોય તો

$F_m = \frac{G\,M_1\,M_2}{R^2} = \frac{G\,M_1\,M_2}{(60\,R_E)^2} = \frac{1}{3600}\ \frac{G\,M_1\,M_2}{(R_E)^2} = \frac{1}{3600}\ F_e$

$\therefore F_e = 3600\ F_m$

F_m = ચંદ્ર ઉપરનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ, F_e = પૃથ્વી ઉપરનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ

આથી પૃથ્વીની સપાટી ઉપર લાગતું બળ ચંદ્ર ઉપર લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળથી 3600 ઘણું છે.

જે બળ ચંદ્રના ખેંચાઈને પડવાના માટે જવાબદાર છે. તે જ બળ પૃથ્વીના સપાટી ઉપર પડતા પદાર્થો માટે જવાબદાર હોય તો તે બળ પૃથ્વીની સપાટી ઉપર ચંદ્રની સપાટી કરતાં 3600 ગણું છે. આ કારણે સરખું અંતર કાપવા માટે 60 ગણો સમય જોઈએ. પૃથ્વી ઉપર 1 સેકન્ડમાં જે અંતર કપાય તે જ અંતર કાપવા માટે ચંદ્ર ઉપર 60 સેકન્ડો જોઈએ.

પૃથ્વી ઉપર અંતર કાપવાનું સૂત્ર s=$\frac{1}{2}$ gt^2 છે. આ સૂત્રમાં t=1 મૂકતાં 2s=g મળે. આથી g=$2\left(15\frac{1}{100}\right) = 975$ cm/sec^2 થાય. જે હાલમાં વપરાતી g=970 cm/sec^{2}ની ઘણી નજીક હોઈને આપણે કહી શકીએ કે જે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ પૃથ્વી ઉપર લાગે છે તે જ બળ ચંદ્રને એક મિનિટમાં 15 $\frac{1}{120}$ ફીટ નીચે ખેંચે છે.

જે બળ પથ્થરને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ ખેંચે છે, કે પથ્થર પૃથ્વી ઉપર પાડે છે તે જ બળ ચંદ્રને તેની ભ્રમણ કક્ષામાં રાખે છે. આ વિચાર ચોંકાવનારો હતો. આનો આજે પણ કોઈ બરાબર વિચાર કરે તો એટલો જ ચોંકાવનારો છે. આકાશમાં લટકતી ભ્રમણકક્ષા જુઓ! પથ્થર, ગોળ અને પ્રકાશિત! ખરેખર હૃદયને શુશોભિત કરે.

આ લેખ નીચેનાં પુસ્તક અને લેખ આધારે લખાયો છે.

(૧) **Chandrasekhar, S.,** ‘Newton’s Principia for the Common Reader’, Clarendon Press, Oxford, 1995.

(૨) **પટેલ, વિઠ્ઠલભાઈ અં.,** “પ્રિન્સિપિયાનું ત્રીજું પુસ્તક.” સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય - વૃત્ત, એપ્રિલ 2021, સળંગ અંક : 62, પાન નં. 32

કાપરેકરના જાદુઈ અચળાંક 6174 વિશે થોડું વિશેષ...

રાજેશકુમાર એમ. મેર
વાંકાનેર,
rajeshmer911@gmail.com (M) 9537927040

ઈ.સ. 1949માં ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી દત્તાત્રેય રામચંદ્ર કાપરેકરે આપેલી એક રીત મુજબ ચાર અંકોની કોઈપણ સંખ્યા પર ક્રમશઃ ગણતરી કરતાં જવાથી છેવટમાં આપણને 6174 મળે છે. આ સંખ્યા પર પણ તેમણે આપેલી રીત મુજબ ગણતરી કરતાં આપણને આ જ સંખ્યા મળે છે. આથી આ સંખ્યાને કાપરેકર અચળાંક કહેવામાં આવે છે. આમ આ સંખ્યા એક જાદુઈ સંખ્યા છે. તેમણે આપેલી આ રીત નીચે મુજબ છે.

(1) સૌપ્રથમ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 એ દશ અંકોમાંથી કોઈપણ ચાર અંકો પસંદ કરી જેના એકમ અને હજારના અંક અને દશક અને શતકના અંકો એકસમાન ન હોય તેવી ચાર અંકોથી બનતી કોઈ એક સંખ્યા લખો.
દા.ત. 0001, 0098, 0785, 4005, 3016, 7087, 8556, 3068, 7896, 2288, 3335 જેવી સંખ્યાઓ પસંદ કરી શકાય છે. પરંતુ 0000, 2222, 3003, 6006, 8778 જેવી સંખ્યાઓ પસંદ ન કરી શકાય.

(2) આ સંખ્યાના અંકોને ઊલટા ક્રમમાં લખી બીજી ચાર અંકોની સંખ્યા લખો. જરૂર પડ્યે આગળના ખાલી સ્થાનોમાં 0 મૂકવાં છે. ટૂંકમાં દરેક સંખ્યા ચાર અંકમાં લખવી જરૂરી છે. તેને અવળી સંખ્યા કહીશું.

(3) આ બંને સંખ્યામાંથી જે મોટી સંખ્યા હોય તેમાંથી નાની સંખ્યા બાદ કરો.

(4) મળેલા જવાબના ચારેચાર અંકોનો ઉપયોગ કરી ચાર અંકોની મોટામાં મોટી સંખ્યા લખો.

(5) આ સંખ્યાના અંકોને ઊલટા ક્રમમાં લખી બીજી ચાર અંકોની નાનામાં નાની સંખ્યા લખો.

(6) મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરો.
   1. જો આ જવાબ 6174 છે, તો જાદુઈ સંખ્યા મળી ગઈ.
   2. જો આ જવાબ 6174 નથી તો નીચે મુજબ કરો.

(7) આ જવાબના ચારેચાર અંકોનો ઉપયોગ કરી ચાર અંકોની મોટામાં મોટી સંખ્યા લખો.

(8) આ સંખ્યાના અંકોને ઊલટા ક્રમમાં લખી બીજી ચાર અંકોની નાનામાં નાની સંખ્યા લખો.

(9) મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરો.
   1. જો આ જવાબ 6174 છે, તો જાદુઈ સંખ્યા મળી ગઈ.
   2. જો આ જવાબ 6174 નથી, તો નીચે મુજબ કરો.

(10) આ જવાબના ચારેચાર અંકોનો ઉપયોગ કરી ચાર અંકોની મોટામાં મોટી સંખ્યા લખો.

(11) આ સંખ્યાના અંકોને ઊલટા ક્રમમાં લખી બીજી ચાર અંકોની નાનામાં નાની સંખ્યા લખો.

(12) મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરો.
   1. જો આ જવાબ 6174 છે. તો જાદુઈ સંખ્યા મળી ગઈ.
   2. જો આ જવાબ 6174 નથી તો નીચે મુજબ કરો.

(13) આ જવાબ 6174 ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયાના છેલ્લાં ત્રણ પગલાંનું સતત પુનરાવર્તન કરો.

આવી ચાર અંકોની કેટલીક સંખ્યાઓ લઈને તેની આ રીતની ગણતરી કરેલું એક કોષ્ટક નીચે આપેલું છે.

પસંદ કરેલ સંખ્યા	6174	0079	0005	4488	5967	9765
ઊલટા ક્રમની સંખ્યા	4716	9700	5000	8844	7695	5679
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
મોટી સંખ્યામાંથી નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ	6174 –4716 1458	9700 –0079 9621	5000 –0005 4995	8844 –4488 4356	7695 –5967 1728	9765 –5679 4086
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
આ જવાબ પરથી બનતી મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ	8541 –1458 7083	9621 –1269 8352	9954 –4599 5355	6543 –3456 3087	8721 –1278 7443	8640 –0468 8172
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
આ જવાબ પરથી બનતી મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ	8730 –0378 8352	8532 –2358 6174	5553 –3555 1998	8730 –0378 8352	7443 –3447 3996	8721 –1278 7443
			↓		↓	↓
આ જવાબ પરથી બનતી મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ	8532 –2358 6174		9981 –1899 8082	8532 –2358 6174	9963 –3699 6264	7443 –3447 3996
			↓		↓	↓
આ જવાબ પરથી બનતી મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ			8820 –0288 8532		6642 –2466 4176	9963 –3699 6264
			↓		↓	↓
આ જવાબ પરથી બનતી મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ			8532 –2358 6174		7641 –1467 6174	6642 –2466 4176
						↓
આ જવાબ પરથી બનતી મોટામાં મોટી સંખ્યામાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ						7641 –1467 6174
અંતિમ જવાબ	6174	6174	6174	6174	6174	6174

હવે, આ જાદુઈ સંખ્યા 6174ની બીજી લાક્ષણિકતાઓ જાણીએ.

$$6174 = 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7$$
$$= 10^0 \times 2^1 \times 3^2 \times 7^3$$
$$= 7^3 \times 3^2 \times 2^2 \times 10^0$$

આમ, આ સંખ્યા 6174 ને 1, 9, 49, 441 એ ચાર જ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓથી નિઃશેષ ભાગી શકાય છે.

હવે, ખરેખર જોઈએ તો કાપરેકરની પહેલી ગણતરીનું કશું મહત્ત્વ જ નથી કારણ કે કોઈ પણ ચાર અંકોની સંખ્યાના અંકો પરથી મોટામાં મોટી અને નાનામાં નાની સંખ્યા મેળવી જ શકાય છે. જેની બાદબાકીના અંકો પરથી મોટામાં મોટી અને નાનામાં નાની સંખ્યાઓ મેળવવામાં આવે છે. ફરી તેની બાદબાકી કરવામાં આવે છે. આ રીતે ક્રમશઃ પુનરાવર્તન કરતાં છેવટમાં 6174 મળે જ છે.

આ રીતમાં કરવામાં આવતી બાદબાકી પરથી અનેક નવીનવી સંખ્યાઓ મેળવવામાં આવે છે. જ્યાં સુધી આ સંખ્યાના અંકો એક ચોક્કસ ભાત પ્રમાણે ન મળે ત્યાં સુધી ગણતરી કરતા જવામાં આવે છે. એક ચોક્કસ ભાત પ્રમાણેની સંખ્યા મળી ગયા પછી છેલ્લી એક ગણતરી કરવાથી જવાબમાં 6174 મળે જ છે.

ચાલો, આપણે એક ચોક્કસ ભાત પ્રમાણેના અંકો ધરાવતી સંખ્યા વિશે જાણીએ.

ચાર અંકોની એવી સંખ્યા લખો કે જેમાં

(1) એકમના અંક કરતાં દશકનો અંક 1 જેટલો વધુ હોય, દશકના અંક કરતાં શતકનો અંક 2 જેટલો વધુ હોય અને શતકના અંક કરતાં હજારનો અંક 3 જેટલો વધુ હોય. આપણને આવી ફક્ત ચાર સંખ્યાઓ જ મળે છે. જે નીચે આપેલી છે.

6310 7421 8532 9643

અથવા

(2) એકમના અંક કરતાં દશકનો અંક 3 જેટલો વધુ હોય દશકના અંક કરતાં શતકનો અંક 2 જેટલો વધુ હોય અને શતકના અંક કરતાં હજારનો અંક 1 જેટલો વધુ હોય. આપણને આવી ફક્ત ચાર સંખ્યાઓ જ મળે છે, જે નીચે આપેલી છે.

6530 7641 8752 9863

(3) ઉપરોક્ત દરેક સંખ્યામાંથી તેની અવળી સંખ્યા બાદ કરતાં જાદુઈ સંખ્યા 6174 મળે છે.

લીધેલ સંખ્યા	6310	7421	8532	9643	6530	7641	8752	9863
અવળી સંખ્યા	0136	1247	2358	3469	0356	1467	2578	3689
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
લીધેલી સંખ્યામાંથી અવળી સંખ્યા બાદ કરતાં મળતો જવાબ	6310 −0136 6174	7421 −1247 6174	8532 −2358 6174	9643 −3469 6174	6530 −0356 6174	7641 −1467 6174	8752 −2578 6174	9863 −3689 6174

હવે, ખરેખર જોઈએ તો કાપરેકરની રીતમાં અંતિમ ગણતરીની સંખ્યા આ આઠ સંખ્યાઓ પૈકીની કોઈ એક સંખ્યા જ હોય છે.

આમ, શા માટે બને છે તે જોઈએ.

ધારો કે, ચાર અંકોની એક એવી સંખ્યા છે કે જેના એકમના અંક કરતાં તેના દશકનો અંક 1 જેટલો વધુ છે. તેના દશકના અંક કરતાં તેના શતકનો અંક 2 જેટલો વધુ છે અને તેના શતકના અંક કરતાં તેના હજારનો અંક 3 જેટલો વધુ છે.

ધારો કે આ સંખ્યાનો એકમનો અંક = a

$\therefore$ તેનો દશકનો અંક = $a + 1$

$\therefore$ તેનો શતકનો અંક = $a + 1 + 2 = a + 3$

$\therefore$ તેનો હજારનો અંક = $a + 3 + 3 = a + 6$

તેથી તે સંખ્યા

$$1000\,(a + 6) + 100\,(a + 3) + 10\,(a + 1) + a \qquad \text{.... (1)}$$

આ સંખ્યાને અવળી લખતાં મળતી સંખ્યા

$$1000\,a + 100\,(a + 1) + 10\,(a + 3) + (a + 6) \qquad \text{.... (2)}$$

હવે, મૂળ સંખ્યા (1) તેની અવળી સંખ્યા (2) કરતાં હંમેશાં મોટી જ હોય.

આથી, મૂળ સંખ્યામાંથી તેની અવળી સંખ્યા બાદ કરતાં,

$$\therefore \quad [1000\,(a + 6) + 100\,(a + 3) + 10\,(a + 1) + a]$$
$$- [1000\,a + 100\,(a + 1) + 10\,(a + 3) + (a + 6)]$$
$$= [1000\,a + 6000 + 100\,a + 300 + 10a + 10 + a]$$
$$- [1000\,a + 100\,a + 100 + 10\,a + 30 + a + 6]$$
$$= [1111\,a + 6310] - [1111\,a + 136]$$
$$= [1111\,a + 6310] - [1111\,a + 0136]$$
$$= 1111\,a + 6310 - 1111\,a - 0136$$
$$= 6310 - 0136$$
$$= 6174$$

અહીં જોઈ શકાય છે કે મૂળ સંખ્યા 1111 a + 6310 અને તેની અવળી સંખ્યા 1111 a + 0136 છે. જેમની બાદબાકી કરતાં એકમના અંકનું મહત્ત્વ રહેતું નથી. આમ, અહીં ચાર અંકો નહીં પણ ચાર સ્થાનોને અનુક્રમે 6, 3, 1, 0 અને તેના અવળા ક્રમમાં અનુક્રમે 0, 1, 2, 6 કિંમત આપી તેમની બાદબાકી કરતાં આપણને 6174 મળે છે.

આ કિંમત ફક્ત એકમના ચાર અંકો 0, 1, 2, 3ને જ આપી શકાય છે.

અથવા

ધારો કે, ચાર અંકોની એક એવી સંખ્યા છે કે જેના એકમના અંક કરતાં તેના દશકનો અંક 3 જેટલો વધુ છે. તેના દશકના અંક કરતાં તેના શતકનો અંક 2 જેટલો વધુ છે અને તેના શતકના અંક કરતાં તેના હજારનો અંક 1 જેટલો વધુ છે.

હવે, ધારો કે તેનો એકમનો અંક = a

$\therefore$ તેનો દશકનો અંક = $a + 3$

$\therefore$ તેનો શતકનો અંક = $a + 3 + 2 = a + 5$

$\therefore$ તેનો હજારનો અંક = $a + 5 + 1 = a + 6$

તેથી તે સંખ્યા

$$1000\,(a + 6) + 100\,(a + 5) + 10\,(a + 3) + a \qquad \text{.... (1)}$$

આ સંખ્યાને અવળી લખતાં મળતી સંખ્યા

$$1000\,a + 100\,(a + 3) + 10\,(a + 5) + (a + 6) \qquad \text{.... (2)}$$

હવે, મૂળ સંખ્યા (1) તેની અવળી સંખ્યા (2) કરતાં હંમેશાં મોટી જ હોય.

આથી, મૂળ સંખ્યામાંથી તેની અવળી સંખ્યા બાદ કરતાં,

$$\therefore [1000(a+6)+100(a+5)+10(a+3)+a]$$
$$-[1000a+100(a+3)+10(a+5)+(a+6)]$$
$$=[1000a+6000+100a+500+10a+30+a]$$
$$-[1000a+100a+300+10a+50+a+6]$$
$$=[1111a+6530]-[1111a+356]$$
$$=[1111a+6530]-[1111a+0356]$$
$$=1111a+6530-1111a-0356$$
$$=6530-0356$$
$$=6174$$

અહીં, જોઈ શકાય છે કે મૂળ સંખ્યા 1111 a + 6530 અને તેની અવળી સંખ્યા 1111 a + 0356 છે. જેમની બાદબાકી કરતાં એકમના અંકનું કોઈ મહત્ત્વ રહેતું નથી. આમ, આ ચાર અંકોની નહીં પણ ચાર સ્થાનોને અનુક્રમે 6, 5, 3, 0 અને તેના અવળાં ક્રમમાં અનુક્રમે 0, 3, 5, 6 કિંમત આપી તેમની બાદબાકી કરતાં આપણને 6174 મળે છે.

આ કિંમત ફક્ત એમના ચાર અંકો 0, 1, 2, 3 ને જ આપી શકાય છે.

આમ, ખરેખર તો આવી મૂળભૂત બે સંખ્યાઓ 6310 અને 6530 છે.

જેમાંથી 6310 માં ક્રમશઃ 1111 ઉમેરતાં જવાથી બીજી ત્રણ સંખ્યાઓ 7421, 8532, 9643 મળે છે અને એજ રીતે 6530માં ક્રમશઃ 1111 ઉમેરતાં જવાથી બીજી ત્રણ સંખ્યાઓ 7641, 8752, 9863 મળે છે.

આ સંખ્યાઓની અવળી સંખ્યાઓમાં ક્રમશઃ 1111 બાદ કરતાં જવાથી જવાબની સંખ્યા 6174માં કશો ફેરફાર થતો નથી.

લીધેલી સંખ્યામાંથી	6310	+ 1111	7421 +	1111	8532 +	1111	9643
અવળી સંખ્યા બાદ	– 0136	– 1111 = –	1247 –	1111 = –	2358 –	1111 = –	3469
કરતાં મળતો જવાબ	6174	0000	6174	0000	6174	0000	6174

અથવા

લીધેલી સંખ્યામાંથી	6530	+ 1111	7641 +	1111	8752 +	1111	9863
અવળી સંખ્યા બાદ	– 0356	– 1111 = –	1467 –	1111 = –	2578 –	1111 = –	3689
કરતાં મળતો જવાબ	6174	0000	6174	0000	6174	0000	6174

આમ, હવે આપણે નક્કી કરવાનું રહે છે કે ડી.આર. કાપરેકરની આ સંખ્યા 6174 ને ખરેખર જાદુઈ સંખ્યા ગણવી કે નહીં.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

દ્વિમુખી સંખ્યા : થોડું જાણેલું – થોડું અજાણ્યું

ઉન્નતિ દેસાઈ
ગણિત શિક્ષિકા, વલસાડ
(M) 9375622977

‘Palindrome’ એ ગ્રીક ભાષાનો શબ્દ છે. તેનો અર્થ થાય છે : ‘running back again’ જે શબ્દને આગળથી કે પાછળથી વાંચતા સમાન વંચાય તેને ‘Palindrome’ કહે છે. એ જ રીતે જે સંખ્યા ડાબી બાજુથી કે જમણી બાજુથી વાંચતા સમાન રહે તેને ‘Palindrome number’ કે ‘Palindromic number’ કહે છે. અંક મિત્રનું બિરુદ પામેલા ગણિતજ્ઞ ડી.આર.કાપરેકરે આવી સંખ્યાને દ્વિમુખી સંખ્યા કહી છે. આપણે પણ ‘Palindrome’ અને ‘Palindromic number’ માટે ‘દ્વિમુખી’ અને ‘દ્વિમુખી સંખ્યા’ શબ્દો વાપરીશું.

સૌપ્રથમ કેટલાક દ્વિમુખી શબ્દોનો વિચાર કરીએ ‘સરસ’, ‘મામા’, ‘કાકા’, ‘નવીન’, ‘નવજીવન’, ‘મલયાલમ’ એ દ્વિમુખી શબ્દોનાં ઉદાહરણ છે. ‘ભલાને લાભ’ અને ‘તેજીમાં જીતે’ એ દ્વિમુખી વાક્યોનાં ઉદાહરણ છે. અહીં નોંધીએ કે ગૌરાંગ કોન્ટ્રાક્ટર નામની વ્યક્તિએ દસ હજાર જેટલા દ્વિમુખી વાક્યો ગુજરાતી ભાષામાં લખ્યાં છે. અંગ્રેજી ભાષામાં પણ કેટલાંક જાણીતાં Palindromes છે. જેમ કે, ‘mom’, ‘wow’, ‘dad’, ‘level’, ‘madam’, ‘eye’, ‘no devil lived on’, ‘never odd or even’.

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે ‘દ્વિમુખી સંખ્યા’ એટલે એવી સંખ્યા કે જેના અંકોને ઊલટાવતાં જે સંખ્યા મળે તે મૂળ સંખ્યા જ હશે. ઉદાહરણ તરીકે 11, 22, 33, ..., 99, 101, 111, ..., 191, 202 દ્વિમુખી સંખ્યાઓ છે. તો ચાલો હવે આપણે દ્વિમુખી સંખ્યાઓ માણીએ.

- સૌપ્રથમ એક અંકી સંખ્યાઓ એટલે કે 0, 1, 2, 3, ..., 9 એમ કુલ દસ સંખ્યાઓ સ્વાભાવિક રીતે દ્વિમુખી ગણી લઈએ.
- બે અંકોવાળી દ્વિમુખી સંખ્યાઓ : 11, 22, 33, ..., 99 એમ કુલ નવ સંખ્યાઓ મળે.
- ત્રણ અંકો વાળી દ્વિમુખી સંખ્યાઓ : 101, 111, 121, ..., 191 એમ કુલ 10 સંખ્યાઓ મળે.

201, 212, 222, ..., 292 એમ કુલ 10

. . . .

. . . .

. . . .

909, 919, 929, ..., 999 એમ કુલ 10

આમ, $9 \times 10 = 90$ જેટલી ત્રણ અંકોવાળી દ્વિમુખી સંખ્યાઓ મળે. વધુ અંકોની દ્વિમુખી સંખ્યાઓ કેટલી મળે એ આ રીતે જાણી શકાય. ચાર અંકોવાળી કેટલી દ્વિમુખી સંખ્યાઓ મળે ? અને પાંચ અંકોની

હવે વિચાર કરીએ કે દ્વિમુખી સંખ્યાઓ ક્યાં જોવા મળે ? તારીખ 22-02-2022 દ્વિમુખી છે. તારીખોને આ રીતે જોવાનો પ્રયત્ન કરીએ 21મી સદીની સૌથી પહેલી દ્વિમુખી તારીખ 10-02-2001 છે. આ રીતે દ્વિમુખી તરીખોની યાદી બનાવીએ.

10-02-2001, 20-02-2002

01-02-2010, 11-02-2011, 12-02-2021

02-02-2020, 12-02-2021, 22-02-2022

03-02-2030, 13-02-2031, 23-02-2032

04-02-2040, 14-02-2041, 24-02-2042

આ રીતે આગળ વધતાં વર્ષ 2001થી 2100 સુધીમાં કુલ 29 દ્વિમુખી તારીખો મળશે. તેમજ વર્ષ 2101થી 2200 સુધીમાં કુલ 31 દ્વિમુખી તારીખો મળશે. ત્યારબાદ વર્ષ 2201થી 3000 સુધી એક પણ તારીખ દ્વિમુખી હશે નહીં. આમ, વર્ષ 2000થી 3000 સુધીમાં માત્ર 60 જ દ્વિમુખી તારીખો મળશે 31મી સદીની પ્રથમ દ્વિમુખી તારીખ 10-03-3001 મળશે. આ દ્વિમુખી તારીખોની સંપૂર્ણ યાદી તૈયાર કરો તો તેની શ્રેણીમાં તારીખ-મહિનો-વર્ષના અંકો માટે એક વિશેષ તરાહ (Pattern) જોવા મળશે. ઉદાહરણ તરીકે 21મી સદી એટલે કે વર્ષ 2000થી 2100માં આવતી તમામ દ્વિમુખી તારીખો ફેબ્રુઆરીમાં જ આવશે. એ જ રીતે વર્ષ 2101 થી 2200 (22મી સદી) માં તમામ દ્વિમુખી તારીખો ડિસેમ્બરમાં જ આવશે. સાથે જ આ તારીખો એક ખાસ ત્રિપુટીમાં જોવા મળશે. આ રીતે દ્વિમુખી સંખ્યાઓ વાહનોના નંબર, ઘર નંબર, બેઠક નંબર વગેરે સંખ્યાઓમાં શોધી શકીએ.

હવે, પ્રશ્ન એ થાય કે કોઈ સંખ્યા દ્વિમુખી ના હોય તો તેના ઉપરથી દ્વિમુખી સંખ્યા મેળવી શકાય ? જવાબ છે ‘હા’, એક સહેલી રીત એ છેકે આપેલી સંખ્યાના અંકોને ઊલટા ક્રમમાં લખી નવી સંખ્યા બનાવો. મૂળ સંખ્યા અને આ નવી સંખ્યાને બાજુ બાજુમાં લખતાં જે સંખ્યા મળે તે દ્વિમુખી સંખ્યા હશે. ઉદાહરણ તરીકે 3472 ને ઊલટા ક્રમમાં લખતાં, 2743 અને 3472 અને 2743 ને બાજુ બાજુમાં લખતાં 34722743 મળે, જે દ્વિમુખી સંખ્યા છે. દ્વિમુખી સંખ્યા મેળવવાની બીજી રીત નીચે પ્રમાણે છે.

દ્વિમુખી સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓને તેના અંકો ઊલટાવતાં મળતી સંખ્યામાં ઉમેરો. જો સરવાળો દ્વિમુખી સંખ્યા ન હોય તો આ પ્રક્રિયા ફરી કરો. આ પ્રક્રિયા ત્યાં સુધી ચાલુ રાખો જ્યાં સુધી સરવાળો દ્વિમુખી ન હોય તેવી સંખ્યા મળતી રહે. અલબત્ત, આ રીતે સાત પગલાંમાં દ્વિમુખી સંખ્યા મળશે જ તેની ખાતરી નહિ.

ઉદાહરણ : $35 + 53 = 88$ અને 88 દ્વિમુખી સંખ્યા છે.

$34 + 43 = 77$ અને 77 દ્વિમુખી સંખ્યા છે.

અહીં એક જ પગલે દ્વિમુખી સંખ્યા મળી જાય છે. વ્યાપક રીતે જો બે અંકની સંખ્યા $10a + b$ હોય તો $(10a + b) + (10b + a) = 11\ (a + b)$

અને જો અંકોનો સરવાળો $a + b$, 1 થી 9 સુધીની કોઈ સંખ્યા હોય, તો $11\ (a + b)$ દ્વિમુખી સંખ્યા થાય અને એટલે અહીં એક જ પગલે દ્વિમુખી સંખ્યા મળે. જેમ કે,

$a + b = 1$, તો સંખ્યા 10; $10 + 01 = 11$

$a + b = 2$, તો સંખ્યાઓ 11, 20; $11 + 11 = 22$, $20 + 02 = 22$

$a + b = 3$, તો સંખ્યાઓ 12, 21, 30; $12 + 21 = 33$, $21 + 12 = 33$, $30 + 03 = 33$

એ જોઈ શકશે, કે બે અંકોની બે સંખ્યાઓના અંકોનો સરવાળો સમાન હોય તો તેમાંથી મળતી દ્વિમુખી સંખ્યાઓ પણ સમાન હશે.

બે અંકની સંખ્યામાંથી દ્વિમુખી સંખ્યા મેળવવા માટે ઉપરની રીતમાં એકથી વધુ પગલાંની જરૂર પડે તેવુ બને.

ઉદાહરણ : સંખ્યા 57, 57 + 75 = 132 (દ્વિમુખી નથી)

132 + 231 = 363 (દ્વિમુખી છે.)

આમ, અહીં બે પગલાંની જરૂર પડી.

ત્રણ, ચાર અને પાંચ અંકોવાળી સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણ જોઈએ.

953	5889	25678
+ 359	+ 9885	+ 87652
1312	15774	113330
+ 2131	+ 47751	+ 033311
3443	63525	146641
(દ્વિમુખી)	+ 52536	(દ્વિમુખી)
	116061	
	+ 160611	
	276672	
	(દ્વિમુખી)	

અંતે કેટલીક દ્વિમુખી સંખ્યાઓ જોઈએ જેના વર્ગ પણ દ્વિમુખી સંખ્યા છે.

$(11)^2 = 121$ $(101)^2 = 10201$

$(111)^2 = 12321$ $(1001)^2 = 1002001$

$(1111)^2 = 1234321$ $(10001)^2 = 100020001$

$(11111)^2 = 123454321$

$(111111)^2 = 12345654321$

$(1111111)^2 = 1234567654321$ $(22)^2 = 484$

$(11111111)^2 = 123456787654321$ $(212)^2 = 44944$

$(111111111)^2 = 12345678987654321$

તંત્રી નોંધ :

(1) લેખમાં તારીખ અને માસ બંને બે અંકમાં લખતા જે તારીખ દ્વિમુખી થાય તેવી જ તારીખોની વાત કરવામાં આવી છે. જો તારીખ કે માસ કે બંને એક અંકમાં લખીએ તો બીજી પણ કેટલીક તારીખો દ્વિમુખી મળે. જેમ કે, 1-10-2011, 2-10-2012, 3-10-2013, ..., 9-10-2019, 21-1-2112, 1-1-2211, 2-1-2212, 3-2-2223 વગેરે.

(2) 1થી 10 સુધીમાં ત્રણ દ્વિમુખી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ છે : 1, 4 અને 9

11થી 1000 સુધીમાં ત્રણ દ્વિમુખી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે : 121, 484 અને 676

1001થી 10,000 સુધીમાં કેટલી દ્વિમુખી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ છે ?

1થી 10,000 સુધીમાં કેટલી દ્વિમુખી સંખ્યાઓ પૂર્ણઘન છે ?

(3) કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાને વધુમાં વધુ ત્રણ દ્વિમુખી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે લખી શકાય તેવું પરિણામ પાંચ વર્ષ પહેલાં જ સાબિત થયું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ-4
રસપ્રદ ગુણધર્મો

પી. કે. વ્યાસ
39, સનરાઈઝ ટેનામેન્ટ્સ, P.O. બોડકદેવ, અમદાવાદ-380 054
(M) 98255 77784

સુગણિતમ્ (સળંગ અંક 306 E-આવૃત્તિ 1)માં પ્રગટ થયેલ આ લેખશ્રેણીના પ્રથમ લેખમાં આપણે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓના એક ગુણધર્મની ચર્ચા કરી હતી. આ ગુણધર્મ નીચે પ્રમાણે હતો.

"$1\Delta_2 + 2\Delta_3 + 3\Delta_4 + ... + n\Delta_{n+1}$ એક ત્રિકોણીય સંખ્યા છે."

ઉપરની શ્રેણીમાં તમામ ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ (Δ)ના સહગુણક અને તેના ક્રમની અદલાબદલી કરીએ. ઉપરોક્ત શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા n છે. જ્યારે ફેરફાર કરેલી નવી શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા $n–1$ લઈએ. આમ કરવાથી આપણને નીચેની શ્રેણી મળે

$2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + ... + n\Delta_{n-1}$

આ સરવાળાની કોઈ ખાસ લાક્ષણિકતા છે?

જો કોઈ લાક્ષણિકતા હોય તો શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

N એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. N અનંત ગણ છે. આપણે Nના એક સાંત ઉપગણની વાત કરવાના છીએ. પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ગણને આપણે N_n વડે દર્શાવીએ. આમ

$N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. દેખીતી રીતે જ N_n સાંત ગણ છે. ગણ N_n પર આપણે નીચે મુજબ એક પ્રક્રિયા વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

"N_n ના બે ઘટકો ધરાવતા તમામ ઉપગણો લઈ, દરેક ઉપગણના ઘટકોનો ગુણાકાર કરી, આ તમામ ગુણાકારોનો સરવાળો કરો."

આ પ્રક્રિયા અંતર્ગત આપણને કેવાં પરિણામો મળે છે તે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા જોઈએ.

(1) $N_2 = \{1, 2\}$ લઈએ.

N_2નો દ્વિઘટકી (બે ઘટકો ધરાવતો) એક જ ઉપગણ {1, 2} છે. આ ઉપગણના બે ઘટકોનો ગુણાકાર

$$1\cdot2 = 2\cdot1 = 2\Delta_1 \qquad .... \text{(i)}$$

અહીં N_2નો એક જ ઉપગણ મળતો હોવાથી તેના ઘટકોના ગુણાકારના સરવાળાનો પ્રશ્ન ઉભો થતો નથી.

(2) $N_3 = \{1, 2, 3\}$ લઈએ.

N_3ના, બે ઘટકો ધરાવતા, ત્રણ ઉપગણો : {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} મળશે. તે દરેકના બે ઘટકોના ગુણાકારનો સરવાળો:

$1\cdot2 + 1\cdot3 + 2\cdot3 = 11$ મળશે.

અને $11 = 2\cdot1 + 3\cdot3 = 2\Delta_1 + 3\Delta_2$ .... (ii)

(આપણે આ લેખશ્રેણીના અગાઉના લેખોમાં ત્રિકોણીય સંખ્યાઓની વ્યાખ્યા આપી ગયા છીએ. 'n'મી ત્રિકોણીય સંખ્યા $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ અને તે પરથી $\Delta_1=1, \Delta_2=3, \Delta_3=6, \Delta_4=10, \Delta_5=15$ … વગેરે મેળવી છે.)

(3) $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ લઈએ.

N_4ના, બે ઘટકો ધરાવતા, છ ઉપગણો : {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4} મળશે.

આ દરેક ઉપગણના બે ઘટકોના ગુણાકારનો સરવાળો:

$$1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + 3\cdot4$$

$= 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 35$ મળશે.

અને $35 = 2\cdot1 + 3\cdot3 + 4\cdot6 = 2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3$ .... (iii)

(4) $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ લઈએ.

N_5ના, બે ઘટકો ધરાવતા, દસ ઉપગણો :

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1.5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5} મળશે.

આ દરેક ઉપગણના બે ઘટકોનો ગુણાકાર કરી સરવાળો કરતાં

$$1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 + 1\cdot5 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot4 + 3\cdot5 + 4\cdot5$$
$$= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 = 85$$

અને $85 = 2\cdot1 + 3\cdot3 + 4\cdot6 + 5\cdot10 = 2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + 5\Delta_4$ .... (iv)

ઉપરનાં ચાર ઉદાહરણોમાં મળેલાં પરિણામો પરથી વ્યાપક પરિણામ નીચે પ્રમાણે હોવું જોઈએ એવું અનુમાન કરવું સહેલું છે.

"$N_n = \{1, 2, 3, ... n\}$ ના તમામ દ્વિઘટકો (બે ઘટકો ધરાવતા) ઉપગણોના ઘટકોના ગુણાકારનો સરવાળો

$2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + ... + n\Delta_{n-1}$ થાય" .... **(A)**

(A) માં આપેલ શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા $n-1$ છે તે સ્પષ્ટ છે. વળી N_nના દ્વિ ઘટકી ઉપગણોની સંખ્યા

$$nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \Delta_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \text{ છે.}$$

આપણે પરિણામ **(A)**ની સાબિતી આપીએ અને સાથે સાથે N_nના તમામ દ્વિઘટકી ઉપગણોના ઘટકોના ગુણાકારનો સરવાળો, એટલે કે $2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + ... + n\Delta_{n-1}$ ને nના સ્વરૂપમાં મેળવીએ.

આપણે એક કોષ્ટકની રચના કરીએ જેમાં ગણ N_nના દ્વિઘટકી ઉપગણોના ઘટકોના ગુણાકારને કોષ્ટકનાં ખાતાઓમાં નીચે પ્રમાણે મૂકીએ. હાલ આપણે આ ગુણાકારોનો સરવાળો નહિ કરીએ.કોષ્ટક-1 જૂઓ.

કોષ્ટકની પહેલી પંક્તિનાં ખાનાંઓમાં આપણે અનુક્રમે $1\cdot2$, $1\cdot3$, $1\cdot4$, ..., $1\cdot(n-1)$, $1\cdot n$ લખીશું. આ પંક્તિમાં $1\cdot1$ થી શરૂઆત નથી થતી કારણ કે {1, 1} એ N_nનો બે ઘટકો ધરાવતો ઉપગણ નથી. આમ પહેલી પંક્તિમાં કુલ $n-1$ ખાનાં ભરાશે.

કોષ્ટકની બીજી પંક્તિનાં ખાનાંઓણાં અનુક્રમે $2\cdot3$, $2\cdot4$, $2\cdot5$, ..., $2(n-1)$, $2\cdot n$ લખીશું. કોષ્ટકની આ પંક્તિમાં $2\cdot1$ અને $2\cdot2$ મૂકી શકાય નહિ. કારણ કે {1, 2} અને {1, 2} ભિન્ન નથી અને {2, 2} દ્વિઘટકી ગણ નથી.

આ પ્રમાણે આગળ વધતાં,

ત્રીજી પંક્તિમાં $3\cdot4$, $3\cdot5$, $3\cdot6$, ..., $3\cdot n$,

ચોથી પંક્તિમાં $4\cdot5$, $4\cdot6$, ..., $4\cdot n$,

....,

....,

કોષ્ટક-1

પંક્તિનો ક્રમ	**Nના બે ઘટકોવાળા ઉપગણોના ઘટકોનો ગુણાકાર**							**પંક્તિમાં પદની સંખ્યા**
1	$1\cdot2$	$1\cdot3$	$1\cdot4$	$1\cdot5$	--	$1(n-1)$	$1\cdot n$	$n-1$
2	--	$2\cdot3$	$2\cdot4$	$2\cdot5$	--	$2(n-1)$	$2\cdot n$	$n-2$
3	--	--	$3\cdot4$	$3\cdot5$	--	$3(n-1)$	$3\cdot n$	$n-3$
--	--	--	--	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--	--	--	--
$n-2$	--	--	--	--	--	$(n-2)\times(n-1)$	$(n-2)n$	2
$n-1$	--	--	--	--	--	--	$(n-1)n$	1

$(n-2)$મી પંક્તિમાં બે ઘટકો : $(n-2)(n-1)$, $(n-2)\cdot n$, અને $(n-1)$મી પંક્તિમાં એક ઘટક : $(n-1)\cdot n$ લખવાનો રહેશે.

અત્રે એ નોંધીએ કે દરેક પંક્તિમાં આગળની પંક્તિ કરતાં એક ખાનું ઓછું ભરાય છે. ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં N_nના તમામ દ્વિઘટકી ઉપગણોના ઘટકોના ગુણાકારનો સમાવેશ થઈ જાય છે.

બધાં જ ખાનાંઓની કુલ સંખ્યા

$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 = \Delta_{n-1} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$ છે અને યાદ રહે કે N_nના દ્વિઘટકી ઉપગણોની સંખ્યા પણ $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \Delta_{n-1}$ જ છે.

હવે કોષ્ટક-1નાં તમામ ખાનાંઓમાં લખેલ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવાનો બાકી રહે છે. આ સરવાળો **(A)**માં આપેલી શ્રેણીનો સરવાળો : $2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + \ldots + n\Delta_{n-1}$ જેટલો થવો જોઈએ.

આ સરવાળા ને આપણે S વડે દર્શાવીશું.

S મેળવવા માટે આપણે કોષ્ટક 1ના બધા સ્તંભોના અલગ અલગ સરવાળા કરીએ અને ત્યારબાદ આ બધા સરવાળાઓનો સરવાળો કરી S મેળવીએ.

પ્રથમ સ્તંભમાં માત્ર એક જ પદ છે : $1\cdot2$ અને $1\cdot2 = 2.1 = 2\Delta_1$

બીજા સ્તંભમાં બે પદો છે જેનો સરવાળો : $1\cdot3 + 2\cdot3 = 3\ (1+2) = 3\Delta_2$

ત્રીજા સ્તંભમાં ત્રણ પદો છે જેનો સરવાળો :

$1\cdot4 + 2\cdot4 + 3\cdot4 = 4\ (1 + 2 + 3) = 4\Delta_3$

....

....

....

$(n-2)$મા સ્તંભમાં પદોનો સરવાળો : $(n-1)\ [1+2+3+ \ldots.. + (n-2)] = (n-1)\ \Delta_{n-2}$

($(n-2)$મા સ્તંભમાં $(n-2)$ પદો થશે.)

$(n-1)$મા સ્તંભમા પદોની સંખ્યા $(n-1)$ અને તેમનો સરવાળો :

$$n[1+2+3+ \ldots.. + (n-1)] = n\Delta_{n-1}$$

તેથી બધા જ સ્તંભોના સરવાળાનો સરવાળો :

$S = 2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + \ldots + n\Delta_{n-1}$

આમ N_nના તમામ દ્વિઘટકી ઉપગણોના ઘટકોના ગુણાકારનો સરવાળો $S = 2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + \ldots + n\Delta_{n-1}$ થાય.

પરિણામ **(A)** સાબિત થયું. હવે ઉપરોક્ત શ્રેણીના સરવાળા Sને આપણે 'n'ના સ્વરૂપમાં (nના વિધેય તરીકે) દર્શાવીએ શ્રેણી $2\Delta_1, 3\Delta_2, 4\Delta_3, \ldots$ નું વ્યાપક પદ :

$T_r = (r + 1)\ \Delta_r$ થશે. જૂઓ કે $r = 1$ લેતાં $T_1 = 2\Delta_1$ અને $r = n-1$ લેતાં $T_{n-1} = n\Delta_{n-1}$ મળે છે.

આપણે $S = \sum_{r=1}^{n-1} T_r$ શોધવાનું છે. જ્યાં $T_r = (r+1)\Delta_r$

$$= \frac{(r+1)\cdot r\cdot(r+1)}{2} = \frac{1}{2}\ [r^3 + 2r^2 + r]$$

$$\therefore 2S = \sum_1^{n-1} [r^3 + 2r^2 + r]$$

$$= \sum_1^{n-1} r^3 + 2\sum_1^{n-1} r^2 + \sum_1^{n-1} r$$

$$= \frac{(n-1)^2\cdot n^2}{4} + \frac{2\,(n-1)\cdot n\,(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$= \frac{1}{12}\ [3n^2\,(n-1)^2 + 4\,n(n-1)(2n-1) + 6n\,(n-1)]$$

$$= \frac{1}{12}\ [n\,(n-1)\{3n^2 - 3n + 8n - 4 + 6\}]$$

$$= \frac{1}{12}\ [n\,(n-1)\,(3n^2 + 5n + 2)]$$

$\therefore\ 2S = \frac{1}{12}\ [n\,(n-1)\,(n+1)\,(3n+2)\,]$

$\therefore\ S = \frac{1}{24}\cdot n\,(n^2-1)\,(3n+2)$

આમ N_nના તમામ દ્વિઘટકી ઉપગણોના ઘટકોના ગુણાકારોનો સરવાળો :

$$S = 2\Delta_1 + 3\Delta_2 + 4\Delta_3 + \ldots + n\Delta_{n-1} = \frac{1}{24}\cdot n\,(n^2-1)\,(3n+2) \qquad \text{..................}\textbf{(B)}$$

સરવાળા Sનું સૂત્ર આપણે જુદી જુદી ત્રણ ચાર રીતે મેળવી શકીએ.

(1) S મેળવવા માટે આપણે સ્તંભદીઠ સરવાળો કરી પછી બધા સરવાળાનો સરવાળો કર્યો. આપણે આ જ સરવાળો દરેક પંક્તિ દીઠ અલગ અલગ સરવાળા કરી એ બધા સરવાળાનો સરવાળો કરીને પણ મેળવી શકીએ.

(2) **(B)**માં મેળવેલા સૂત્રની ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પણ સાબિતી આપી શકીએ.

(3) આ સૂત્રની એક અનોખી સાબિતી આપી લેખ પૂરો કરીએ.

આપણે $n \times n = n^2$ ઘટકો ધરાવતો ચોરસ રચીએ. આ ચોરસના n^2 ખાનાંઓમાં નીચે મુજબ સંખ્યાઓ મૂકીએ.

પ્રથમ પંક્તિમાં : $1\cdot1,\ 1\cdot2,\ 1\cdot3,\ \ldots\ldots,\ 1\cdot(n-1),\ 1\cdot n$

બીજી પંક્તિમાં : $2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ \ldots\ldots,\ 2\cdot(n-1),\ 2\cdot n$

ત્રીજી પંક્તિમાં : $3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \ldots\ldots,\ 3\cdot(n-1),\ 3\cdot n$

....

....

....

$(n-1)$મી પંક્તિમાં : $(n-1)\cdot1,\ (n-1)\cdot2,\ (n-1)\cdot3,\ \ldots,\ (n-1)(n-1),\ (n-1)\cdot n$

nમી પંક્તિમાં : $n\cdot1,\ n\cdot2,\ n\cdot3,\ \ldots,\ n\cdot(n-1),\ n\cdot n$

કોષ્ટક-2 : $n \times n$ ચોરસ

$1\cdot1$	$1\cdot2$	$1\cdot3$	$1\cdot4$	--	--	$1(n-1)$	$1\cdot n$
$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	$2\cdot4$	--	--	$2(n-1)$	$2\cdot n$
$3\cdot1$	$3\cdot2$	$3\cdot3$	$3\cdot4$	--	--	$3(n-1)$	$3\cdot n$
$4\cdot1$	$4\cdot2$	$4\cdot3$	$4\cdot4$	--	--	$4(n-1)$	$4\cdot n$
--	--	--	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--	--	--
$(n-1)\cdot1$	$(n-1)\cdot2$	$(n-1)\cdot3$	--	--	--	$(n-1)\times(n-1)$	$(n-1)\cdot n$
$n\cdot1$	$n\cdot2$	$n\cdot3$	$n\cdot4$	--	--	$n\,(n-1)$	$n\cdot n$

આ ચોરસનાં n^2 ખાનાંઓમાં લખેલ સંખ્યાઓના આપણે પંક્તિદીઠ સરવાળા કરી, પછી તમામ n પંક્તિઓના સરવાળાનો સરવાઓ કરીએ.

પ્રથમ પંક્તિનો સરવાળો : $1\cdot(1+2+3+\ldots+n) = 1\Sigma n$

બીજી પંક્તિનો સરવાળો : $2\cdot(1+2+3+\ldots+n) = 2\Sigma n$

ત્રીજી પંક્તિનો સરવાળો : $3\cdot(1+2+3+\ldots+n) = 3\Sigma n$

....

....

'n'મી પંક્તિનો સરવાળો : $n \cdot (1+2+3+...+n) = n \Sigma n$

આમ ચોરસનાં તમામ n^2 ખાનાંઓમાં લખેલ સંખ્યાઓનો કુલ સરવાળો

$1\Sigma n + 2\Sigma n + 3\Sigma n + ... + n\Sigma n$

$= (1 + 2 + 3 + ... + n)\ \Sigma n = [\Sigma n]^2 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$ .... (1)

હવે ચોરસનાં તમામ n^2 ખાનાંઓનાં ત્રણ વિભાગો બનાવી દરેક વિભાગની સંખ્યાઓનો સરવાળો મેળવીએ

વિભાગ 1 :

ચોરસના અગ્રવિકર્ણ પરનાં n ખાનાંઓમાં લખેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો :

$1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot3 + ... + n\cdot n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \Sigma n^2 = \frac{n (n+1)(2n+1)}{6}$ .... (2)

વિભાગ 2 અને વિભાગ 3 :

આ વિભાગો અગ્રવિકર્ણની સામસામેની બાજુએ આવેલા છે. આ વિભાગોની સંખ્યાઓ $i\cdot j$ અને $j\cdot i$ સમાન છે. એટલે કે $i \neq j$ તો ચોરસની iમી પંક્તિ અને jમા સ્તંભમાં લખેલી સંખ્યા $(i\cdot j)$ અને jમી પંક્તિ અને iમાં સ્તંભમાં લખેલી સંખ્યા $(j\cdot i)$ સમાન છે. દાખલા તરીકે ત્રીજી પંક્તિ અને ચોથા સ્તંભમાં લખેલી સંખ્યા ($3\cdot4=12$) અને ચોથી પંક્તિ અને ત્રીજા સ્તંભમાં લખેલી સંખ્યા ($4\cdot3=12$) સમાન છે. વળી બન્ને વિભાગો કોષ્ટક-1 માં બતાવ્યા મુજબના જ છે.

આમ વિભાગ-2 માં લખેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો અગાઉ દર્શાવેલ સંકેત S છે.

વિભાગ-3 માં લખેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો પણ S જ છે.

વળી વિભાગ 1,2,3 માં લખેલી બધી સંખ્યાઓનો સરવાળો = $n \times n$ ચોરસનાં લખેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો

$\therefore \frac{n (n+1)(2n+1)}{6} + S + S = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$ ((1) અને (2) પરથી)

$$\therefore 2S = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} - \frac{n (n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n (n+1)}{12} [3n(n+1) - 2(2n+1)]$$

$$= \frac{1}{12} \cdot n (n+1)[3n^2 + n - 2]$$

$$= \frac{1}{12} \cdot n (n+1)(n-1)(3n+2)$$

$$\therefore S = \frac{1}{24} \cdot n (n^2 - 1)(3n+2)$$

આપણે આ જ પરિણામ **(B)**માં મેળવ્યું હતું.

જેમ પ્રથમ 'n' ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનાં બે-બેનાં જૂથના ઘટકોના ગુણાકારનો સરવાળો ઉપર મેળવ્યો, તેવું કોઈ સૂત્ર ત્રણ-ત્રણનાં જૂથના ઘટકોના ગુણાકારના સરવાળા વિશે કે પછી r સંખ્યાઓનાં જૂથના ઘટકોના ગુણાકારના સરવાળા વિશે મેળવી શકાય? પ્રશ્નનો ઉત્તર 'હા' છે. આવું સૂત્ર પ્રાધ્યાપક સચીન ગજ્જરે મેળવ્યું છે અને મને મોકલ્યું પણ છે. આ સૂત્રની સાબિતી તો પ્રા. સચીન લખે એ જ વધુ યોગ્ય ગણાય.

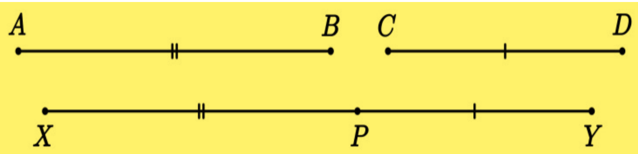
✦ ✦ ✦ ✦ ✦

પ્રશ્ન ચર્ચા - ભૂમિતિ (4)

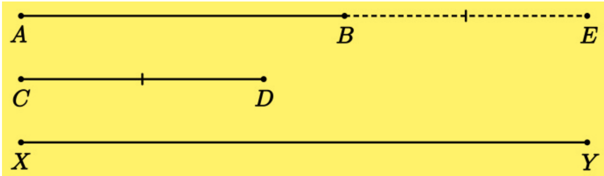
જૈમિન પટેલ
એરાઈસ ફ્લોરસ, ગોતા, અમદાવાદ-382481
(M) 9904235869

ગયા અંકમાં એક પ્રશ્નની ચર્ચા કરી હતી કે જેમાં બે લંબાઈઓનો સરવાળો ત્રીજી લંબાઈ બરાબર બતાવવાનો હતો અને તેના માટે શક્ય ઉકેલના બે રસ્તા જોવાનો અને સમજવાનો પ્રયત્ન કર્યો હતો. તે બે રસ્તા નીચે પ્રમાણે હતા. ધારો કે $AB + CD = XY$ બતાવવાનું હોય તો,

(1) $\overline{XY}$ પર બિંદુ P એવું લો અથવા શોધો જેથી કરીને $XP = AB$ અને $PY = CD$ (અથવા $XP = CD$ અને $PY = AB$) થાય અથવા સાબિત કરી શકાય. (આકૃતિ 1)



આકૃતિ 1

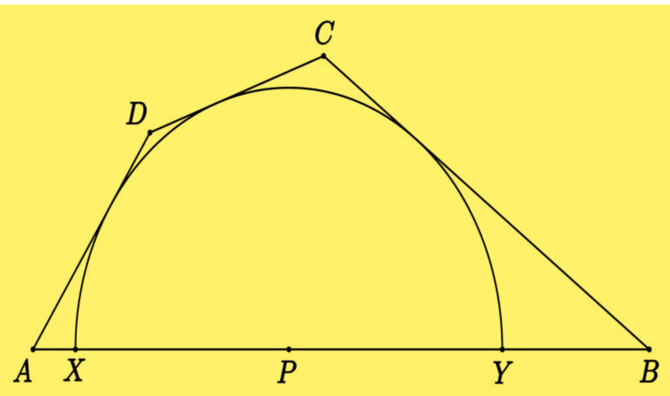


આકૃતિ 2

(2) $\overline{AB}$ ને B તરફ લંબાવીને તેના પર બિંદુ E એવું લેવું અથવા શોધવું કે જેથી $A - B - E$ અને $BE = CD$ થાય (પ્રશ્નમાં આપેલી પરિસ્થિતિ પ્રમાણે કયા રેખાખંડને કેવી રીતે અને ક્યાંથી લંબાવવો તે અનુભવ દ્વારા ખ્યાલ આવશે.) ત્યારબાદ AE = XY સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકાય. (આકૃતિ 2)

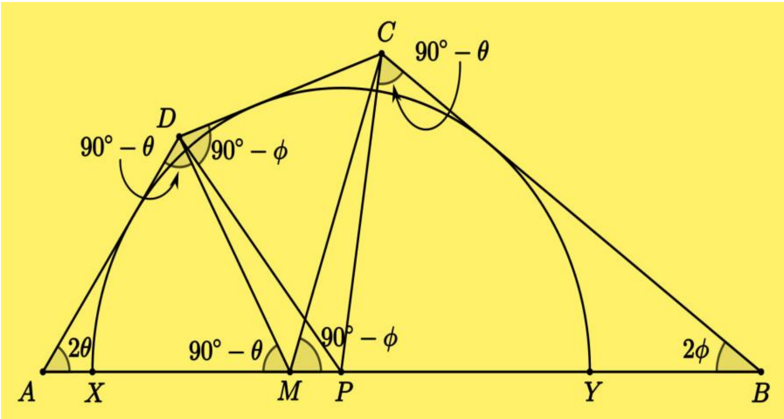
પ્રશ્ન : ચક્રીય ચતુષ્કોણ $ABCD$માં P એ બાજુ $\overline{AB}$ પરનું એક બિંદુ છે. Pને કેન્દ્ર લઈ દોરેલું વર્તુળ ચતુષ્કોણની બાજુઓ $\overline{BC}, \overline{CD}$ અને $\overline{DA}$ને સ્પર્શે છે સાબિત કરો કે $AB = AD + BC$.

પૃથક્કરણ : પ્રશ્નમાં આપેલી માહિતી પ્રમાણે આકૃતિ દોરતાં આકૃતિ 3 જેવી આકૃતિ બનશે. બે રેખાખંડોની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજા રેખાખંડની લંબાઈ જેટલો બતાવવાનો છે. તો ઉપર ચર્ચિત બે રસ્તાઓ પૈકી કોઈ એક રસ્તાનો વિચાર કરી શકાય છે. પણ કયો રસ્તો કામ કરશે ? વાચક આગળ વધતાં પહેલાં પોતે આ વિશે વિચારવામાં થોડો સમય વિતાવે તેવું ઇચ્છનીય છે. અહીં બંનેમાંથી કયો રસ્તો ઉપયોગમાં લેવાથી પ્રશ્ન ઉકેલાઈ જશે તેનો નિર્ણય લેવો સહેલો નથી. માટે એક કામ કરી શકાય કે બંને રસ્તા પ્રમાણે આપેલા પ્રશ્નમાં શું કરવું પડશે તે વિચારીએ. જેમ કે રસ્તા (2) પ્રમાણે આપણે કોઈ એક બાજુ $\overline{AD}$ અથવા $\overline{BC}$ને કોઈ એક શિરોબિંદુ તરફથી લંબાવીને, લંબાવેલા રેખાખંડની કુલ લંબાઈ $\overline{AB}$ની લંબાઈ જેટલી કરવી પડે.



પરંતુ આમ કર્યા પછી શું ? ને વળી ચતુષ્કોણ $ABCD$ ચક્રીય પણ આપેલો છે, તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરીશું ? થોડું વિચારતા એવું લાગે છે કે રસ્તો (2) કોઈ ખાસ મદદ કરી શકે તેમ લાગતું નથી. હવે રસ્તા (1) વિશે વિચારીએ તો, $\overline{AB}$ પર એક બિંદુ M એવું શોધવું અથવા લેવું જોઈએ કે જેથી $AM = AD$ અને $BM = BC$ થાય. આ બિંદુ M માટે શંકાની સોય બિંદુ P પર જઈ શકે

છે. પરંતુ થોડી સચોટ આકૃતિ દોરતા જાણશે કે બિંદુ P એ બિંદુ Mનું સ્થાન લઈ શકશે નહિ. તો હવે પ્રશ્નને આ રીતે ઉકેલવાનું વિચારી શકાય છે. $\overline{AB}$ પર બિંદુ M એવું પસંદ કરો કે જેથી $AM = AD$ થાય અને ત્યારબાદ $BM = BC$ સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકાય. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $\overline{CM}$ અને $\overline{DM}$ રચ્યા બાદ જો ΔAMD સમદ્વિભૂજ હોય તો ΔBCMને સમદ્વિભૂજ સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરવો છે. આમ $\overline{CM}$ અને $\overline{DM}$ રચીને ΔBCMને સમદ્વિભૂજ સાબિત કરવાનો વિચાર શા માટે ? કારણ કે ત્રિકોણને સમદ્વિભૂજ સાબિત કરવા માટે ત્રિકોણના બે ખૂણાઓના માપ સમાન બતાવી શકાય અને અહીં એક ખૂણો, ખૂણો C, એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ $ABCD$નો પણ એક ભાગ છે. વળી ΔAMD સમદ્વિભુજ હોવાથી ત્યાંથી પણ ખૂણાઓ વિશે કંઈક માહિતી મળશે અને ચક્રીય ચતુષ્કોણ $ABCD$ના સામસામેના ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180^o થાય છે તેનો પણ ઉપયોગ કરી કોઈક નિર્ણય સુધી પહોંચી શકાય તેમ લાગે છે.



તો હવે ખૂણાઓ સાથે દોડ-પકડ રમીએ ધારો કે $m\angle DAB = 2\theta$ છે. પ્રશ્ન થાય કે શા માટે 2θ? કેમ θ નહિ ? કારણ સ્પષ્ટ છે. ΔADM સમદ્વિભુજ હોવાથી બાકીના ખૂણાઓના માપ $90^o - \theta$ થાય. જો 2θને સ્થાને θ ધાર્યો તો બાકીના ખૂણાઓના માપ $90^o - \frac{\theta}{2}$ થાય. હવે ચતુષ્કોણ $ABCD$ ચક્રીય હોવાના કારણે $m\angle DCB = 180^o - m\angle DAB = 180^o - 2\theta$ થશે. એક વાત નોંધીએ કે $180^o - 2\theta$ના અડધા $90^o - \theta$ થાય છે. એક જાણીતું પરિણામ છે કે વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલ બિંદુ X અને વર્તુળના કેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ બિંદુ X માંથી તે વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનો કોણ દ્વિભાજક હોય છે. જે વાચકને આ પરિણામનો નથી ખ્યાલ તે વાચક આ પરિણામ પોતે સાબિત કરે તેવું ઇચ્છનીય છે. તે પરિણામ વિષે અહીં વિચારતા ખ્યાલ આવશે કે $\overline{CP}$ એ $\angle BCD$નો કોણ દ્વિભાજક છે. માટે $m\angle PCB = 90^o - \theta$. પરંતુ આમ કરવાથી ફાયદો શું થયો ? જો $\Delta\ CBM$ને સમદ્વિભુજ સાબિત કરવો હોય તો $\angle MCB$ અને $\angle CMB$ને સમાન બતાવવાનો પ્રયત્ન કરવો જોઈએ. સામાન્ય રીતે આમ મળેલા ખૂણાઓનાં માપ પહેલી નજરે વિશિષ્ટ જણાતા નથી. પરંતુ અહીં નોંધીએ કે $m\angle DMA = m\angle PCB = 90^o - \theta$ અને આમ ત્યારેજ થાય જો ચતુષ્કોણ $DMPC$ ચક્રીય હોય. ધારોકે $m\angle CBA = 2\phi$ છે. તો ઉપર કરેલી ચર્ચા પરથી કહી શકાય કે $m\angle CDP = 90^o - \phi$. અને હવે ચતુષ્કોણ $DMPC$ ચક્રીય હોવાના કારણે $m\angle CMP = m\angle CDP = 90^o - \phi$.

હવે ΔCBMમાં $m\angle CMB = 90^o - \phi$. અને $m\angle CBM = 2\phi$ માટે $m\angle MCB = 180^o - (90 - \phi + 2\phi) = 90^o - \phi$. માટે ΔCBMમાં, $m\angle CMB = m\angle MCB$ અને તેથી $BC = BM$.

નોંધ : પૃથક્કરણ માત્ર એ દર્શાવે છે કે પ્રશ્નથી ઉકેલ તરફ કેવી રીતે જઈ શકાય છે. ઉપર કરેલી ચર્ચાએ પ્રશ્નનો વિધિવત ઉકેલ કહી શકાય નહિ. એવું ઇચ્છનીય છે કે વાચક આ પ્રશ્નનો વિધિવત ઉકેલ લખવાનો પ્રયત્ન કરે.

(9) If $\frac{1}{2!\,21!}+\frac{1}{3!\,20!}+\frac{1}{4!\,19!}+\ldots+\frac{1}{11!\,12!}=\frac{N}{1!\,22!}$, then find $\left[\frac{N}{100}\right]$, where [x] = greatest integer less than or equal to x.

Solution : Here we will prove a general result.

Let $\frac{1}{2!\,(2n-3)!}+\frac{1}{3!(2n-4)!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!\,n!}=\frac{N}{1!(2n-2)!}$ (Here n = 12)

Multiply both the sides of the above equation by (2n - 1) !

$$\therefore \frac{(2n-1)!}{2!\,(2n-3)!}+\frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!}+\ldots+\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}=\frac{N\cdot(2n-1)!}{1!(2n-2)!}$$

$$\therefore \binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\ldots+\binom{2n-1}{n-1}=(2n\text{-}1)N$$

$$\therefore \left(\binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\ldots+\binom{2n-1}{n-1}\right)+\left(\binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\ldots+\binom{2n-1}{n-1}\right)$$
$$=2(2n\text{-}1)N$$

$$\therefore \left(\binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\ldots+\binom{2n-1}{n-1}\right)+\left(\binom{2n-1}{2n-3}+\binom{2n-1}{2n-4}+\ldots+\binom{2n-1}{n}\right)$$
$$=2(2n\text{-}1)N$$

$$\left(\quad \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\right)$$

$$\therefore \binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\binom{2n-1}{4}+\ldots+\binom{2n-1}{2n-3}=2(2n\text{-}1)N$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}-\left(\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-1}{2n-2}+\binom{2n-1}{2n-2}\right)=2(2n\text{-}1)N$$

$$\therefore 2^{2n-1}-(1+2n-1+2n-1+1)=2\,(2n-1)\,N$$

$$\therefore 2^{2n-1}-2-2\,(2n-1)=2\,(2n-1)\,N$$

$$\therefore \frac{2^{2n-2}-1}{2n-1}-1=N$$

$$\therefore N=\frac{(2^{n-1}-1)(2^{n-1}+1)}{2n-1}-1$$

By substituting n=12 in the above result

$$N=\frac{(2^{11}-1)(2^{11}+1)}{23}-1=\frac{2047\times 2049}{23}-1$$

$$=89\times 2049-1=182360$$

$$\left[\frac{N}{100}\right]=\left[\frac{182360}{100}\right]=1823$$

(10) If x and y are integers such that $2y^2 + 5x^2y^2 = 60x^2 + 1763$, then find the value of $5x^2y^2$.

Solution :

Here $2y^2 + 5x^2y^2 = 60x^2 + 1763$

$2y^2 - 24 + 5x^2y^2 - 60x^2 = 1739$

$2(y^2 - 12) + 5x^2 (y^2 - 12) = 1739$

$(5x^2 + 2)(y^2 - 12) = 1739 = 1 \times 1739$ or 47×37

$5x^2 + 2 = 47$ and $y^2 - 12 = 37$ (Why?)

$5x^2 = 45$ and $y^2 = 49$

$5x^2y^2 = 45 \times 49 = 2205$

(11) The function f, defined on the set of ordered pairs of positive integers, satisfies the following properties f (x,x) = x, f (x,y) = f (y,x) and (x+y) f(x,y) = y f(x, x+y). Calculate f (14,52).

Solution:

Here, we have $f(x, x) = x$ .... (1)

$f(x, y) = f(y, x)$ .... (2) and

$(x + y) f(x, y) = y f(x, x + y) \Rightarrow f(x, x + y) = \left(\frac{x+y}{y}\right) f(x,y)$ .... (3)

Now, $f(14, 52) = f(14, 14 + 38)$

$= \frac{52}{38} \cdot f(14, 38)$ (From (3))

$= \frac{52}{38} \cdot f(14, 14 + 24)$

$= \frac{52}{38} \cdot \frac{38}{24} \cdot f(14, 24)$ (From (3))

$= \frac{13}{6} \cdot f(14, 14 + 10)$

$= \frac{13}{6} \cdot \frac{24}{10} \cdot f(14, 10)$ (From (3))

$= \frac{26}{5} \cdot f(10, 14)$ (From (2))

$= \frac{26}{5} \cdot f(10, 10 + 4)$

$= \frac{26}{5} \cdot \frac{14}{4} f(10, 4)$ (From (3))

$= \frac{182}{10} f(4, 10)$ (From (2))

$= \frac{182}{10} f(4, 4 + 6)$

$= \frac{182}{10} \cdot \frac{10}{6} f(4, 6)$ (From (3))

$= \frac{91}{3} f(4, 4 + 2)$

$= \frac{91}{3} \cdot \frac{6}{2} f(4, 2)$ (From (3))

$= 91 f(2, 4)$ (From (2))

$= 91 f(2, 2 + 2)$

$= 91 \cdot \frac{4}{2} f(2, 2)$ (From (3))

$= 182 \times 2$ (From (1))

$= 364$

(12) The sequence $\{a_n\}$ satisfies $a_1 = 1$ and $5^{(a_{n+1}-a_n)} - 1 = \frac{1}{n+\frac{2}{3}}$ for $n \geq 1$. Let k be the least integer greater than 1, for which a_k is an integer. Find k.

Solution :

Here we have $5^{(a_{n+1}-a_n)} - 1 = \frac{1}{n+\frac{2}{3}}$

$\therefore 5^{(a_{n+1}-a_n)} = \frac{3}{3n+2} + 1 = \frac{3n+5}{3n+2}$

$\therefore 5^{(a_{n+1}-a_n)} \cdot 5^{(a_n-a_{n-1})} \cdot 5^{(a_{n-1}-a_{n-2})} \cdot \ldots \ldots 5^{(a_2-a_1)} \cdot 5^{a_1}$

$= \frac{3n+5}{3n+2} \cdot \frac{3n+2}{3n-1} \cdot \frac{3n-1}{3n-4} \cdot \ldots\ldots \frac{8}{5} \cdot 5$

$\therefore 5^{a_{n+1}} = 3n + 5$

$\therefore 5^{a_n} = 3n + 2$

Now, it is easy to varify that after n = 1 the next value of n for which 3n + 2 is a power of 5 is n = 41

$\therefore$ $5^{a_{41}} = 3(41) + 2 = 125 = 5^3$

$\therefore$ $a_{41} = 3$

$\therefore$ k = 41

પ્રા. પ્રુ. ચુ. વૈદ્ય ગણિત પ્રશ્નો અંક-309

(1) If x > 0 then find the greatest possible value of $(\log x)^{\log\log\log x} - (\log \log x)^{\log\log x}$, where all the logarithms are on base 10.

[જો x > 0 હોય, તો $(\log x)^{\log\log\log x} - (\log \log x)^{\log\log x}$ ની મહત્તમ શક્તિ કિંમત શોધો. જ્યાં તમામ લઘુગણકનો આધાર 10 છે.)

(2) Let $p(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$. If a, b, c and d are the roots of the polynomial $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, then find the value of $p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$

(ધારો કે $p(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$ છે. જો a, b, c અને d એ પદાવલી $Q(x)=x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$નાં બીજ હોય તો $p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$ નું મૂલ્ય શોધો.)

(3) Prove that (સાબિત કરો કે)

$$\frac{2}{0!+1!+2!} + \frac{3}{1!+2!+3!} + \cdots + \frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

Prof. P.C. Vaidya International Conference on Mathematical Sciences : એક અહેવાલ

ડૉ. માનસી શાહ
ગણિત વિભાગ, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત.
(M) 9974230088

ગુજરાત ગણિતમંડળના સહયોગથી વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ગણિત વિભાગ દ્વારા તા. 4-5 માર્ચ, 2023ના રોજ 4th Prof P. C. Vaidya International Conference on Mathematical Sciences"નું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું.

તા. 4 માર્ચ 2023ના રોજ અધિવેશનનું ઉદ્‌ઘાટન કુલપતિશ્રી ડૉ. કે. એન. ચાવડાની અધ્યક્ષતામાં કરવામાં આવ્યું હતું. જેમાં કુલ સચિવશ્રી ડૉ. આર. સી. ગઢવી, સમારંભના મુખ્ય મહેમાન પ્રો. એન એલ કળથિયા, યુનિવર્સિટીના સિન્ડીકેટ સભ્યો, અન્ય વિભાગના વડાશ્રીઓ, ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખ ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિ તથા અધિવેશનના અન્ય આયોજકો જોડાયા હતા.

અધિવેશનના કન્વીનર તથા વિભાગીય વડા ડૉ. ડી.સી. જોષીએ આવકાર પ્રવચન આપ્યું હતું. સમારંભને સંબોધતાં કુલપતિશ્રીએ ગણિતને લોકભોગ્ય તથા વિદ્યાર્થીઓ માટે રસપ્રદ બનાવવાનું આહવાન કર્યું હતું. કુલસચિવશ્રીએ સર્વેને આવકારવાની સાથે અધિવેશનની સફળતા માટે શુભેચ્છા પાઠવી હતી. અધિવેશનના બીજા કન્વીનર ડૉ. દેવભદ્ર શાહ સૌને આવકાર આપવાની સાથે સમગ્ર અધિવેશનનો ચિતાર આપ્યો હતો. સમારંભના મુખ્ય અતિથી શ્રી પ્રો. એન એલ. કળથિયાએ પ્રો. પી.સી. વૈદ્ય સાથેનાં પોતાનાં સંસ્મરણો વાગોળ્યાં હતાં.

આ અધિવેશનના સ્થાનિક વહીવટી મંત્રીની જવાબદારી વિભાગના ડૉ. પ્રિતી ટંડેલે તથા સંયુક્ત સ્થાનિક વહીવટી મંત્રીની જવાબદારી વિભાગના ડૉ. કોયલ પટેલે લીધી હતી.

દેશ-વિદેશના નિષ્ણાતો દ્વારા વિવિધ વિષયો પર અધિવેશનના 2 દિવસમાં વ્યાખ્યાનો આપવામાં આવ્યાં હતાં હાજર પ્રતિનિધિઓએ કુલ સાત વ્યાખ્યાનોનો લાભ લીધો હતો. જેમાં પ્રો. પી.સી. વૈદ્ય મેમોરિયલ લેક્ચર મુંબઈ યુનિવર્સિટીના પ્રોફેસર ડૉ. રાજેન્દ્ર પાવલે દ્વારા આપવામાં આવ્યું હતું તથા પ્રો. એ.એમ. વૈદ્ય મેમોરિયલ લેક્ચર કેનેડાના ટોરેન્ટો શહેરની બ્રેમર કૉલેજના ગણિતશાસ્ત્રી ડૉ. વ્રજેશકુમાર ખંભોળજા દ્વારા આપવામાં આવ્યું હતું. અન્ય વક્તાઓ ગુજરાત યુનિવર્સિટીના એસો. પ્રોફેસર ડૉ. રવિ ગોર, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટીના પ્રોફેસર ડૉ. કિશોરકુમાર પોરિયા, SVNITના પ્રોફેસર ડૉ. વિકાસ પ્રધાન, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના પ્રોફેસર ડૉ. અબ્દુલ વાહિદ હાસમાની તથા ગુગલના સોફ્ટવેર ઈજનેર શ્રી શિવમ પટેલ હતા.

આ અધિવેશનમાં 65થી વધુ સંશોધનપત્રોનું વાચન દેશ વિદેશના સંશોધનકર્તાઓ દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું.

આ 2 દિવસીય અધિવેશન - ગુજરાત ગણિત મંડળ, પ્રો. એ. એમ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશન, પ્રો. એ. આર. રાવ ફાઉન્ડેશન અને વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી (GRC ફંડ) દ્વારા પ્રાયોજિત કરવામાં આવ્યું હતું.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

37^{th} Indian National Mathematical Olympiad 2023

Time: 4 hours **January 15, 2023**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **No marks will be awarded for stating an answer without justification.**
- **Answer all the questions.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. Let S be a finite set of positive integers. Assume that there are precisely 2023 ordered pairs (x, y) in $S \times S$ so that the product xy is a perfect square. Prove that one can find at least four distinct elements in S so that none of their pairwise products is a perfect square.

   Note: As an example, if $S = \{1, 2, 4\}$, there are exactly five such ordered pairs: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$, and $(4, 4)$.

2. Suppose $a_0, \ldots, a_{100}$ are positive reals. Consider the following polynomial for each k in $\{0, 1, \ldots, 100\}$:

$$a_{100+k}x^{100} + 100a_{99+k}x^{99} + a_{98+k}x^{98} + a_{97+k}x^{97} + \cdots + a_{2+k}x^2 + a_{1+k}x + a_k,$$

   where indices are taken modulo 101, *i.e.*, $a_{100+i} = a_{i-1}$ for any i in $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Show that it is impossible that each of these 101 polynomials has all its roots real.

3. Let $\mathbb{N}$ denote the set of all positive integers. Find all real numbers c for which there exists a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfying:

   (a) for any $x, a \in \mathbb{N}$, the quantity $\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ is an integer if and only if $a = 1$;

   (b) for all $x \in \mathbb{N}$, we have $|f(x) - cx| < 2023$.

4. Let $k \geq 1$ and $N > 1$ be two integers. On a circle are placed $2N + 1$ coins all showing heads. Calvin and Hobbes play the following game. Calvin starts and on his move can turn any coin from heads to tails. Hobbes on his move can turn at most one coin that is next to the coin that Calvin turned just now from tails to heads. Calvin wins if at any moment there are k coins showing tails after Hobbes has made his move. Determine all values of k for which Calvin wins the game.

5. Euler marks n different points in the Euclidean plane. For each pair of marked points, Gauss writes down the number $\lfloor \log_2 d \rfloor$ where d is the distance between the two points. Prove that Gauss writes down less than $2n$ distinct values.

   Note: For any $d > 0$, $\lfloor \log_2 d \rfloor$ is the unique integer k such that $2^k \leq d < 2^{k+1}$.

6. Euclid has a tool called *cyclos* which allows him to do the following:

   - Given three non-collinear marked points, draw the circle passing through them.
   - Given two marked points, draw the circle with them as endpoints of a diameter.
   - Mark any intersection points of two drawn circles or mark a new point on a drawn circle.

   Show that given two marked points, Euclid can draw a circle centered at one of them and passing through the other, using only the cyclos.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

37-वाँ भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलंपियाड — 2023

समय: 4 घंटे **जनवरी 15, 2023**

निर्देश:

- **कैलकुलेटर (किसी भी स्वरुप में) या चांदा लाने की अनुमति नहीं है।**
- **रुलर एवं प्रकार लाने की अनुमति है।**
- **सभी प्रश्न बराबर अंकों के हैं। अधिकतम अंक: 102 हैं।**
- **प्रश्न का हल लिखे बिना केवल जवाब लिखने पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।**
- **सभी प्रश्नों का जवाब दें।**
- **हर प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से शुरू करें। प्रश्नों का उत्तर देने से पहले उत्तर-पुस्तिका पर लिखे निर्देश ध्यान से पढ़ें।**

1. मान लो कि S धन पूर्णांकों का एक परिमित समुच्चय है। मान लो कि समुच्चय $S \times S$ में ऐसे कुल 2023 क्रमित युग्म (x, y) हैं जिनके लिए गुणनफल xy एक पूर्ण वर्ग है। सिद्ध करो कि S में कम से कम चार ऐसे सदस्य हैं जिनमें से किन्ही भी दो सदस्यों का गुणनफल एक पूर्ण वर्ग नहीं है।
नोट: उदाहरण के तौर पर, अगर $S = \{1, 2, 4\}$ है तो ठीक पाँच ऐसे क्रमित युग्म होंगे: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$ व $(4, 4)$।

2. मान लो कि $a_0, \ldots, a_{100}$ धन वास्तविक संख्याएँ हैं। समुच्चय $\{0, 1, ..., 100\}$ के किसी भी सदस्य k के लिए निम्न बहुपद लो:
$$a_{100+k}x^{100} + 100a_{99+k}x^{99} + a_{98+k}x^{98} + a_{97+k}x^{97} + \cdots + a_{2+k}x^2 + a_{1+k}x + a_k$$
जहाँ सूचकांकों को मापांक 101 से समशेष पढ़ेंगे, मतलब $\{1, 2, ..., 100\}$ में किसी भी i के लिए $a_{100+i} = a_{i-1}$ मान लो। सिद्ध करो कि यह असंभव है कि इन सभी 101 बहुपदों के सभी शून्यक वास्तविक संख्याएँ हों।

3. मान लो कि $\mathbb{N}$ सभी धन पूर्णांकों के समुच्चय को निरुपित करता है। ऐसी सभी वास्तविक संख्याएँ c ज्ञात करो जिनके लिए एक ऐसा फलन $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ मिलना संभव हो जिसके लिये:
   (a) किसी भी $x, a \in \mathbb{N}$ के लिए संख्या $\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ एक पूर्णांक तभी और सिर्फ़ तभी है जब $a = 1$ हो; व
   (b) सभी $x \in \mathbb{N}$ के लिए $|f(x) - cx| < 2023$ है।

4. मान लो कि $k \geq 1$ व $N > 1$ दो पूर्णांक हैं। एक गोले पर $2N + 1$ सिक्के चित्त रखते हैं। केल्विन (Calvin) और हॉब्स (Hobbes) निम्न खेल खेलते हैं: केल्विन (Calvin) शुरु करता है, और अपनी चाल पड़ने पर किसी भी सिक्के को चित्त से पट पलट सकता है। हॉब्स (Hobbes) अपनी चाल आने पर ज्यादा से ज्यादा एक सिक्के को, और वह भी ऐसे सिक्के को जो केल्विन (Calvin) के द्वारा पलटे गए सिक्के के बग़ल में है, को पट से चित्त कर सकता है। अगर कभी भी हॉब्स (Hobbes) की चाल के बाद k सिक्के पट हैं तो केल्विन (Hobbes) जीत जाता है। ऐसे सभी k ज्ञात करो जिनके लिए केल्विन (Calvin) ये खेल जीत जाएगा।

5. ऑयलर (Euler) एक यूक्लिडियन (Euclidean) समतल में n अलग-अलग बिंदु चिन्हित करता है। किन्हीं भी दो चिन्हित बिंदुओं के लिए गाउस (Gauss) संख्या $\lfloor \log_2 d \rfloor$ लिखता है जहाँ d इन दो बिंदुओं के बीच की दूरी है। सिद्ध करो कि गाउस (Gauss) अधिक से अधिक $2n$ अलग-अलग संख्याएँ लिखता है।
नोट: किसी भी $d > 0$ के लिए $\lfloor \log_2 d \rfloor$ ऐसा एकमात्र पूर्णांक k है, जिसके लिए $2^k \leq d < 2^{k+1}$ है।

6. यूक्लिड (Euclid) के पास साइक्लॉस (cyclos) नामक एक ऐसा औज़ार है जिससे निम्न निर्माण संभव हैं:
   - कोई भी तीन ग़ैर-समरैखिक चिन्हित बिंदु दिये जाने पर, उन तीनों बिंदुओं से गुजरने वाले वृत्त का निर्माण।
   - कोई भी दो चिन्हित बिंदु दिये जाने पर, उस वृत्त का निर्माण जिसके किसी एक व्यास के दोनों सिरे यह दो बिंदु हों।
   - कोई भी दो वृत्त दिये जाने पर उनके प्रतिच्छेदन पर स्थित किसी भी बिंदु को चिन्हित करना व किसी भी वृत्त पर कोई एक नई बिंदु चिन्हित करना।

   सिद्ध करो कि कोई भी दो चिन्हित बिंदु दिये जाने पर यूक्लिड (Euclid) केवल साइक्लॉस (Cyclos) का प्रयोग करके एक ऐसे वृत्त का निर्माण कर सकता है जिसका केंद्र एक बिंदु हो व दूसरी बिंदु वृत्त पर स्थित हो।

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

MADHAVA MATHEMATICS COMPETITION
(A Mathematics Competition for Undergraduate Students)
Organized by
Department of Mathematics, S. P. College, Pune (Autonomous)
and
Homi Bhabha Centre for Science Education, T.I.F.R., Mumbai

Date: 29/01/2023 Max. Marks: 100
Time: 12.00 noon to 3.00 p.m.

N.B.: Part I carries 20 marks, Part II carries 30 marks and Part III carries 50 marks.

Part I

N.B. Each question in Part I carries 2 marks.

1. The number of positive divisors of $2^{24}-1$ is
(A) 192 (B) 48 (C) 96 (D) 24.

2. The equation Re $(z^2)=0$ represents
(A) a circle (B) a pair of straight lines (C) an ellipse (D) a parabola.

3. If $A=\begin{pmatrix}\alpha & 2\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}$ and $\det A^3=125$, then the values of α are
(A) ± 1 (B) ± 2 (C) ± 3 (D) ± 5.

4. Let A, B, C be three non-collinear points in a plane. The number of points at a distance 1 from A, 2 from B and 3 from C is
(A) exactly 1 (B) at most 1 (C) at most 2 (D) always 0.

5. Let $A=\{x\in[-2,3]: \ \cos x>0\}$. Then
(A) $\inf A=0$ (B) $\sup A=\pi$ (C) $\inf A=-\pi/2$ (D) $\sup A=3$.

6. Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers such that $|a_{n+1}-a_n|\le \frac{2023}{n}|a_n-a_{n-1}|$, $\forall n$. Then the sequence $\{a_n\}$ is
(A) not Cauchy (B) Cauchy but not convergent (C) convergent (D) not bounded.

7. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous function and F be a primitive of f (i.e. $F'=f$). If $3x^2F(x)=f(x)$ for all $x\in\mathbb{R}$ then $f(x)=$
(A) e^{x^3} (B) $3x^2e^{x^3}$ (C) $x^2e^{x^2}$ (D) $3xe^{x^3}$.

8. $1\times 2-2\times 3+3\times 4-4\times 5+\cdots-(2022)\times(2023)=$
(A) $(-2)(1011)(1012)$ (B) $-(1011)(1012)$
(C) $(-4)(1011)(1012)$ (D) $2(1011)(1012)$.

9. The number of times the digit 7 is written while listing all integers from 1 to $1,00,000$ is
(A) 10^4 (B) $5(10)^4-1$ (C) 10^5 (D) $5(10)^4$.

10. The differential equation $y'^2-(x+\sin x)y'+x\sin x=0$, with $y(0)=0$ has
(A) unique solution (B) two solutions (C) no solution (D) four solutions.

Part II

N.B. Each question in Part II carries 6 marks.

1. Consider $f(x) = x[x^2]$, where $[x^2]$ is the greatest integer less than or equal to x^2. Find the area of the region above X-axis and below $f(x), 1 \leq x \leq 10$.

2. In how many ways can numbers from 1 to 100 be arranged in a circle such that sum of pair of integers placed opposite each other is the same? (arrangements are equivalent up to rotation).

3. Find all triplets (x, y, z) of integers satisfying $x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z)$.

4. Suppose A is a singular matrix of order 3 with complex entries all of which having absolute value 1. Show that two rows or two columns of the matrix A are proportional.

5. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying $f^3(x) = x$. Prove that $f^2(x) = x$.

Part III

1. Find [12]

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gcd(1,6) + \gcd(2,6) + \cdots + \gcd(n,6)}{1 + 2 + \cdots + n}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{lcm(1,6) + lcm(2,6) + \cdots + lcm(n,6)}{1 + 2 + \cdots + n}$.

2. Let a, b, c be real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. [12]

   (a) Find the value of the determinant of a matrix $A = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{pmatrix}$.

   (b) Find the maximum and minimum value of the above determinant.

3. For every $t \in \mathbb{R}$, let L_t be the line segment joining $(0, 1)$ with $(t, 0)$. Suppose L_t intersects the parabola $y = x^2$ at the point P_t. Define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as $f(t) = y$-coordinate of P_t. Answer the following questions with justification: [13]

   (a) Is f continuous?

   (b) Is f bounded?

   (c) What is $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$?

   (d) Is f differentiable at 0?

4. The sequence $\{q_n(x)\}$ of polynomials is defined by $q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 + 2x$ and for $m \geq 1$ by

$$q_{2m+1}(x) = q_{2m}(x) + (m + 1)xq_{2m-1}(x),$$
$$q_{2m+2}(x) = q_{2m+1}(x) + (m + 1)xq_{2m}(x).$$

   Let x_n be the largest real solution of $q_n(x) = 0$. Prove that [13]

   (a) the sequence $\{x_n\}$ is increasing.

   (b) $x_{2m+2} > \dfrac{-1}{m+1}$ for $m \geq 1$.

   (c) the sequence $\{x_n\}$ converges to 0.

Prof. A. R. Rao Foundation
Prof. A. R. Rao Mathematics Competition : 2022 (FY/SY)

— online mode —

Time: 11:00 to 1:00 pm | Total Marks: 100 | Date: 2^{nd} Oct, 2022

Instructions :

- **Questions 1-15 have ONLY ONE correct answer.**
  Marks: Q.1 - 8 of 3 marks each, Q.9 - 12 of 4 marks each, Q.13 - 14 of 5 marks each, Q.15 of 6 marks.
- **Questions 16-24 may have MULTIPLE correct options. Hence, to get full credit of it mark all the correct options in these.**
  Marks: Q.16 of 2 marks, Q.17 - 22 of 5 marks each, Q.23 - 24 of 6 marks each.
- **Attempt ALL qustions. There is NO NEGATIVE marking.**

1. For every real $x \neq -1, x \neq -2, x \neq -3$, if $\frac{x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$, then the value of $A+B+C = \ldots\ldots$

   (a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 2

2. How many real solutions of the equation $|x-1|+|x-2| = 5$ are possible ?

   (a) 1 (b) 4 (c) 3 (d) 2

3. Let p and q are the roots of $3x^2+x-1=0$. What is the value of $3(p^3+q^3)+(p^2+q^2)-(p+q)$?

   (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

4. If a and b are natural numbers such that $a+b+ab = 948$, then the value of $a+b = \ldots\ldots$

   (a) 80 (b) 84 (c) 950 (d) 952

5. If $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ are the first 11 terms of an arithmetic progression and $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11} = 72$, then what is the value of $a_1+a_6+a_{11}$?

   (a) 27 (b) 30 (c) 33 (d) 36

6. Let $f(x) = \max\{2-x, 2+x\}$. The value of $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \ldots\ldots$

   (a) 0 (b) 5 (c) $\frac{9}{2}$ (d) 3

7. If $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, then the determinant of $A^{100} - 2^{100}I$ equals to

   (a) 2^{100} (b) 2^{200} (c) 0 (d) none of these

8. If 100 boys eat 100 apple in 100 minutes, then how much time is required by 8 boys to eat 8 apples?

   (a) 100 minutes (b) $\frac{200}{8}$ minutes (c) 8 minutes (d) 14 minutes

9. $\cos A \cos 2A \cos 4A \cos 8A \ldots \cos 2^{n-1}A = \ldots\ldots$

(a) $\frac{2^n \sin A}{\sin 2^n A}$ (b) $\frac{\sin 2^n A}{2^n \sin A}$ (c) $\frac{2^n \sin 2^n A}{\sin A}$ (d) $\frac{\sin A}{2^n \sin 2^n A}$

10. The number of positive integral solutions of equation $x+y+z=100$ will be

(a) $\binom{99}{2}$ (b) $\binom{100}{2}$ (c) $\binom{101}{2}$ (d) $\binom{102}{2}$

11. The number of non-negative integral solutions of equation $x+y+z=100$ will be

(a) $\binom{99}{2}$ (b) $\binom{100}{2}$ (c) $\binom{101}{2}$ (d) $\binom{102}{2}$

12. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ and $M = 5A^4 + A^3 + 2A^2 + A$. Which of the following is the matrix M ?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. If $g(x)$ is differentiable function on $[1,11]$ with $g(1)=2$ and $g'(x) \leq 4$ for all $x \in (1,11)$, then the largest possible value of $g(11)$ is ......

(a) 42 (b) 38 (c) 44 (d) cannot be determined

14. If A is a square matrix of order 3 with determinant 2, then $\det[adj\{adj(A^{-1})\}] = \ldots\ldots$

(a) 16 (b) $\frac{1}{16}$ (c) $\frac{1}{64}$ (d) $\frac{1}{128}$

15. The number of rectangles in a 10×10 grid are equal to

(a) 100 (b) 36^2 (c) 100^2 (d) 35^2

16. The value of determinant: $\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & sin(A+D) \\ \sin B & \cos B & \sin(B+D) \\ \sin C & \cos C & \sin(C+D) \end{vmatrix}$

(a) depends on A.

(b) depends on B.

(c) depends on D.

(d) is independent of A, B, C, D.

17. A circle and a square have area 100 cm^2 each. Which of the following statement(s) is/are correct ?

(a) Circle has larger perimeter then square.

(b) Square has larger perimeter then ciecle.

(c) Both have equal perimter.

(d) Length of diagonal of this square is larger than the diameter of circle.

18. Let $A(x)$ be a matrix defined by $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{bmatrix}$ for all $x \in (-1,1)$. Which of the following is/are true ?

(a) $A(x)A(y) = A(xy)$

(b) $(1+xy)A(x)A(y) = A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

(c) $(1+xy)A(x)A(y) = A\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

(d) $(A(x))^{-1} = A(-x)$

19. Amar, Akbar and Anthony are three friends, one of whom is a doctor, another is an engineer, and the third is a professor. Amar is not an engineer. Akbar is the shortest. The tallest person is a doctor. The engineer's height is the geometric mean of the other two. Which of the following is/are true?

(a) Amar is a doctor and he is the tallest.

(b) Akbar is a professor and he is the tallest.

(c) Anthony is an engineer and he is the shortest.

(d) Anthony is a doctor and he is the tallest.

20. If $p(x)$ is a monic polynomial of degree n and $m,n \in \mathbb{N}$ such that $2m^4+3mn^{3/2}=3n^{3/2}+2nm^3$, then $\frac{d^m}{dx^m}(p(x)) = \ldots\ldots$

(a) $m!$ (b) $n!$ (c) $(m-1)!$ (d) cannot be determined

21. If $A=\sum_{n=0}^{\infty} sin^{2n}\theta$, $B=\sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\theta$, $C=\sum_{n=0}^{\infty} sin^{2n}\theta\, cos^{2n}\theta$ where $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, then which of the following is/are correct ?

(a) $ABC=AB+C$ (b) $ABC=A+B+C$ ✓(c) $ABC=A+BC$ (d) $ABC=AC+B$

22. The function $f(x)=a_0+a_1|x|+a_2|x|^2+a_3|x|^3$ is differentiable at $x=0$

(a) for no values of a_0,a_1,a_2,a_3

(b) for any values of a_0,a_1,a_2,a_3

(c) only if $a_1=0$

(d) only if both $a_1=0$ and $a_3=0$

23. What is the coefficient of a^5 in the expansion of $(1+a+a^2+a^3+a^4)^3$?

(a) even number (b) multiple of 3 (c) multiple of 5 (d) multiple of 7

24. Let f be a twice continuously differentiable function on $\mathbb{R}$, with $f(0)=f(1)=f'(0)=0$. Which of the following is/are correct ?

(a) f'' is the zero function

(b) $f''(x)=0$ for some $x\in(0,1)$

(c) $f''(0)=0$

(d) f'' never vanishes

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ગણિત સમાચાર

- સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગમાં તા. 20-02-2023થી 24-02-2023 દરમિયાન નેશનલ વર્કશોપ ઓન પ્રોબ્લેમ સોલ્વિંગ ઇન મૅથેમૅટિક્સનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. આ પ્રકારનો વિભાગ દ્વારા આયોજિત આ અગિયારમો વર્કશોપ હતો. આ વર્કશોપમાં વિવિધ યુનિવર્સિટીઓમાં મૅથેમૅટિક્સમાં M.Sc. કરતાં 45 વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો હતો. આ વર્કશોપમાં UGC-NET, SET, NBHM વગેરે પરીક્ષામાં સફળ થયેલા તજજ્ઞોએ સેવા આપી હતી, જેમાં વિભાગના પ્રાધ્યાપકો અને સંશોધન વિદ્યાર્થીઓ પણ સામેલ હતા.
- સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના અનુસ્નાતક ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ દ્વારા સ્પેશ્યલ ફંક્શન એન્ડ એલાઈડ એરિયા વિષય પર નેશનલ કોન્ફરન્સનું આયોજન 17, 18 માર્ચના રોજ કરવામાં આવેલ હતું. જેમાં 20 થી વધારે સંશોધકોએ પોતાના સંશોધન પત્ર રજૂ કર્યાં હતાં અને 8થી વધુ તજજ્ઞશ્રીઓએ આ કોન્ફરન્સમાં પોતાની સેવાઓ આપી હતી. આ કોન્ફરન્સમાં ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગના અધ્યક્ષ પ્રો.એ એચ. હાસમાની અને ઓર્ગેનાઈઝિંગ સેક્રેટરી પ્રો. જ્યોતીન્દ્ર પ્રજાપતિ, ડૉ. પ્રશાંત પટેલ અને ડૉ. મીરા ચુડાસમા હતા. આ કોન્ફરન્સમાં 80થી વધારે સભ્યોએ ભાગ લીધો હતો.
- ડિપાર્ટમેન્ટ ઓફ એપ્લાઈડ મૅથેમૅટિકલ સાયન્સ, એક્ચ્યૂરિયલ એન્ડ સ્કૂલ ઓફ ઇમર્જીંગ સાયન્સ એન્ડ ટેકનોલોજી, ગુજરાત યુનિવર્સિટી દ્વારા 25-26 માર્ચ 2023ના રોજ એપ્લાઈડ મૅથેમૅટિકલ સાયન્સ વિષય પર નેશનલ કોન્ફરન્સનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. કોન્ફરન્સમાં 175 થી વધારે પ્રતિભાગીઓએ ભાગ લીધો હતો. જેમાંથી 68 સંશોધકોએ પોતાના સંશોધન પત્રો રજૂ કર્યાં હતાં. 71 વિદ્યાર્થીઓએ પોતાના પોસ્ટર રજૂ કર્યાં હતાં. આ કોન્ફરન્સના કન્વીનર ડૉ. રવિ ગોર હતા.
- ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ, પીલવાઈ સાયન્સ કૉલેજ દ્વારા તારીખ 19થી 24 જાન્યુઆરી દરમિયાન "એપ્લિકેશન ઓફ ગ્રાફ થિયરી" વિષય પર શોર્ટ ટર્મ કોર્સનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું જેમાં 50થી વધારે અનુસ્નાતક કક્ષાના વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો હતો. ગુજરાતની નામાંકિત શૈક્ષણિક સંસ્થાઓના 8 જેટલા તજજ્ઞશ્રીઓએ પોતાની સેવાઓ આપેલી હતી.
- ગુજરાત ગણિત મંડળના પૂર્વ પ્રમુખ પ્રો. વિઠ્ઠલભાઈ પટેલને તેમની ગણિત વિષયક સેવાઓ તેમજ સમાજ સેવાઓ બદલ અચલા એજ્યુકેશન ફાઉન્ડેશન ટ્રસ્ટ - અમદાવાદ દ્વારા 19 માર્ચના રોજ "સારસ્વત એવોર્ડ" એનાયત કરવામાં આવ્યો હતો. ભારતના પૂર્વ રાષ્ટ્રપતિ મહામહિમ શ્રી રામનાથ કોવિંદજીના હસ્તે આ એવોર્ડ આપવામાં આવ્યો હતો.
- હેમચંદ્રાચાર્ય ઉત્તર ગુજરાત યુનિવર્સિટી પાટણ અને આત્મીય યુનિવર્સિટી રાજકોટના સંયુક્ત ઉપક્રમે "અલગોરીધમ, કોમ્પ્લેક્સિટી એન્ડ એડવાન્સીસ ઇન ગ્રાફ થિયરી" વિષય પર આંતરરાષ્ટ્રીય વર્કશોપનું આયોજન આત્મીય યુનિવર્સિટી રાજકોટ ખાતે તા. 8 ફેબ્રુઆરીના રોજ કરવામાં આવેલ હતું. જેમાં 110થી વધુ પ્રતિભાગીએ ભાગ લીધો હતો. જેમાં બોલ સ્ટેટ યુનિવર્સિટીના પ્રોફેસર જય બગા અને પરડ્યુ યુનિવર્સિટીના પ્રોફેસર લોવેલ બેનિક જેવા વિષયનિષ્ણાત તજજ્ઞો દ્વારા વ્યાખ્યાન આપવામાં આવ્યાં હતાં.
- પ્રો. એ. આર રાવ ફાઉન્ડેશનના ઉપક્રમે પ્રો. એ.આર.રાવ. મૅથમૅટિક્સ કોમ્પિટીશન 2022 પરીક્ષા રાજ્યનાં જુદાં જુદાં 20 કેન્દ્ર પર આયોજિત કરવામાં આવેલ હતી. આ પરીક્ષામાં કુલ 354 જેટલા વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો હતો.

સમગ્ર પરીક્ષાનું સફળ સંચાલન કન્વીનર અને ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખ પ્રો. ઉદયન પ્રજાપતિ, કોઓર્ડીનેટર - ડૉ. અખિલ મિત્તલ તેમજ જોઈન્ટ કોઓર્ડીનેટર ડૉ. દેવેન્દ્ર સન્યાસી દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું. આ પરીક્ષામાં પ્રથમ ક્રમાંક ભરવાડા હાર્દિક (સેન્ટ ઝેવિયર્સ કૉલેજ, અમદાવાદ), દ્વિતીય ક્રમાંક રાજપુત ડુંગરસિંહ અને વાઘેલા નિકેત (પીટી સવાણી સાયન્સ કૉલેજ - સુરત) અને તૃતીય ક્રમાંક પટેલ કર્ણ (સેન્ટ ઝેવિયર્સ કોલેજ - અમદાવાદ)એ મેળવેલ હતો.

- 14 માર્ચ 2023ના રોજ સેન્ટ ઝેવિયર કૉલેજના ગણિત શાસ્ત્ર વિભાગના અધ્યક્ષ અને ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખ પ્રો. ઉદયન પ્રજાપતિ અને દુરદર્શન ગિરનાર ન્યૂઝ ચેનલના ડાયરેક્ટર શ્રી ધર્મેન્દ્ર તિવારીએ આંતરરાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણીના ભાગરૂપે ડી.ડી. ગિરનાર ન્યૂઝ ગુજરાતી ન્યૂઝ ચેનલ પર ''પાઈ દિવસ-ગણિતનો અસલી સ્વાદ'' વિષય પર કાર્યક્રમ પ્રસારિત કરવામાં આવ્યો હતો. જેમાં બંને તજજ્ઞશ્રીઓ સાથેનો સંવાદ તેમજ દર્શક મિત્રો સાથે પ્રશ્નોત્તરીના રાખવામાં આવેલ હતી. આ પ્રસારિત થયેલ સંવાદ કાર્યક્રમ આપ નીચેની યુ ટ્યુબ લીંક પરથી જોઈ શકો છો. https://www/youtube.com/live/Q7yF cnauzQ?feature=share
- તારીખ 29 જાન્યુઆરીના રોજ રાષ્ટ્રીય કક્ષાની માધવા મૅથેમૅટિક્સ કોમ્પિટીશન આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. જેમાં કુલ 182 વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો હતો. આ પરીક્ષા ગુજરાત અને રાજસ્થાન રાજ્યોના 25 જેટલાં કેન્દ્રોમાં આયોજિત કરવામાં આવી હતી. આ પરીક્ષામાં 23 જેટલા વિદ્યાર્થીઓ સફળ રહ્યા હતા. આ સમગ્ર પરીક્ષાનું સફળ સંચાલન ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખ અને કોઓર્ડીનેટર પ્રો. ડૉ. ઉદયન પ્રજાપતિ દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું.
- ગણિતશાસ્ત્ર ભવન, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી તેમજ કોમ્યુનિટી સાયન્સ સેન્ટર વલ્લભવિદ્યાનગરના સંયુક્ત ઉપક્રમે તા. 22-12-2022ના રોજ રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણીના ભાગરૂપે ગણિત વિભાગ દ્વારા ગાણિતિક મોડલનું પ્રદર્શન, રામાનુજનના જીવન પરનું ચલચિત્રપટ અને રંગોલી સ્પર્ધાનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. તેમજ પ્રોફેસર મહાવીર વસાવડાએ રામાનુજનના જીવન પર સુંદર વ્યાખ્યાન આપ્યું હતું. આ કાર્યક્રમમાં ગુજરાત ગણિત મંડળ દ્વારા ગાણિતિક મોડલનો ઉપયોગ, ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગના વિદ્યાર્થીઓએ, 500થી વધુ વિદ્યાર્થીઓ અને શિક્ષકોને સમજાવવા કરેલો હતો. આ કાર્યક્રમના ભાગ રૂપે પ્રોફેસર હેમાંગિની વસાવડાએ વિદ્યાર્થીઓને ગાણિતિક મોડલની ટ્રેનિંગ તારીખ 6-12-2022ના રોજ સતત 4 કલાક આપી હતી. આ કાર્યક્રમ પ્રોફેસર એ.આર. રાવ ફાઉન્ડેશન અને પ્રોફેસર એ. એમ. વૈદ્ય ફાઉન્ડેશનના સહયોગથી કરવામાં આવ્યો હતો.
- સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી, ગણિતશાસ્ત્ર ભવન સભાખંડનું નામાભિધાન કરવામાં આવ્યું હતું. જેનું ઉદ્‌ઘાટન 31 ડિસેમ્બર 2022ના રોજ ગુજરાત ગણિત મંડળના તત્કાલીન પ્રમુખ પ્રો. વિઠ્ઠલભાઈ પટેલના હસ્તે કરવામાં આવ્યું હતું.
- સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટીના અનુસ્નાતક ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ તેમજ મૅથેમૅટિક્સ ટ્રેનિંગ સર્ચ MTTS ટ્રસ્ટના સંયુક્ત ઉપક્રમે એક અઠવાડિયાના ટ્રેનિંગ પ્રોગ્રામનું આયોજન તા. 20 માર્ચથી 25 માર્ચ સુધી કરવામાં આવ્યું હતું. આ ટ્રેનિંગ નેશનલ બોર્ડ ઓફ હાયર મૅથેમૅટિક્સ NBHMના સહયોગથી કરવામાં આવી હતી. આ પ્રોગ્રામનું સંચાલન ડૉ. પ્રશાંત પટેલ અને ડૉ. જય મહેતા દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું, જેમાં 46 વિદ્યાર્થીઓએ આ ટ્રેનિંગનો લાભ લીધો. વિવિધ નામાંકિત શૈક્ષણિક સંસ્થાઓમાંથી 6 જેટલા તજજ્ઞશ્રીઓએ આ ટ્રેનિંગમાં પોતાની સેવાઓ આપેલી હતી. ગુજરાત ગણિત મંડળ દ્વારા આ ટ્રેનિંગમાં લાભ લેનાર વિદ્યાર્થીઓને પુસ્તક ભેટ સ્વરૂપે આપવામાં આવ્યાં હતાં.

- ભારતીય શિક્ષણ પ્રશિક્ષણ સંસ્થાન - ગાંધીનગર (આઈઆઈટી)ના વિદ્યાર્થીઓ અને અધ્યાપકો દ્વારા 14 માર્ચ 2023 આંતરરાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણીના ભાગરૂપે એક શોર્ટ ડોક્યુમેન્ટરી ફિલ્મ "પાઈની રોમાંચક સફર" બનાવાઈ. આ ફિલ્મને નીચે આપેલ યુ ટ્યુબ લીંક પરથી નિહાળી શકાય છે.
https:/youtube/Na75s6tbUtg
- ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગ, સાંકળચંદ પટેલ યુનિવર્સિટી, વિસનગર દ્વારા રાષ્ટ્રીય ગણિત દિવસની ઉજવણીના ભાગરૂપે વિવિધ પ્રકારનાં કાર્યક્રમોનું આયોજન થયું હતું. જેમાં પોસ્ટર પ્રેઝન્ટેશન, મોડલ પ્રેઝન્ટેશન, ગેમ્સ, પઝલ વગેરેનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. આ કાર્યક્રમમાં 100થી વધારે વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો હતો.
- ગણિત મિલન સંસ્થા - વલસાડ અને વલસાડ જિલ્લા શિક્ષણાધિકારીની કચેરીના સંયુક્ત ઉપક્રમે તારીખ 1 માર્ચ 2023ના રોજ વલસાડની સાયન્સ કૉલેજમાં એક દિવસીય સેમિનારનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. આ સેમિનારમાં માધ્યમિક શાળાના 55 જેટલા શિક્ષકો તેમજ 100 જેટલા વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો હતો. આ સેમિનારમાં ગુજરાત ગણિત મંડળના પ્રમુખ પ્રો. ડો. ઉદયન પ્રજાપતિ દ્વારા વિવિધ પ્રકારની મૅથેમૅટિક્સ ટેલેન્ટ ટેસ્ટની વિગતવાર સમજૂતી આપવામાં આવેલ હતી. શ્રી મેઘરાજ ભટ્ટસાહેબ દ્વારા ભૂમિતિ ઉપરનું સુંદર વ્યાખ્યાન આપવામાં આવ્યું હતું. આ કાર્યક્રમમાં ગણિતમાં વિશિષ્ટ સિદ્ધિ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓનું સન્માન પણ કરવામાં આવ્યું હતું. સમગ્ર કાર્યક્રમનું સફળ સંચાલન ગણિત મિલન સંસ્થાના પ્રમુખ શ્રી અશ્વિનભાઈ રાવલના માર્ગદર્શન હેઠળ કરવામાં આવ્યું હતું.

વાચક મિત્રોને નમ્ર વિનંતી છે કે આપની સંસ્થામાં ગણિત વિષયક પ્રવૃત્તિઓ કે વ્યક્તિગત સિદ્ધિઓ સુગણિતમ્‌ના આવનારા અંકમાં પ્રસિદ્ધ કરવા માટે નીચેના ઈમેલ એડ્રેસ પર વિગતો મોકલી આપવી.

dr.parasduchat@gmail.com

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

તંત્રી મંડળ :